Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЖИДКИМ НАПОЛНЕНИЕМ

В. В. Румянцев

(Москва)

Рассматривается устойчивость вращательных движений твердого тела, имеющего полость, полностью или частично (с пузырьком) наполненную идеальной несжимаемой однородной жидкостью.

Жуковским дано общее решение задачи о движении твердого тела с полостями, заполненными полностью несжимаемой жидкостью [1]. Опираясь на исследования Жуковского, Н. Г. Четаев [2] разрешил в точной постановке вопрос об устойчивости вращательных движений твердого тела с полостями, полностью заполненными идеальной жидкостью, совершающей безвихревое движение.

Наряду с точными методами решения задачи о движении твердого тела с полостями, заполненными жидкостью, разрабатывались приближенные методы [3].

С. Л. Соболев [4] рассмотрел методами функционального анализа в линейной постановке задачу об устойчивости вращательных движений тела и идеальной жидкости, целиком заполняющей полость. Применению метода С. Л. Соболева к решению вопроса о движении твердого тела с жидким наполнением посвящена работа [5] С. Г. Крейна.

Напротив, теория движения твердого тела с полостями, не полностью наполненными жидкостью, развита далеко не достаточно и касается главным образом вопроса о малых колебаниях около положения равновесия сосуда с жидкостью, которые рассматривались в работах Г. Е. Павленко, Л. Н. Сретенского, Д. Е. Охоцимского, Б. И. Рабиновича, Н. Н. Моисеева, Г. С. Нариманова.

Большое значение для исследования вопросов, связанных с устойчивостью сплошных сред, имеют работы по изучению устойчивости форм относительного равновесия вращающейся жидкости, в особенности работы Ляпунова [6,7] и Пуанкаре [8]. В работе [8] Пуанкаре занимался изучением малых колебаний свободной гравитирующей по закону Ньютона жидкости около положения ее относительного равновесия и получил некоторые заключения об устойчивости фигур равновесия. Пуанкаре ограничился рассмотрением лишь линейных уравнений первого приближения, получаемых путем пренебрежения в дифференциальных уравнениях проблемы некоторыми членами, считаемыми малыми. Так как законность такой замены первоначальных уравнений проблемы линейными уравнениями не доказывается ничем и по существу дело приводится к замене исследуемой задачи другой, с которой она может и не находиться ни в какой зависимости, то Ляпунов указал [7], что заключения, полученные по методу Пуанкаре, не могут рассматриваться как строго установленные.

Ляпунов выяснил трудности, с которыми приходится сталкиваться при изучении устойчивости движения сплошных сред; так, в частности, в жидкости могут появиться большие по линейным размерам, но малые по объему нитеобразные или листообразные выступы, несущие на себе малые порции энергии. В связи с этим Ляпунов указал, что недопустимы аналогии со случаем конечного числа степеней свободы и что без дополнительного исследования нельзя переносить на случай сплошной среды результаты, полученные для системы с конечным числом степеней свободы.

Как известно, общая задача об устойчивости движения сплошных сред не поставлена до настоящего времени; имеющиеся в литературе попытки постановки этой задачи как задачи об устойчивости систем со счетным числом степеней свободы, сделанные в ряде работ, не могут еще считаться совершенными и общими.

В данной работе избран иной путь исследования, идея которого состоит коротко в следующем.

В задачах об устойчивости движения тел с жидким наполнением нас интересует главным образом вопрос об устойчивости движения твердого тела; вопрос об устойчивости движения жидкости интересует нас лишь постольку, поскольку движение жидкости оказывает влияние на устойчивость движения тела (разумеется, эти две стороны одного вопроса связаны одна с другой). В связи с этим естественно поставить вопрос об устойчивости движения нашей системы по отношению ко всем переменным, характеризующим движение твердого тела, и к части переменных, характеризующих движение жидкости. В такой постановке задача об устойчивости движения твердого тела и жидкости в его полости приводится к исследованию условной устойчивости системы —

устойчивости по отношению к части переменных, а не ко всем переменным, определяющим движение механической системы с бесконечным числом степеней свободы. Далее дается решение этой задачи при помощи второго метода Ляпунова, исходя из полных уравнений возмущенного движения.

1. Уравнения возмущенных движений системы. Предположим, что центральный эллипсоид инерции твердого тела является эллипсоидом вращения и полость, полностью или частично наполненная идеальной жидкостью, имеет форму тела вращения. Центр инерции системы примем за начало системы координат $O_1x_1y_1z_1$, оси которой имеют неизменное направление в пространстве. Уравнения движения будем относить к системе координат $Oxyz$, неизменным образом связанной с твердым телом, начало O которой поместим в центре инерции тела, а оси направим по главным центральным осям инерции тела. Пусть ось вращения полости совпадает с осью вращения эллипсоида инерции тела; последнюю примем за ось Oz.

Рассмотрим случай, когда уравнения движения системы по отношению к ее центру инерции под действием опрокидывающей пары [2] можно записать в виде [9]

$$\begin{gathered}
A\frac{d\omega_1}{dt}+\frac{dg_1}{dt}+(C-A)\,\omega_2\omega_3+\omega_2g_3-\omega_3g_2=a\gamma_2\\
A\frac{d\omega_2}{dt}+\frac{dg_2}{dt}+(A-C)\,\omega_3\omega_1+\omega_3g_1-\omega_1g_3=-a\gamma_1\\
C\frac{d\omega_3}{dt}+\frac{dg_3}{dt}+\omega_1g_2-\omega_2g_1=0
\end{gathered}\tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(u+v_1+\omega_2z-\omega_3y)+\omega_2(w+v_3+\omega_1y-\omega_2x)-\\
&\qquad\qquad-\omega_3(v+v_2+\omega_3x-\omega_1z)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
&\frac{d}{dt}(v+v_2+\omega_3x-\omega_1z)+\omega_3(u+v_1+\omega_2z-\omega_3y)-\\
&\qquad\qquad-\omega_1(w+v_3+\omega_1y-\omega_2x)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\
&\frac{d}{dt}(w+v_3+\omega_1y-\omega_2x)+\omega_1(v+v_2+\omega_3x-\omega_1z)-\\
&\qquad\qquad-\omega_2(u+v_1+\omega_2z-\omega_3y)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\tag{1.3}$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt}=\omega_3\gamma_2-\omega_2\gamma_3,\qquad \frac{d\gamma_2}{dt}=\omega_1\gamma_3-\omega_3\gamma_1,\qquad \frac{d\gamma_3}{dt}=\omega_2\gamma_1-\omega_1\gamma_2\tag{1.4}$$

Здесь $A=B$, C обозначают главные центральные моменты инерции тела, a — постоянную, характеризующую момент опрокидывающей пары, γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы оси неизменного направления O_1z_1 относительно осей x, y, z подвижной системы координат, ω_1, ω_2, ω_3 — проекции на оси x, y, z вектора мгновенной угловой скорости тела, g_1, g_2, g_3 — проекции на оси x, y, z вектора момента количеств движения жидкости в ее движении относительно системы координат $Ox_1y_1z_1$, v_1, v_2, v_3 — проекции на оси x, y, z вектора скорости центра инерции O тела в его движении относительно центра инерции O_1 системы, u, v, w — проекции вектора скорости частиц жидкости относительно твердого тела в ее движении по отношению к системе координат $O_1x_1y_1z_1$, ρ — плотность жидкости, p — давление.

Нетрудно видеть [9], что уравнения движения системы (1.1)—(1.4) обладают первыми интегралами

$$T_1 + T_2 + a\gamma_3 = h, \qquad (A\omega_1 + g_1)\gamma_1 + (A\omega_2 + g_2)\gamma_2 + (C\omega_3 + g_3)\gamma_3 = k$$
$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \qquad \omega_3 = \omega_3^\circ \tag{1.5}$$

где T_1 обозначает кинетическую энергию тела, T_2 — кинетическую энергию жидкости, $U = a\gamma_3$ — потенциальную энергию действующих на систему внешних сил, h, k, ω_3° — постоянные интегрирования.

Легко видеть, что уравнения движения (1.1)—(1.4) имеют следующее частное решение:

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = \omega, \qquad v_1 = v_2 = v_3 = 0$$
$$g_1 = g_2 = 0, \qquad g_3 = g, \qquad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \qquad \gamma_3 = 1 \tag{1.6}$$

которому соответствует равномерное вращение твердого тела вокруг оси Oz, параллельной при этом оси O_1z_1, тогда как движение жидкости является установившимся и, в частности, может быть при определенных условиях как относительным равновесием

$$u = v = w = 0, \qquad g = \omega\rho \int_{\tau_0} (x^2 + y^2)\, d\tau \tag{1.7}$$

так и покоем по отношению к системе координат $O_1x_1y_1z_1$:

$$u = \omega y, \qquad v = -\omega x, \qquad w = 0, \qquad g = 0 \tag{1.8}$$

(в случае, например, безвихревого движения жидкости [1]). Здесь τ обозначает область пространства xyz, занятую в данный момент жидкостью, τ_0 — область τ в невозмущенном движении.

Движение системы, описываемое частным решением (1.6), примем за невозмущенное движение тела и жидкости в его полости и исследуем его устойчивость.

Из уравнений (1.1) видно, что движение твердого тела зависит от кинетического момента жидкости и скорости его изменения со временем, которые в свою очередь зависят от движения тела. В связи с этим естественно исследовать устойчивость движения нашей системы по отношению к проекциям ω_1, ω_2, ω_3 мгновенной угловой скорости тела и к проекциям g_1, g_2, g_3 кинетического момента жидкости на подвижные оси, а также по отношению к некоторым параметрам, характеризующим положение тела в пространстве. За такие параметры можно было бы принять, например, углы Эйлера или углы Крылова; ниже принимаются направляющие косинусы γ_1, γ_2, γ_3 оси O_1z_1 относительно осей x, y, z как величины, непосредственно характеризующие опрокидывающий момент, действующий на систему. Отметим, что кинетический момент жидкости интегральным образом характеризует ее движение, но не полностью, ввиду чего устойчивость движения жидкости по отношению к проекциям на подвижные оси кинетического момента жидкости есть устойчивость условная — устойчивость движения жидкости по отношению к некоторым, а не ко всем переменным, характеризующим ее движение.

Итак, исследуем устойчивость в смысле Ляпунова вращательных движений тела и жидкости в его полости по отношению к переменным

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad \gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3, \quad v_1, \quad v_2, \quad v_3 \tag{1.9}$$

принимающим для невозмущенного движения заданные постоянные значения (1.6).

Таким образом задача об устойчивости движения рассматриваемой системы, обладающей бесконечным числом степеней свободы, сводится к исследованию устойчивости системы по отношению к конечному числу величин (1.9).

Составим уравнения возмущенных движений системы применительно к случаю, когда ее невозмущенное движение представляет собой равномерное вращение тела и жидкости как одного твердого тела. Для случая, когда невозмущенное движение жидкости является покоем, надо только положить в результатах $g = 0$. Положим в возмущенном движении

$$\omega_3 = \omega + \xi, \qquad g_3 = g + \eta, \qquad \gamma_3 = 1 + \zeta \tag{1.10}$$

и подставляя (1.10) в уравнения (1.1)—(1.4), получим следующие уравнения возмущенного движения системы:

$$\begin{gathered} A\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{dg_1}{dt} + (C - A)(\omega + \xi)\omega_2 + (g + \eta)\omega_2 - g_2(\omega + \xi) = a\gamma_2 \\ A\frac{d\omega_2}{dt} + \frac{dg_2}{dt} + (A - C)(\omega + \xi)\omega_1 + g_1(\omega + \xi) - (g + \eta)\omega_1 = -a\gamma_1 \\ C\frac{d\xi}{dt} + \frac{d\eta}{dt} + g_2\omega_1 - g_1\omega_2 = 0 \end{gathered} \tag{1.11}$$

$$\begin{gathered} \frac{du}{dt} + \frac{dv_1}{dt} + \frac{d\omega_2}{dt}z - \frac{d\xi}{dt}y + 2[\omega_2 w - (\omega + \xi)v] + \omega_2 v_3 - (\omega + \xi)v_2 + \\ + \omega_1[(\omega_2 y + (\omega + \xi)z] - [\omega_2^2 + (\omega + \xi)^2]x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} + \frac{dv_2}{dt} + \frac{d\xi}{dt}x - \frac{d\omega_1}{dt}z + 2[(\omega + \xi)u - \omega_1 w] + (\omega + \xi)v_1 - \omega_1 v_3 + \\ + \omega_2[(\omega + \xi)z + \omega_1 x] - [(\omega + \xi)^2 + \omega_1^2]y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} + \frac{dv_3}{dt} + \frac{d\omega_1}{dt}y - \frac{d\omega_2}{dt}x + 2(\omega_1 v - \omega_2 u) + \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 + \\ + (\omega + \xi)(\omega_1 x + \omega_2 y) - (\omega_1^2 + \omega_2^2)z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{gathered} \tag{1.12}$$

$$\begin{gathered} \frac{d\gamma_1}{dt} = (\omega + \xi)\gamma_2 - \omega_2(1 + \zeta), \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = \omega_1(1 + \zeta) - (\omega + \xi)\gamma_1 \\ \frac{d\zeta}{dt} = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2 \end{gathered} \tag{1.13}$$

где

$$g_1 = \rho\int_\tau [y(w + v_3 + \omega_1 y - \omega_2 x) - z(v + v_2 + (\omega + \xi)x - \omega_1 z)]\,d\tau \tag{1.14}$$

$$g_2 = \rho\int_\tau [z(u + v_1 + \omega_2 z - (\omega + \xi)y) - x(w + v_3 + \omega_1 y - \omega_2 x)]\,d\tau$$

$$\eta = \rho\int_\tau [x(v + v_2 + (\omega + \xi)x - \omega_1 z) - y(u + v_1 + \omega_2 z - (\omega + \xi)y)]\,d\tau - \\ - \omega\rho\int_{\tau_0} (x^2 + y^2)\,d\tau$$

Если полость есть тело вращения и если $A = B$, то, как установлено в работе [9], существует интеграл

$$\omega_3 = \omega_3^\circ = \text{const}$$

и, стало быть, во все время движения

$$\xi = \omega_3^\circ - \omega = \text{const} \tag{1.15}$$

Для уравнений (1.11)—(1.13) возможно установить еще три интеграла.

Умножим уравнения (1.11) на ω_1, ω_2, $\omega + \xi$ соответственно и сложим их почленно; умножим уравнения (1.12) на u, v, w соответственно, сложим их почленно, результат умножим на $\rho d\tau$ и проинтегрируем по всему объему τ, занятому жидкостью, а затем сложим с ранее полученным равенством. В результате будем иметь уравнение, из которого немедленно следует интеграл

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2} M (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \tfrac{1}{2} (A\omega_1^2 + A\omega_2^2 + 2C\omega\xi + C\xi^2) + \\
&+ \tfrac{1}{2}\rho \int_\tau (u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau + \tfrac{1}{2}\rho \int_\tau \{[\omega_2 z - (\omega + \xi) y]^2 + [(\omega + \xi) x - \omega_1 z]^2 + \\
&+ (\omega_1 y - \omega_2 x)^2\}\, d\tau + \rho \int_\tau \{u\, [v_1 + \omega_2 z - (\omega + \xi) y] + v\, [v_2 + (\omega + \xi) x - \omega_1 z] + \\
&+ w\, (v_3 + \omega_1 y - \omega_2 x)\}\, d\tau + \rho \int_\tau \{v_1\, [\omega_2 z - (\omega + \xi) y] + v_2\, [(\omega + \xi) x - \omega_1 z] + \\
&+ v_3\, (\omega_1 y - \omega_2 x)\}\, d\tau + a\zeta = \text{const}
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Здесь $M = M_1 + M_2$ — масса системы. Этот интеграл, учитывая формулы (1.14), можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2} M (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \tfrac{1}{2} [A\omega_1^2 + A\omega_2^2 + 2C\omega\xi + C\xi^2] + \\
&+ \tfrac{1}{2}\rho \int_\tau (u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau + \tfrac{1}{2} [\omega_1 g_1 + \omega_2 g_2 + \omega\eta + (g + \eta)\xi] + \\
&+ \tfrac{1}{2}\rho \int_\tau \{(u + v_1)\, [\omega_2 z - (\omega + \xi) y] + (v + v_2)\, [(\omega + \xi) x - \omega_1 z] + \\
&+ (w + v_3)\, (\omega_1 y - \omega_2 x)\}\, d\tau + \rho \int_\tau (u v_1 + v v_2 + w v_3)\, d\tau + a\zeta = \text{const}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Умножим теперь уравнения (1.11) на γ_1, γ_2, $1 + \zeta$, сложим их почленно и, учитывая уравнения (1.13), получим интеграл (1.18)

$$(A\omega_1 + g_1)\gamma_1 + (A\omega_2 + g_2)\gamma_2 + C\xi + \eta + [C(\omega + \xi) + g + \eta]\zeta = \text{const}$$

Если умножить уравнения (1.13) на γ_1, γ_2, $1 + \zeta$ соответственно и сложить их почленно, то найдем еще один интеграл:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \zeta^2 + 2\zeta = 0 \tag{1.19}$$

При исследовании устойчивости невозмущенного движения будем рассматривать возмущенные движения в общем виде, не стесняя их какими-либо ограничениями.

2. Некоторые условия устойчивости. Рассматриваемая механическая система является консервативной, поэтому она не может быть устойчивой асимптотически. Действительно, как следует из теоремы Четаева [10], каждому отличному от нуля характеристичному числу отвечает отрицательное характеристичное число; невозмущенное движение системы будет при этом неустойчивым. Следовательно, невозмущенное движение системы может быть устойчивым лишь в случае, когда все характеристичные числа системы равны нулю, т. е. в критическом по Ляпунову случае, когда первое приближение недостаточно для суждения об устойчивости.

Для решения вопроса об устойчивости движения системы воспользуемся прямым методом Ляпунова. Отметим, что устойчивость вращательных движений твердого тела и жидкости в его полости под действием опрокидывающего момента может быть достигнута за счет гироскопической стабилизации; для систем с конечным числом степеней свободы этот случай может иметь место лишь при существовании знакоопределенного интеграла уравнений возмущенного движения.

Однако в нашей задаче интегралы (1.15)—(1.19), так же как и линейные связки их, не являются знакоопределенными по отношению к вариациям переменных (1.9). Чтобы обойти это затруднение, воспользуемся следующим установленным Ляпуновым [6] неравенством, которое в наших обозначениях имеет вид:

$$g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 \leqslant 2T_2S \tag{2.1}$$

Здесь S обозначает величину, пропорциональную наибольшему из главных моментов инерции (для точки O) жидкости в какой-либо момент времени.

Учитывая обозначения (1.10), неравенство (2.1) для возмущенного движения жидкости перепишем в следующем виде:

$$g_1^2 + g_2^2 + (g + \eta)^2 \leqslant 2T_2S \tag{2.2}$$

где T_2 обозначает кинетическую энергию жидкости в возмущенном движении, а g_1, g_2, η определены формулами (1.14).

Введем в рассмотрение функцию

$$\begin{aligned} H_1 = \tfrac{1}{2}\left[A\omega_1^2 + A\omega_2^2 + C(\omega + \xi)^2\right] + \tfrac{1}{2S}\left[g_1^2 + g_2^2 + (g + \eta)^2\right] + \\ + \tfrac{1}{2} M_1 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + a(1 + \zeta) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Обращая внимание на неравенство (2.2), убеждаемся, что для рассматриваемого возмущенного движения системы имеет место следующее неравенство:

$$H_1 \leqslant H, \qquad H = T + U = h \tag{2.4}$$

Здесь H обозначает полную механическую энергию системы в ее возмущенном движении.

Используя функцию H_1 и интегралы (1.15), (1.18), (1.19), построим в виде линейной связки этих функций некоторую знакоопределенную функцию V.

В силу неравенства (2.4) функция V будет ограниченной сверху и условия ее положительной знакоопределенности дадут согласно теореме Ляпунова об устойчивости достаточные условия устойчивости вращательных движений твердого тела и жидкости в его полости. Таким образом, функция V разрешит вопрос об устойчивости в той конечной области пространства переменных ω_1, ω_2, ξ, g_1, g_2, η, γ_1, γ_2, ζ, v_1, v_2, v_3, где уравнения $V = \mathrm{const}$ дают систему замкнутых ограниченных поверхностей.

Перейдем к построению функции V.

Из интегралов (1.18) и (1.19) находим

$$\eta = \mathrm{const} - (A\omega_1 + g_1)\gamma_1 - (A\omega_2 + g_2)\gamma_2 - C\xi - C(\omega + \xi)\zeta - g\zeta - \eta\zeta \tag{2.5}$$

$$\zeta = -\frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \zeta^2) \tag{2.6}$$

Подставляя в выражение (2.3) функции H_1 вместо входящих в нее в первой степени переменных η и ζ их выражения по формулам (2.5) и (2.6), опуская несущественные постоянные, а также прибавляя члены $\xi^2 C(C - A)/2A$ и $C(g/S - \omega)\xi$, получим функцию

$$\begin{gathered} V = \frac{1}{2}A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2S}(g_1^2 + g_2^2 + \eta^2) - \\ - \frac{g}{S}[(A\omega_1 + g_1)\gamma_1 + (A\omega_2 + g_2)\gamma_2 + C\xi\zeta + \eta\zeta] + \\ + \frac{C^2}{2A}\xi^2 + \frac{1}{2}\left(C\omega\frac{g}{S} + \frac{g^2}{S} - a\right)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \zeta^2) + \frac{1}{2}M_1(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \end{gathered} \tag{2.7}$$

которую можно записать в виде

$$V = W_1 + W_2 + W_3 + \frac{1}{2}M_1(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered} 2W_1(\omega_1, g_1, \gamma_1) = A\omega_1^2 - 2\frac{g}{S}(A\omega_1 + g_1)\gamma_1 + \frac{1}{S}g_1^2 + \left(C\omega\frac{g}{S} + \frac{g^2}{S} - a\right)\gamma_1^2 \\ 2W_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{C^2}{A}\xi^2 - 2\frac{g}{S}(C\xi + \eta)\zeta + \frac{1}{S}\eta^2 + \left(C\omega\frac{g}{S} + \frac{g^2}{S} - a\right)\zeta^2 \end{gathered} \tag{2.8}$$

причем функция $W_2(\omega_2, g_2, \gamma_2)$ подобна функции $W_1(\omega_1, g_1, \gamma_1)$.

Выпишем дискриминанты квадратичных форм W_1 и W_3:

$$\begin{vmatrix} A & 0 & -\frac{A}{S}g \\ 0 & \frac{1}{S} & -\frac{g}{S} \\ -\frac{A}{S}g & -\frac{g}{S} & (C\omega + g)\frac{g}{S} - a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{C^2}{A} & 0 & -\frac{C}{S}g \\ 0 & \frac{1}{S} & -\frac{g}{S} \\ -\frac{C}{S}g & -\frac{g}{S} & (C\omega + g)\frac{g}{S} - a \end{vmatrix}$$

Согласно критерию Сильвестра квадратичная форма тогда и только тогда будет определенно-положительной, когда все главные диагональные миноры ее дискриминанта положительны, вследствие чего получаем следующее условие определенной положительности функций W_1, W_2, W_3:

$$\left(C\omega - \frac{A}{S}g\right)g - aS > 0. \tag{2.9}$$

Таким образом, при выполнении условия (2.9) функция V является определенно-положительной по отношению к переменным ω_1, ω_2, ξ, g_1, g_2, η, γ_1, γ_2, ζ, v_1, v_2, v_3, ограниченной сверху функцией, вследствие чего согласно теореме Ляпунова условие (2.9) является достаточным условием устойчивости вращательных движений твердого тела с жидким наполнением по отношению к величинам (1.9).

Знакоопределенную функцию V можно попытаться построить также несколько иным способом [10]. Умножим функцию (2.3) на $C\omega$, интеграл (1.19) на $-2a$ и сложим их, а затем заменим ζ по формуле (2.6) и прибавим члены

$$C(2a - C\omega^2)\xi, \qquad \frac{C^2\omega(C-A)}{2A}\xi^2. \tag{2.10}$$

Тогда с точностью до постоянных будем иметь

$$V = \frac{AC\omega}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{C^3\omega}{2A}\xi^2 + \frac{C\omega}{2S}(g_1^2 + g_2^2 + \eta^2) -$$
$$-2a[(A\omega_1 + g_1)\gamma_1 + (A\omega_2 + g_2)\gamma_2 + (C\xi + \eta)\zeta] +$$
$$+\left(\frac{C\omega}{2} + g\right)a(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \zeta^2) + \tfrac{1}{2}C\omega M_1(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \left(\frac{C\omega}{S}g - 2a\right)\eta$$

или

$$V = W_1 + W_2 + W_3 + \frac{C\omega}{2}M_1(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \left(\frac{C\omega}{S}g - 2a\right)\eta \tag{2.11}$$

где введены следующие обозначения:

$$W_1(\omega_1, g_1, \gamma_1) = \frac{AC\omega}{2}\omega_1^2 - 2a(A\omega_1 + g_1)\gamma_1 + \frac{C\omega}{2S}g_1^2 + \left(\frac{C\omega}{2} + g\right)a\gamma_1^2$$
$$W_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{C^3\omega}{2A}\xi^2 - 2a(C\xi + \eta)\zeta + \frac{C\omega}{2S}\eta^2 + \left(\frac{C\omega}{2} + g\right)a\zeta^2$$

причем функция $W_2(\omega_2, g_2, \gamma_2)$ подобна функции $W_1(\omega_1, g_1, \gamma_1)$. Выписывая дискриминанты квадратичных форм W_1 и W_3

$$\begin{vmatrix} \frac{AC\omega}{2} & 0 & -Aa \\ 0 & \frac{C\omega}{2S} & -a \\ -Aa & -a & \left(\frac{C\omega}{2} + g\right)a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{C^3\omega}{2A} & 0 & -Ca \\ 0 & \frac{C\omega}{2S} & -a \\ -Ca & -a & \left(\frac{C\omega}{2} + g\right)a \end{vmatrix}$$

согласно критерию Сильвестра находим следующее условие определенной положительности форм W_1, W_2, W_3

$$C^2\omega^2 + 2C\omega g - 4(A + S)a > 0 \tag{2.12}$$

Если во все время движения

$$\left(\frac{C\omega}{S}g - 2a\right)\eta \geqslant 0 \tag{2.13}$$

то при выполнении условия (2.12) функция V будет определенно-положительной функцией, ограниченной сверху в силу неравенства (2.4), и согласно теореме Ляпунова условия (2.12) и (2.13) являются достаточными условиями устойчивости вращательных движений твердого тела с жидким наполнением по отношению к величинам (1.9).

Следует отметить, что при отсутствии жидкости в полости тела (когда надо положить $g = 0$, $S = 0$, $g_1 = g_2 = \eta = 0$) условие (2.12) переходит в известное условие Майевского устойчивости снарядов

$$C^2\omega^2 - 4Aa > 0$$

В качестве примера рассмотрим случай потенциального движения жидкости, полностью заполняющей полость в форме тела вращения. Как известно [1], равномерное вращение тела вокруг оси Oz полости не вызывает движения идеальной жидкости, которая находится в покое, и $g = 0$. В возмущенном движении скорости частиц жидкости определяются потенциалом скоростей $\varphi(x, y, z, t)$, причем

$$\varphi = \psi_1(x, y, z)\,\omega_1 + \psi_2(x, y, z)\,\omega_2$$

и, как легко видеть,

$$\eta = \rho\int_\sigma \varphi(xm - yn)\,d\sigma = 0$$

так как на стенках полости σ в каждой точке выполняется условие

$$xm - yn = 0$$

где m, n обозначают направляющие косинусы внешней нормали к поверхности σ. В этом случае, следовательно, условие (2.13) выполняется, а условие (2.12) принимает следующий вид:

$$C^2\omega^2 - 4(A + S)\,a > 0 \tag{2.14}$$

При выполнении этого условия вращательное движение твердого тела с жидким наполнением будет устойчивым.

Отметим, что условие устойчивости типа условия (2.14) для тел с жидким наполнением, совершающим безвихревое движение, было впервые получено Н. Г. Четаевым [2] при рассмотрении устойчивости соответствующего эквивалентного твердого тела; величина S в этом случае представляет собой экваториальный момент инерции эквивалентного твердого тела.

В заключение подчеркнем еще раз, что устойчивость вращательных движений твердого тела с жидким наполнением под действием опрокидывающего момента достигается за счет гироскопической стабилизации, а последняя, как указал Кельвин, невозможна, если на систему действуют диссипативные силы с рассеянием энергии при любых действительных перемещениях системы. Так как в действительности малые диссипативные силы всегда существуют, то гироскопическая стабилизация с течением времени нарушается, ввиду чего Кельвин предложил различать устойчивость «временную», достигаемую за счет гироскопической стабилизации, и «вековую», существующую при действии одних потенциальных сил. Очевидно, что устойчивость нашей системы имеет характер «временной» устойчивости, а в «вековом» смысле система неустойчива. Н. Г. Четаеву [10] удалось доказать теорему о неустойчивости движения твердого тела при учете диссипативных сил. По-видимому, эта теорема справедлива и для вращательных движений твердого тела с жидким наполнением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. II. Гостехиздат, 1948.
2. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого наполнена идеальной жидкостью. ПММ, т. XXI, вып. 2, 1957.
3. Ламб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947.
4. Соболев С. Л. О движении волчка с полостью, наполненной жидкостью. Матем. ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР, рукопись, 1945.
5. Крейн С. Г. О функциональных свойствах операторов векторного анализа и гидродинамики. Докл. АН СССР, т. XCIII, вып. 6, 1953.
6. Ляпунов А. М. Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости. СПб, 1884.
7. Ляпунов А. М. Задача минимума в одном вопросе об устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости. Собр. соч., т. III, 1959.
8. Poincaré H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. Acta Math., t. 7, 1885—1886.
9. Румянцев В. В. Уравнения движения твердого тела, имеющего полости, не полностью заполненные жидкостью. ПММ, т. XVIII, вып. 6, 1954.
10. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1955.