Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

КОНВЕКТИВНАЯ ДИФФУЗИЯ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

В. Н. Николаевский

(Москва)

При движении жидкости по пересеченному поровому пространству пористой среды имеет место интенсивный процесс перемешивания, проследить за которым возможно, добавляя в поток примесь частиц, не меняющих свойств жидкости и параметров течения, не прилипающих к стенкам пор и двигающихся в каждой точке порового пространства с существующей в ней скоростью.

Под пересеченным поровым пространством понимается такая система поровых каналов, каждый из которых сообщается со всеми соседними. Примером такой среды может служить засыпка из песка.

Локальная скорость движения частиц жидкости является случайной функцией точки порового пространства [1]. В силу этого распространение добавленного в поток индикатора подчиняется закону, в некоторой степени аналогичному закону диффузии пассивной примеси в турбулентном потоке.

Выполненное ранее [2] построение капиллярной модели механизма такой диффузии, которую можно называть конвективной, имеет пока иллюстративное значение в силу неполноты наших знаний о корреляционных связях гидравлических характеристик поровых каналов.

В данной работе вводятся некоторые осредненные параметры изотропной однородной пористой среды, определяющие характер конвективной диффузии.

1. Рассмотрим поток однородной жидкости в изотропной однородной пористой среде; изотропия предполагается в смысле инвариантности распределения вероятностей характеристик среды относительно жестких вращений и зеркальных отражений. Поток жидкости будем определять вектором средней скорости; осреднение скорости, так же как и характеристик пористой среды, производится по совокупности испытаний, при этом предполагается, что результаты осреднения не зависят от выбора точек порового пространства, т. е. можно брать точки, находящиеся на любой поверхности, рассекающей среду, на любой произвольно проведенной в среде кривой. Так, например, можно осреднять по точкам порового пространства, находящимся на произвольном плоском сечении элементарного макрообъема. Предполагается, что можно выбрать такой элементарный макрообъем, который будет содержать всю совокупность испытаний, а осредненные характеристики потока для него будут неизменны.

Жидкая частица в разные моменты времени будет двигаться с различной скоростью именно в силу пересеченности порового пространства, так как если бы поровое пространство состояло из непрерывных трубок, не пересекающихся одна с другой, то частица не проходила бы через всю совокупность испытаний (см. раздел 4).

Если в начальный момент времени частица находилась в начале движущейся со средней скоростью системы координат, то через время t ее координаты будут

$$x_\alpha(t) = \int_0^t v_\alpha(\tau)\, d\tau = \int_0^t [u_\alpha(\tau) - \bar{u}_\alpha]\, d\tau \tag{1.1}$$

где $u_\alpha(\tau)$ — составляющая скорости по оси α в момент времени τ; здесь и в дальнейшем черта означает среднее значение величины.

Выражение (1.1) является интегральным преобразованием случайной функции $v_\alpha(t)$. Из предельной теоремы теории вероятностей следует, что случайная функция имеет распределение, близкое к нормальному при произвольном законе распределения функции $v_\alpha(t)$, если $v_\alpha(t)$ вне некоторых достаточно малых интервалов времени τ_0 $(t \gg \tau_0)$ принимает статистически независимые значения.

Если в любой момент времени имеет место трехмерное нормальное распределение, т. е. плотность вероятности нахождения частицы в точке с координатами x_1, x_2, x_3 имеет вид:

$$\psi(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{(2\pi)^{-3/2}}{\sqrt{\overline{x_1^2}\,\overline{x_2^2}\,\overline{x_3^2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{\overline{x_\alpha^2}}\right\} \tag{1.2}$$

то, рассматривая ψ как относительную концентрацию примеси частиц, видим, что (1.2) есть решение типа мгновенного источника уравнения диффузии

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(D_\alpha \frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\right) \tag{1.3}$$

где D_α — составляющие по осям коэффициента диффузии:

$$D_\alpha = \overline{x_\alpha^2} / (2t) \tag{1.4}$$

По-видимому, впервые подобный статистический подход к рассмотрению движения частицы в пористой среде был предложен Шейдеггером [3], который предполагал, что среда состоит из совершенно одинаковых пор, и тем самым сводил задачу к модельной задаче о случайном блуждании частицы.

Коэффициент диффузии по осям различен, поэтому он должен быть тензором второго ранга. В уравнении (1.3) в качестве системы координат взяты главные оси этого тензора.

2. Если в изотропной однородной пористой среде имеет место однородный поток жидкости (направление потока постоянно), то коэффициент диффузии, характеризующий описанное в предыдущем разделе перемешивание, будет инвариантен относительно вращений вокруг направления средней скорости и зеркальных отражений относительно плоскостей, включающих в себя вектор средней скорости или перпендикулярных этому вектору. В этом случае [4] коэффициент диффузии будет иметь вид одноточечного осесимметричного изотропного тензора

$$D_{ij} = A\bar{u}_i^\circ \bar{u}_j^\circ + BI_{ij} \tag{2.1}$$

где A, B — постоянные, $\bar{u}_i^\circ$ — компоненты орта средней скорости, I_{ij} — единичный тензор.

В случае турбулентной диффузии в поле однородного потока коэффициент диффузии является изотропным тензором $D_{ij} = BI_{ij}$, так как вся область перемешивания переносится в целом со средней скоростью; в области перемешивания направление вектора средней скорости равноправно с другими направлениями. В рассматриваемом случае область перемешивания — пористая среда — существенно неподвижна, а потому поток имеет ось симметрии — направление средней скорости.

Рассмотрим наиболее важные течения — течения, подчиняющиеся закону Дарси, в которых можно пренебречь инерционными силами [5]. Из характеристик таких течений — средней скорости $\bar{u}$, вязкости жидкости μ и некоторой характерной длины пористой среды — нельзя составить никакой безразмерной комбинации, а потому коэффициент диффузии, имеющий размерность $см^2сек^{-1}$, будет равен [6] с точностью до безразмерного постоянного множителя произведению средней скорости и указанной характерной длины.

Поскольку рассматривается неодномерный процесс диффузии, характерная длина, вообще говоря, не будет скалярной величиной, а должна являться некоторым тензором. Будем называть ее тензором рассеивания пористой среды. Так как среда изотропна, то одноточечный тензор рассеивания должен быть тензором четного ранга [4]. Коэффициент диффузии тогда будет представлен в виде произведения тензора рассеивания на величину, связанную с вектором средней скорости и имеющую размерность скорости.

Если принять коэффициент диффузии в виде произведения некоторого изотропного тензора второго ранга на модуль вектора средней скорости, то все компоненты коэффициента диффузии будут одинаковы, коэффициент диффузии будет шаровым тензором. Перемешивание будет изотропно, постоянная A выражения (2.1) должна быть равна нулю. Такого рода представление принимается относительно турбулентной диффузии в поле однородного потока [7].

Можно представить коэффициент диффузии в виде произведения скаляра, характеризующего рассеивание в пористой среде, на тензор, составленный из компонент $\bar{u}_k$ и $\bar{u}_l^\circ$. Легко показать, что при этом рассеивание будет происходить лишь в направлении вектора средней скорости, в ортогональных ей направлениях она будет равна нулю; в выражении (2.1) должно быть $B = 0$. Такое представление принимается в капиллярных моделях процесса диффузии в пористых средах [2].

Можно задать тензор рассеивания пористой среды в виде тензора четвертого ранга, который в силу изотропии среды [4] будет характеризоваться тремя постоянными;

$$Q_{ijkl} = H_1 I_{ij} I_{kl} + H_2 I_{ik} I_{jl} + H_3 I_{il} I_{jk}, \qquad [Q_{ijkl}] = [H_i] = см \tag{2.2}$$

Тогда компоненты коэффициента диффузии будут определяться следующим образом:

$$D_{ij} = Q_{ijkl} \bar{u}_k \bar{u}_l^\circ = Q_{ijkl} \bar{u}_k \bar{u}_l / |\bar{u}| \tag{2.3}$$

где суммирование производится по повторяющимся индексам.

Так как коэффициент диффузии — симметричный тензор, то $H_2 = H_3$ в силу равноправия индексов k и l. Легко показать, что выражение (2.3) эквивалентно формуле (2.1), причем

$$B = H_1 |\bar{u}|, \quad A = 2H_2 |u|$$

Если взять в качестве тензора рассеивания тензор более высокого четного ранга, то коэффициент диффузии будет равен

$$D_{ij} = Q_{ijkl\ldots m}\bar{u}_k\bar{u}_l^\circ \ldots \bar{u}_m^\circ \tag{2.4}$$

и можно показать, что (2.4) в общем случае сводится к выражению (2.1) и в силу изотропии среды и равноправия индексов, по которым производится суммирование, определяется двумя постоянными.

Таким образом, формула (2.1) является для коэффициента диффузии наиболее общей. Физический смысл указанных двух постоянных A и B или H_1 и H_2 будет выяснен на основе имеющихся представлений о механизме перемешивания в пористых средах.

3. В каждой точке порового пространства вектор средней скорости преобразуется случайным образом в локальную скорость. При этом, вообще говоря, меняется как величина модуля, так и направление скорости. Преобразование имеет вид:

$$u_i = T_{ij}\bar{u}_j \tag{3.1}$$

Компоненты тензора T_{ij} — случайные величины, принимающие при каждом испытании (в любой точке порового пространства) различные значения. Будем называть тензор T_{ij} локальным тензором пористой среды. Ниже рассматриваются течения, при которых можно полностью пренебречь инерционными силами, поэтому из анализа размерностей следует, что компоненты T_{ij} не будут зависеть от величины средней скорости.

Кроме того, примем следующую гипотезу: компоненты локального тензора пористой среды не зависят от направления средней скорости.

Из осреднения соотношения (1.1) видно, что T_{ij} является единичным тензором. Дисперсия скорости (в проекции на ось α) будет выражаться через произведения компонент четвертого ранга, характеризующего пористую среду:

$$D(u_\alpha) = \overline{(u_\alpha - \bar{u}_\alpha)^2} = (\overline{T_{\alpha i}T_{\alpha j}} - \bar{T}_{\alpha i}\bar{T}_{\alpha j})\,\bar{u}_i\bar{u}_j = (\overline{T_{\alpha i}T_{\alpha j}} - I_{\alpha i}I_{\alpha j})\,\bar{u}_i\bar{u}_j \tag{3.2}$$

В силу изотропии пористой среды и равноправия индексов i и j все осредненные произведения $\overline{T_{\alpha i}T_{\alpha j}}$ будут иметь вид:

$$\overline{T_{\alpha i}T_{\alpha j}} = C_1 I_{\alpha\alpha}I_{ij} + 2C_2 I_{\alpha i}I_{\alpha j} \tag{3.3}$$

т. е. все произведения, в которых $i \neq j$, равны нулю. Выражение (3.2) упростится: множитель в скобках будет дисперсией компонент $T_{\alpha i}$

$$D(u_\alpha) = (\overline{T_{\alpha i}T_{\alpha i}} - I_{\alpha i})\,\bar{u}_i^2 = D(T_{\alpha i})\,\bar{u}_i^2 \tag{3.4}$$

Теперь, воспользовавшись соотношением (1.1), найдем средний квадрат перемещений, или дисперсию, в подвижной системе координат:

$$\overline{x_\alpha^2} = \int_0^t \int_0^t \overline{v_\alpha(\tau_1)\, v_\alpha(\tau_2)}\, d\tau_1\, d\tau_2 \tag{3.5}$$

Для больших времен дисперсию (3.5) можно преобразовать к следующему виду [7]:

$$\overline{x_\alpha^2} = 2D(u_\alpha)\, L_\alpha t \tag{3.6}$$

где L_α — величина, аналогичная лагранжеву масштабу турбулентности.

Исходя из соображений размерности, положим

$$L_\alpha = L = l / |\bar{u}| \tag{3.7}$$

где l — некоторая «длина перемешивания» пористой среды, — скаляр в силу ее изотропии.

Воспользовавшись соотношением (1.4) и учитывая, что при этом коэффициент диффузии приведен к главным осям, получим

$$D_{11} = D_1 = D(u_1)\, l / |\bar{u}|, \qquad D_{22} = D_2 = D(u_2)\, l / |\bar{u}|$$
$$D_{33} = D_3 = D(u_3)\, l / |\bar{u}| \tag{3.8}$$

т. е. рассматривающие свойства пористой среды характеризуются тензором четвертого ранга, а соотношения (3.8) и (2.4) должны быть эквивалентны. Поэтому имеет место следующее соотношение:

$$H_1 = C_1 l, \qquad H_2 = 0{,}5\,(2C_2 - 1)\, l \tag{3.9}$$

Кроме того, (3.10)

$$B = H_1 |\bar{u}| = D(T_{\alpha i})\, l\, |\bar{u}|, \qquad A = 2H_2 |\bar{u}| = [D(T_{\alpha\alpha}) - D(T_{\alpha i})]\, l\, |\bar{u}|, \qquad \alpha \neq i$$

Итак, коэффициент диффузии, будучи приведен к главной системе координат, имеет вид:

$$D_1 = D(T_{11})\, l\bar{u} = \lambda_1 \bar{u}, \qquad \bar{u} = \bar{u}_1, \qquad \bar{u}_2 = \bar{u}_3 = 0 \tag{3.11}$$
$$D_2 = D(T_{12})\, l\bar{u} = \lambda_2 \bar{u}, \qquad D_3 = D_2$$
$$D_{ij} = 0 \quad \text{при } i \neq j$$

4. Для течений, подчиняющихся закону Дарси, величины T_{ij}, H, l будут определяться лишь строением пористой среды. Аналогичные результаты получаются для течений, подчиняющихся квадратичному закону [8], когда учитываются лишь инерционные силы, хотя численные значения величин в обоих случаях, вообще говоря, будут различны. В случае, если имеют место и вязкостные и инерционные силы, эти величины будут зависеть от числа Рейнольдса, т. е. от скорости. Это подтверждается опытами,— коэффициент диффузии оказывается пропорциональным средней скорости потока в области существования закона Дарси [9] и в области существования квадратичного закона фильтрации (при числе Рейнольдса выше 500) [10], а в промежуточной зоне (число Рейнольдса от 100 до 500) зависимость коэффициента диффузии от скорости становится более сложной [10]. В указанной работе [10] за характерный линейный размер принимался диаметр частиц засыпки.

Если возникает необходимость учета молекулярной диффузии, то в предположении о некоррелированности ее с конвективной диффузией эффективный коэффициент диффузии будет

$$D_\alpha^* = D_\alpha + D_0 \tag{4.1}$$

Коэффициент молекулярной диффузии D_0 обычно оказывается много меньше, чем D_α.

Представление о некоррелированности этих двух процессов оправдано для пористых сред с пересеченным паровым пространством, для которых и выполняются результаты раздела 1.

В ряде статей, посвященных диффузии в фильтрующейся жидкости, например [11], делался вывод о пропорциональности коэффициента диффузии и квадрата скорости фильтрации. В этих работах пористая среда представлялась как система изолированных один от другого капилляров, непрерывно идущих от одной грани среды к другой; Дж. Тейлор [12] показал, что вследствие стационарного параболического распределения скоростей в сечении капилляра и боковой молекулярной диффузии коэффициент диффузии при ламинарном течении в капилляре имеет вид:

$$D^* = (u_0^2 d^2) / (\gamma D_0) \tag{4.2}$$

где D_0 — коэффициент молекулярной диффузии в жидкости, d — диаметр капилляра, u_0 — максимальная в сечении скорость, γ — некоторый числовой параметр. Если применять этот результат к каждому из капилляров системы, то и получается указанный выше вывод. При этом между молекулярной и конвективной диффузией получалась полная корреляция.

Однако в пористых средах с пересеченным поровым пространством частица жидкости, которая в одной из пор двигалась, например, вдоль ее оси и имела потому максимально возможную скорость, в следующей поре, вообще говоря, не будет обладать максимальной скоростью, а приобретает некоторую другую скорость.

Отметим, что из некоторых интуитивных соображений следует, что величина l должна быть близка к половине диаметра зерна несцементированных пористых сред. Для сцементированных пористых сред она близка к средней величине отрезков произвольно проведенной прямой по микрошлифу, заключенных между точками пересечения этой прямой с контурами сечения скелета среды внутри этих контуров. Если бы можно было выделить в среде поровые каналы, то l было бы равно половине длины канала [2]. Однако для более строгого определения l, а затем и дисперсии скоростей по замеренному коэффициенту диффузии необходимо провести дополнительное теоретическое или экспериментальное исследование.

Можно считать, что две пористые среды имеют подобные поровые пространства, если они одинаковым образом сложены из частиц одной формы, но различного размера; для простоты будем считать размеры частиц постоянными в каждой среде, хотя такое понятие распространяется и на случай любого фракционного состава частиц. Эти среды будут различаться лишь линейным масштабом, а потому течения жидкости в них будут полностью подобны в случае постоянства числа Рейнольдса. Поэтому соотношение вязкостей взятых жидкостей должно быть равно обратной величине соотношения диаметров частиц (δ' и δ''). Тогда можно говорить, что дисперсии компонент T_{ij} в таких средах будут равны.

Отсюда при равных средних скоростях течений должно выполняться равенство

$$\frac{D_\alpha'}{D_\alpha''} = \frac{l'}{l''} = \frac{\delta'}{\delta''} \tag{4.3}$$

где штрихами обозначены величины, относящиеся к одной и той же среде.

Экспериментальная проверка равенства (4.3) вполне возможна, например, на шариках разного диаметра, и ее выполнение либо даст подтверждение развитых здесь построений, либо потребует внесения необходимых корректив. Таким образом, подобный эксперимент может подтвердить выполнение соотношений $l = 0.5\,\eta\delta$ с точностью до некоторого постоянного множителя η.

Эта постоянная величина η уже не будет зависеть от значения δ и может быть раз и навсегда определена на основании опыта для среды данного типа, например сцементированного или несцементированного песчаника или известняка и т. д. Для этого нужно измерить фактически существующие локальные скорости, однако эти измерения практически весьма затруднительны.

Движение жидкости лишь в одной поре и в немногих окружающих связано в силу уравнений Навье — Стокса, а движение в поре, удаленной от рассматриваемой, не будет испытывать указанной связи, потому распределение скоростей, нормальных и касательных к произвольному плоскому сечению, будет определяться случайным микростроением пористой среды, и можно высказать гипотезу о нормальном законе распределения всех скоростных характеристик потока. В этом случае знание средней величины скорости и ее дисперсии полностью определяет значение локальных скоростей.

5. Уравнение (1.3) можно записать в неподвижной системе координат:

$$m\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda_1 w\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda_2 w\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\lambda_3 w\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right) - w\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \tag{5.1}$$

где m — пористость, w — скорость фильтрации ($w = m\bar{u}$), ось x_1 направлена вдоль вектора w, $\lambda_2 = \lambda_3$. Уравнение (5.1) справедливо для однородного потока. В общем случае оно имеет вид:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right) - \bar{u}_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i} \tag{5.2}$$

Если в пористой среде имеет место однородный фильтрационный поток и в какой-нибудь точке мы будем добавлять индикатор с расходом Q элементов в единицу времени, то индикатор через некоторое время рассеется, а линии равной концентрации образуют семейство кривых «грушевидной» формы. Форма этих кривых будет характеризовать диффузионные параметры пористой среды.

Для решения задач о неподвижном точечном источнике концентрации в однородном фильтрационном потоке можно воспользоваться аналогичными результатами из турбулентной диффузии [7]. Средняя (неотносительная) концентрация в точке x_1, x_2, x_3 в момент времени t будет равна сумме концентраций, приходящих от источника за время от t_0 до t, где t_0 — начало работы источника:

$$\Phi = \int_{t_0}^{t} Q\psi(x_1, x_2, x_3, t-\alpha)\, d\alpha = \tag{5.3}$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{Q\,(2\pi)^{-3/2}}{(\overline{x_1^2}\,\overline{x_2^2}\,\overline{x_3^2})^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1 - \bar{u}(t-\alpha))^2}{\overline{x_1^2}} + \frac{x_2{}^2}{\overline{x_2^2}} - \frac{x_3{}^2}{\overline{x^2{}_3}}\right]\right\} d\alpha$$

В случае непрерывно действующего источника надо положить $t_0 = -\infty$; получающееся при этом стационарное распределение относительной концентрации приведено в работе [7]. Там же приведено решение задачи о стационарном распределении средней концентрации, порождаемой бесконечным линейным диффузионным источником. Эта задача имеет практическое значение в фильтрации[1] — именно такие условия осуществляются при плоском однородном потоке жидкости в пласте конечной мощности, когда индикатор подается через одну из скважин равномерно вдоль мощности пласта. Замеряя концентрации по крайней мере в двух других скважинах, можно определить поле концентрации, а следовательно, и диффузионные параметры пласта. Предполагается, что через все указанные скважины не поступает в пласт и не отбирается из него сколько-нибудь значительное количество жидкости, чтобы не нарушать условия однородности потока.

Решение имеет вид [7]:

$$\Phi = \frac{Qm}{2\pi w \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \exp\left(-\frac{x_1}{2\lambda_1}\right) K_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_1{}^2}{\lambda^2{}_1} + \frac{x_2{}^2}{\lambda_1\lambda_2}}\right) \tag{5.4}$$

Приведем также решение одномерной линейной задачи о перемешивании прослойки окрашенной жидкости с остальной жидкостью при движении в пористой среде. В этом случае уравнение (5.3) будет иметь следующий вид:

$$m\frac{\partial\psi}{\partial t} = \lambda_1 w \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - w\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t \geqslant 0 \tag{5.5}$$

при начальном условии

$$\psi(x, 0) = f(x) \tag{5.6}$$

Решение просто найти, если свести уравнение (5.5) к обычному урав-

[1] Автор весьма признателен В. М. Шестакову за обсуждение этого вопроса.

нению теплопроводности подстановкой

$$y = x - \frac{s}{m}, \qquad s = \int_0^t w(t)\,dt \tag{5.7}$$

и воспользоваться представлением решения уравнения в виде интеграла Пуассона. Тогда в случае прямоугольной формы начального распределения концентрации ($f(y) = 0$ при $|y| > a$ и $f(y) = 1$ при $|y| \leqslant a$) решение будет иметь следующий вид:

$$\psi(y, s) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{y+a}{2\sqrt{\lambda_1 s/m}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y-a}{2\sqrt{\lambda_1 s/m}}\right)\right] \tag{5.8}$$

Формула (5.8) подтверждается вполне удовлетворительным согласием с результатами опытов [13], причем коэффициент диффузии $D = \lambda_1 w$ был определен по пяти опытным точкам $\psi(0, t)$:

$$D_1 = 2.60\cdot 10^{-2}, \qquad D_2 = 1.70\cdot 10^{-2}, \qquad D_3 = 1.84\cdot 10^{-2},$$
$$D_4 = 1.80\cdot 10^{-2}, \qquad D_5 = 1.65\cdot 10^{-2}\ \textit{см}^2\ \textit{сек}^{-1}$$

Среднее значение коэффициента диффузии $D_{\text{ср}} = 1.92\cdot 10^{-2}$ *см*^{2} *сек*$^{-1}$, среднее значение λ_1 равно 0.107 *см.*

Таким образом, $D_{\text{ср}} \gg D_0 \approx 10^{-4} - 10^{-5}$ *см*^{2} *сек*$^{-1}$, что подтверждает отличный от молекулярного характер перемешивания.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить Г. И. Баренблатта за ценные обсуждения затронутых в статье вопросов.

Поступила 2 IV 1959

Институт механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Девисон Б. Б. Движение грунтовых вод. В сб. «Некоторые новые вопросы механики сплошной среды» под ред. Н. Е. Кочина. Изд-во АН СССР, 1938.
2. Николаевский В. Н. Капиллярная модель диффузии в пористых средах. Изв. АН СССР, ОТН, сер. мех. и маш., вып. 4, 1959.
3. Scheidegger A. E. Statistical hydrodynamics in porous media. J. Appl. Phys., vol. 25, № 8, August, 1954.
4. Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности. Пер. с англ. Изд-во иностр. лит-ры, 1955.
5. Жуковский Н. Е. Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод (1889). Полн. собр. соч., т. 7, М., 1937.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. ГТТИ, 1958.
7. Френкель Ф. Н. Турбулентная диффузия; распределение средней концентрации в поле однородного турбулентного потока. Сб. «Проблемы механики». Пер. с англ Изд-во иностр. лит-ры, 1955.
8. Краснопольский А. А. Грунтовые и артезианские колодцы. Горн. журн., вып. 3—7 (март — июль), 1912.
9. Aronofsky J. S., Heller J. P. A diffusion model to explain mixing of flowing fluids in porous media. J. Petrol. Technol., December, 1957.
10. Баум В. А. Исследование процесса перемешивания в потоке жидкости, протекающей в трубах, заполненных кусковым материалом. Изв. АН СССР, ОТН, вып. 9, 1953.
11. Rosenberg von, D. V. Mechanics of steady-state single-phase fluid displacement from porous media. AIChE Journ., vol. 2, No. 1, March, 1956.
12. Taylor G. Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube. Proc. Roy. Soc. A, vol. 219, 1953.
13. Koch H. A., Slobod R. L. Miscible slug process. J. Petrol. Technol., February, 1957.