Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ВРАЩЕНИЕ ЦИЛИНДРА С ПЕРЕМЕННОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТЬЮ В ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЕ

А. И. Сафрончик

(Саратов)

В работе даются постановка и решение задачи о неустановившемся течении вязко-пластичной среды, примыкающей к цилиндру, вращающемуся с переменной угловой скоростью. Разрабатывается метод решения плоских осесимметричных «задач с искомой границей» для параболических уравнений. Находится уравнение для определения радиуса распространения вязко-пластичного течения.

§ 1. Постановка задачи. Пусть жесткий цилиндр радиуса R помещен в вязко-пластичную среду, занимающую все пространство, и вращается в ней с угловой скоростью $\omega = \omega(t)$. Изучим движение среды, примыкающей к цилиндру. В отличие от вязкой жидкости течение распространится лишь на конечное расстояние от вращающегося цилиндра, остальная часть среды будет находиться в покое. Радиус зоны вязко-пластичного течения зависит от свойств среды и угловой скорости вращения цилиндра и является функцией времени, причем заранее неизвестной.

В силу симметрии течение описывается одним уравнением

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right) - \frac{2\tau_0}{r} \qquad (1.1)$$

при $(t > 0,\ R < r < r_0(t)$, где v — тангенциальная составляющая скорости, ρ — плотность, μ — коэффициент вязкости, τ_0 — предельное напряжение сдвига. Граничные и начальное условия будут

$$v(r, 0) = F(r) \qquad \text{при } R < r < r_0(0) \qquad (1.2)$$

$$v(R, t) = R\omega(t) \qquad (1.3)$$

$$v(r_0(t), t) = 0, \qquad v_r(r_0(t), t) = 0 \qquad (1.4)$$

при $t > 0$. Условия (1.4) выражают обращение в нуль скоростей вращения и скольжения на границе вязко-пластичного течения, радиус которой обозначен через $r_0(t)$ и подлежит определению. Такую общую постановку задачи можно найти в работе [1].

Пусть ω_0 — характерная угловая скорость, ν — коэффициент кинематической вязкости.

Введем безразмерный радиус, безразмерное время и безразмерную угловую скорость по формулам

$$x = \frac{r}{R}, \qquad y = \frac{\nu}{R^2} t, \qquad W(y) = \frac{\omega(t)}{\omega_0}$$

и приведем уравнение и краевые условия к безразмерному виду

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{x^2} - \frac{2S}{x} \qquad \left(\begin{matrix} y > 0 \\ 1 < x < \delta(y) \end{matrix}\right) \tag{1.5}$$

Здесь $u(x, y)$ — безразмерная скорость, $\delta(y)$ — безразмерный радиус зоны вязко-пластичного течения, S — параметр Сен-Венана:

$$u(x, y) = \frac{v(r, t)}{R\omega_0}, \qquad \delta(y) = \frac{r_0(t)}{R}, \qquad S = \frac{\tau_0}{\mu\omega_0} \tag{1.6}$$

Краевые условия (в дальнейшем будем понимать их как предельные) примут вид:

$$\lim u(x, y) = \frac{F(Rx)}{R\omega_0} = \Phi(x) \quad \text{при } y \to +0, \ (1 < x < \delta_0), \ \left(\delta_0 = \frac{r_0(0)}{R}\right) \tag{1.7}$$

$$\lim u(x, y) = w(y) \quad \text{при } x \to 1 + 0, \ y > 0 \tag{1.8}$$

$$\lim u(x, y) = 0 \quad \text{при } x \to \delta(y) - 0, \ y > 0 \tag{1.9}$$

$$\lim \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x \to \delta(y) - 0, \ y > 0 \tag{1.10}$$

Здесь δ_0 — начальный радиус зоны вязко-пластичного течения. Сформулированная краевая задача является типичной «задачей с искомой границей» для уравнения параболического типа. Наиболее эффективным методом решения таких задач является метод Колоднера [2], предложенный им для линейных задач о фазовых превращениях. Этот метод дает возможность находить неизвестную границу области без построения решения внутри самой области. Аналогичный метод для плоских осесимметричных задач разрабатывается и в настоящей работе.

§ 2. Построение решения. Будем искать решение уравнения (1.5) в виде

$$u(x, y) = -\frac{2S}{x} y + \frac{1}{2y}\int_1^{\delta_0} \xi\Phi(\xi) I_1\left(\frac{x\xi}{2y}\right)\exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4y}\right) d\xi + \lambda(x, y) \tag{2.1}$$

Легко проверить, что второе слагаемое при всех x и $y > 0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

Покажем, что

$$\lim_{y \to +0} \frac{1}{2y}\int_1^{\delta_0} \xi\Phi(\xi) I_1\left(\frac{x\xi}{2y}\right)\exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4y}\right) d\xi = \Phi(x) \qquad (1 < x < \delta_0)$$

Замечая, что для больших аргументов

$$I_1(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z \tag{2.2}$$

и вводя новую переменную интегрирования $\alpha = (\xi - x)/2\sqrt{y}$, получим

$$\lim_{y\to+0} \frac{1}{2y}\int_1^{\delta_0} \xi\Phi(\xi) I_1\left(\frac{x\xi}{2y}\right) \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4y}\right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \lim_{y\to+0} \int_1^{\delta_0} \sqrt{\xi}\Phi(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\right) \frac{d\xi}{2\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \lim_{y\to+0} \int_{\chi_2}^{\chi_1} \sqrt{x + 2\alpha\sqrt{y}}\, \Phi(x + 2\alpha\sqrt{y}) e^{-\alpha^2} d\alpha = \Phi(x)$$

$$\chi_1 = (\delta_0 - x)/2\sqrt{y}, \qquad \chi_2 = (1-x)/2\sqrt{y} \qquad (1 < x < \delta_0)$$

Предельный переход под знаком интеграла возможен, так как функция $\Phi(x)$ предполагается непрерывной. На концах интервала предел зависит от пути подхода к точкам $M_1(1,0)$ и $M_2(\delta_0, 0)$. При подходе по прямым $x = 1$ и $x = \delta_0$ этот предел равен $\frac{1}{2}\Phi(1) = \frac{1}{2}\Phi(\delta_0) = 0$.

Для функции $\lambda(x, y)$ будем иметь следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial\lambda}{\partial x} - \frac{\lambda}{x^2} \qquad (y > 0,\ 1 < x < \delta(y)) \tag{2.3}$$

$$\lim \lambda(x, y) = 0 \qquad \text{при } y \to +0,\ 1 < x < \delta_0 \tag{2.4}$$

$$\lim \lambda(x, y) = W(y) + 2Sy - \frac{1}{2y}\int_1^{\delta_0} \xi\Phi(\xi) I_1\left(\frac{\xi}{2y}\right) \exp\left(-\frac{1+\xi^2}{4y}\right) d\xi = f(y)$$
$$\text{при } x \to 1+0 \tag{2.5}$$

$$\lim \lambda(x, y) = \frac{2Sy}{\delta(y)} - \frac{1}{2y}\int^{\delta_0} \xi\Phi(\xi) I_1\left(\frac{\xi\delta(y)}{2y}\right) \exp\left(-\frac{\xi^2 + \delta^2(y)}{4y}\right) d\xi = \varphi(y)$$
$$(\text{при } x \to \delta(y) - 0 \text{ и } y > 0) \tag{2.6}$$

$$\lim \frac{\partial\lambda(x, y)}{\partial x} = -\frac{2Sy}{\delta^2(y)} - \frac{1}{4y^2}\int_1^{\delta_0} \xi\Phi(\xi)\left\{\xi I_1'\left(\frac{\xi\delta(y)}{2y}\right) - \right.$$
$$\left. - \delta(y) I_1\left(\frac{\xi\delta(y)}{2y}\right)\right\} \exp\left(-\frac{\xi^2+\delta^2(y)}{4y}\right) d\xi = \Psi(y)$$
$$(\text{при } x \to \delta(y) - 0 \text{ и } y > 0) \tag{2.7}$$

Ограничим область изменения y, тогда областью, в которой ищется решение, будет область $D_-\{0 < y \leqslant y_0,\ 1 < x < \delta(y)\}$. Пусть $D_+\{0 < y \leqslant y_0,\ \delta(y) < x < \infty\}$ будет дополнительной областью к D_-. Распространим определение решения в область D_+, полагая $\lambda \equiv 0$ для $Q \in D_+$, тогда краевые условия для λ останутся прежними. Обозначим через $\bar{D}$ замыкание D_- и D_+ в множестве $E\{0 \leqslant y \leqslant y_0,\ 1 \leqslant x < \infty,\ |x - \delta_0| + |y| > 0\}$, а через D — внутренность $\overline{D}$. Очевидно, что ни D, ни $\overline{D}$ не зависят от $\delta(y)$. Величины $\lambda_-(x, y)$ и $\lambda_+(x, y)$ определим как $\lambda_\pm(M) = \lim \lambda(Q)$ при $Q \to M(x, y)$, где $Q \in D_\pm$.

Будем искать решение уравнения (2.3) в области D, удовлетворяющее условиям (2.4) и (2.5) и двум условиям скачка на произвольной кривой $x = \delta(y)$:

$$\lim_{x\to\delta(y)+0} \lambda(x, y) - \lim_{x\to\delta(y)-0} \lambda(x, y) = -\varphi(y) \tag{2.8}$$

$$\lim_{x\to\delta(y)+0} \frac{\partial\lambda(x, y)}{\partial x} - \lim_{x\to\delta(y)-0} \frac{\partial\lambda(x, y)}{\partial x} = -\Psi(y) \tag{2.9}$$

Кроме того, потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\lambda(\infty, y) = 0 \tag{2.10}$$

и чтобы построенное решение было ограничено вместе со своей производной в области $\overline{D}$. Ниже будет показано, что такая задача имеет решение и притом единственное.

Решение будем иметь в виде суммы регулярного решения $\Theta(x, y)$ и нерегулярного $N(x, y)$. Потребуем, чтобы функция $\Theta(x, y)$ удовлетворяла нулевому начальному условию и условиям

$$\lim \Theta(x, y) = f(y) - N(1, y) \quad \text{при } x \to 1 + 0, \Theta(\infty, \quad y) = 0 \tag{2.11}$$

а функция $N(x, y)$ удовлетворяла, кроме условий (2.4), (2.8), (2.9) и (2.10), еще условию $N(0, y) = 0$; тогда сумма решений будет удовлетворять всем условиям поставленной задачи.

Регулярное решение $\Theta(x, y)$ можно понимать как распределение скоростей при вращении цилиндра в вязкой жидкости с угловой скоростью $\alpha(y) = f(y) - N(1, y)$ и представить в виде [3]

$$\Theta(x, y) = \frac{\alpha(y)}{x} + \frac{2}{\pi}\alpha(0)\int_0^\infty \frac{J_1(\rho x) N_1(\rho) - J_1(\rho) N_1(\rho x)}{J_1^2(\rho) + N_1^2(\rho)} \frac{e^{-\rho^2 y}}{\rho}\, d\rho +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{J_1(\rho x) N_1(\rho) - J_1(\rho) N_1(\rho x)}{J_1^2(\rho) + N_1^2(\rho)} \frac{e^{-\rho^2 y}}{\rho} \int_0^y \alpha'(\eta)\, e^{+\rho^2\eta} d\eta\, d\rho \tag{2.12}$$

где $J_1(\rho)$ и $N_1(\rho)$ — функции Бесселя и Неймана первого порядка. Нерегулярное решение будем искать в виде суммы интегралов типа потенциалов простого и двойного слоев от тепловых источников, равномерно распределенных по кругу радиуса $x = \delta(y)$. Мощности источников подобраны так, чтобы выполнялись условия (2.8) и (2.9). Покажем, что единственным таким решением будет

$$N(x, y) = -\frac{1}{4}\int_0^y G(\eta)\, d\eta + \frac{1}{2}\int_0^y H(\eta)\, d\eta + \tag{2.13}$$

$$+ \frac{1}{4}\int_0^y \frac{2\psi(\eta)\,\delta(\eta) + \varphi(\eta)}{y - \eta} I_1\left(\frac{x\delta(\eta)}{2(y - \eta)}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + \delta^2(\eta)}{4(y - \eta)}\right) d\eta$$

Здесь (2.14)

$$G(\eta) = \frac{\varphi(\eta)\,\delta(\eta)}{(y-\eta)^2}\left\{xI_0\left(\frac{x\delta(\eta)}{2(y-\eta)}\right) - \delta(\eta)\,I_1\left(\frac{x\delta(\eta)}{2(y-\eta)}\right)\right\}\exp\left(-\frac{x^2+\delta^2(\eta)}{4(y-\eta)}\right)$$

$$H(\eta) = \frac{\varphi(\eta)\,\delta(\eta)\,\delta'(\eta)}{y-\eta}\,I_1\left(\frac{x\delta(\eta)}{2(y-\eta)}\right)\exp\left(-\frac{x^2+\delta^2(\eta)}{4(y-\eta)}\right)$$

Легко проверить, что (2.13) при $x \neq \delta(y)$ удовлетворяет уравнению (2.3), начальному условию (2.4) и условиям при $x=0$ и $x=\infty$. Докажем, что условия (2.8) и (2.9) также выполняются. Обозначим первые два слагаемые через K_1, а третье через K_2 и рассмотрим их свойства.

а. *Свойства* $K_1(x, y)$. Разбивая интервал интегрирования на два: от 0 до $y-\varepsilon$ и от $y-\varepsilon$ до y, представим K_1 в виде суммы интегралов, затем, выбрав $\varepsilon > 0$ достаточно малым и использовав асимптотическое разложение для бесселевой функции большого аргумента, получим

$$-K_1(x, y) = \frac{1}{4}\int_0^{y-\varepsilon} G(\eta)\,d\eta - \frac{1}{2}\int_0^{y-\varepsilon} H(\eta)\,d\eta +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_{y-\varepsilon}^{y} \varphi(\eta)\sqrt{\delta(\eta)}\,\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{x-\delta(\eta)}{2(y-\eta)^{1/2}}\right\}\exp\left(-\frac{[x-\delta(\eta)]^2}{4(y-\eta)}\right)d\eta \qquad (2.15)$$

Первые два слагаемые не имеют никаких особенностей и являются непрерывно дифференцируемыми функциями. Третье слагаемое представляет комбинацию линейных тепловых потенциалов простого и двойного слоев. В работе [4] показано, что такая комбинация имеет на кривой $x=\delta(y)$ разрыв, причем скачок равен $\varphi(y)$. При этом предполагается, что функция $\delta(y)$ непрерывно дифференцируемая, нигде не обращается в нуль и что $\delta'(y) \leqslant C/\sqrt{y}$. Функция $\Phi(x)$ предполагается непрерывно дифференцируемой, а ее производная удовлетворяющей условию Липшица в интервале $(1 < x < \delta_0)$. Вычисляя производную $\partial K_1/\partial x$, найдем, что она на кривой $x=\delta(y)$ имеет скачок, равный $\varphi(y)/2\delta(y)$.

б. *Свойства.* $K_2(x, y)$. Функция K_2 представлена интегралом типа потенциала простого теплового слоя и, следовательно, непрерывна. Ее производная с точностью до множителя выражается через линейный тепловой потенциал двойного слоя, который на кривой $x=\delta(y)$ терпит разрыв. Произведя вычисления, найдем, что скачок

$$\left[\frac{\partial K_2}{\partial x}\right] = -\left(\psi(y) + \frac{\varphi(y)}{2\delta(y)}\right)$$

Из свойств K_1 и K_2 следует, что их сумма удовлетворяет условиям (2.8) и (2.9). Доказательство единственности полученного решения проводится так же, как и в работе [4].

Если мы потребуем, чтобы (2.16)

$$\lim \lambda(x, y) = 0 \ \text{ при } x \to \delta(y)+0, \qquad \lim \frac{\partial\lambda(x, y)}{\partial x} = 0 \ \text{ при } x \to \delta(y)+0$$

то условия (2.6) и (2.7) окажутся выполненными. Этим завершается доказательство того, что $\lambda(x, y) = \theta(x, y) + N(x, y)$ является единственным решением краевой задачи (2.3)—(2.7). Но в построенное решение входит пока произвольная функция $\delta(y)$. Для ее определения имеем два уравнения (2.16). Можно показать, что любое решение первого уравнения (2.16) одновременно удовлетворяет второму уравнению (2.16) и наоборот (за доказательством отсылаем к работам [2] или [4]).

Таким образом, если по крайней мере одно из уравнений (2.16) имеет единственное решение при $\delta(0) = \delta_0$, то это решение и дает искомый радиус распространения вязко-пластичного течения, а (2.1) — распределение скоростей этого течения. Отметим, что вопрос о единственности решения уравнений (2.16) в общем виде пока не решен. Для ряда конкретных задач такое доказательство имеется в литературе. Можно произвести оценку построенного решения «в большом», т. е. при $0 < y < \infty$, но для этого нужны дополнительные исследования, на которых мы здесь не останавливаемся.

§ 3. Случай ограниченной среды. В предыдущем параграфе мы построили решение для случая неограниченной среды. Если вязко-пластичная среда имеет конечные размеры, то задача несколько усложняется. Рассмотрим наиболее простую задачу, на которой выясним механизм распространения течения. Пусть цилиндр радиуса R помещен в вязко-пластичную среду, граница которой имеет радиус R_1, и пусть цилиндр из покоя начинает вращаться с постоянной угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Очевидно, что возникает неустановившееся течение материала, асимптотически приближающееся при $y \to \infty$ к установившемуся. Распределение скоростей при установившемся течении задается формулой

$$v = \frac{\tau_0}{2\mu} r \left(\frac{\rho^2}{r^2} - 1 + 2 \ln \frac{r}{\rho}\right) \tag{3.1}$$

а радиус зоны распространения течения ρ является решением трасцендентного уравнения

$$\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 - \ln\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 = 1 + \frac{2\mu\omega}{\tau_0} \tag{3.2}$$

Если $\rho \leqslant R_1$, то граница среды никак не может повлиять на развитие течения. Ее влияние сказывается только при $\rho > R_1$. Для того момента, пока развивающееся течение не достигнет границы среды, распределение скоростей подчиняется тому же закону, что и в случае неограниченной среды, а, начиная с этого момента, закон течения изменится. Для нахождения этого закона нужно решить новую краевую задачу, отбрасывая условие обращения в нуль скоростей скольжения на границе среды. Такое решение приводится в работе [1], однако автор не учитывает ни влияния размеров среды, ни границ применимости полученного им решения. При построении решения автор предполагает, что вся среда приходит во вращение мгновенно; при таком подходе остается невыясненным основной вопрос о развитии зоны течения и об определении ее радиуса.

В заключение автор приносит благодарность С. В. Фальковичу за указания при подготовке данной статьи.

Поступила 18 V 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахшиян Ф. А. Вращение жесткого цилиндра в вязко-пластичной среде. ПММ, т. XII, вып. 6, 1948.
2. Kolodner I. I. Free baundary problem for the heat equation wich applications of change of phase. Communications on pure and applied Mathematics, vol. IX, No. 1, 1956.
3. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Гостехтеоретиздат, М., 1955.
4. Сафрончик А. И. Неустановившееся течение вязко-пластичного материала между параллельными стенками. ПММ, т. XXIII, вып. 5, 1959.