Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

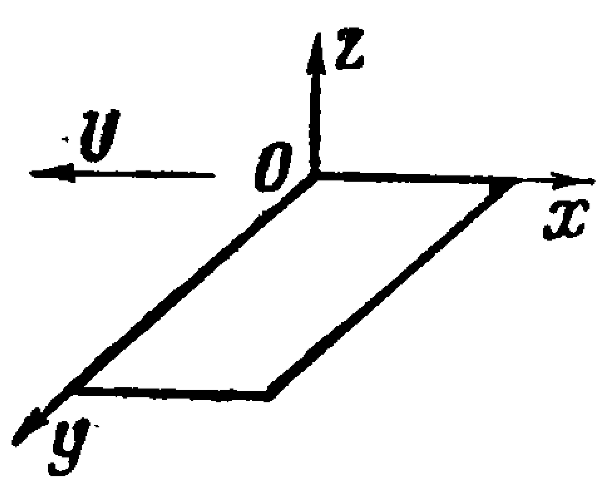
О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ КРЫЛА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ

В. А. Ковалева

(Днепропетровск)

Приводятся некоторые результаты исследования неустановившегося движения тонкого жесткого крыла конечного размаха прямоугольной формы в плане в сверхзвуковом потоке, произвольным образом изменяющегося во времени, в том числе неустановившегося движения, обусловленного порывом ветра или ударной волной. Задача рассматривается в линейной постановке. В первой части работы находится решение задачи для случая изменения угла атаки крыла во времени по закону $e^{\alpha t}$ $(-\infty \leqslant t \leqslant 0)$, во второй — полученное частное решение используется для рассмотрения случая, когда угол атаки крыла изменяется во времени произвольным образом. Задачи такого рода рассматривались Е. А. Красильщиковой [1]. В данной работе получено в явном виде решение для крыла прямоугольной формы в плане с учетом краевого эффекта.

§ 1. Рассмотрим прямолинейное поступательное движение тонкого плоского жесткого крыла конечного размаха прямоугольной формы в плане, которое происходит внутри безграничного объема жидкости, покоящейся на бесконечности. На основное движение с постоянной скоростью U, большей скорости звука, налагаются добавочные малые неустановившиеся движения.



Возмущенное движение сжимаемой жидкости будем изучать в подвижной системе координат $Oxyz$, неизменно связанной с крылом и перемещающейся поступательно со скоростью U. Ось x направлена в сторону, противоположную движению, ось y — вдоль размаха крыла, ось z — вверх (см. фигуру).

Будем предполагать, что неустановившееся движение крыла вызывает в потоке малые возмущения и что возмущенное движение газа является потенциальным. Тогда, как известно, потенциал скоростей возмущений $\varphi(x, y, z, t)$ удовлетворяет линеаризированному дифференциальному уравнению, которое в подвижной системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2U\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t} + U^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) \qquad (1.1)$$

где $a = \sqrt{dp/d\rho}$ — скорость звука в невозмущенной среде.

Среда возмущена в части пространства, ограниченной огибающей конусов Маха с вершинами на контуре крыла. Вне этой области потенциал скоростей и его производные равны нулю:

$$\varphi = 0 \qquad (1.2)$$

На поверхности крыла L выполняется условие обтекания

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = f(t) \quad \text{при } z = 0 \tag{1.3}$$

где $f(t)$ — произвольная функция своего аргумента, заданная на полубесконечном интервале $(-\infty, 0)$, с конечным числом точек разрыва первого рода, достаточно гладкая на $-\infty$.

Всюду в плоскости xy, где среда возмущена, но вне плоскости крыла и вихревой пелены

$$\varphi = 0 \tag{1.4}$$

Потенциал φ относительно координаты z — нечетная функция $\varphi(x, y, -z, t) = -\varphi(x, y, z, t)$; поэтому решение задачи можно рассматривать только в верхнем полупространстве.

Таким образом, несбходимо определить функцию $\varphi(x, y, z, t)$, которая удовлетворяет уравнению (1.1), условиям (1.2), (1.3), (1.4) и равна нулю в бесконечности вместе со своими производными.

Давление, действующее на крыло, определяется по формуле

$$p(x, y, 0, t) = p^+ - p^- = 2\rho_\infty \left[\frac{\partial\varphi(x, y, 0, t)}{\partial t} + U\frac{\partial\varphi(x, y, 0, t)}{\partial x}\right] \tag{1.5}$$

§ 2. Найдем частное решение уравнения (1.1) для случая, когда нормальная составляющая скорости на крыле изменяется во времени по закону

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]_{z=0} = e^{\alpha t} \qquad (-\infty \leqslant t \leqslant 0,\ \alpha > 0) \tag{2.1}$$

Обозначив через $M = U/a$ число Маха основного потока, перепишем уравнение (1.1) следующим образом:

$$-(M^2-1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - 2\frac{M}{a}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t} = 0 \tag{2.2}$$

Будем искать потенциал скоростей возмущений $\varphi(x, y, z, t)$ как решение уравнения (2.2) при граничном условии (2.1) в виде

$$\varphi(x, y, z, t) = e^{\alpha t + \beta x}\psi(x, y, z) \tag{2.3}$$

Для функции $\psi(x, y, z)$ получим уравнение

$$\begin{gathered}-(M^2-1)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \left[-2(M^2-1)\beta - 2M\frac{\alpha}{a}\right]\frac{\partial\psi}{\partial x} + \\ + \left[-(M^2-1)\beta^2 - 2M\frac{\alpha}{a}\beta - \frac{\alpha^2}{a^2}\right]\psi = 0\end{gathered} \tag{2.4}$$

Используя произвольность β, потребуем

$$-2(M^2-1)\beta - 2M\frac{\alpha}{a} = 0, \quad \text{или } \beta = -\frac{M}{M^2-1}\frac{\alpha}{a} \tag{2.5}$$

Уравнение (2.4) преобразуется к следующему:

$$\frac{1}{M^2-1}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \lambda^2\psi = 0 \qquad \left(\lambda^2 = \frac{\alpha^2}{a^2}\frac{1}{(M^2-1)^2}\right) \tag{2.6}$$

Сделаем обычную замену переменных:

$$x_1 = \lambda x, \qquad y_1 = \lambda y\sqrt{M^2-1}, \qquad z_1 = \lambda z\sqrt{M^2-1} \tag{2.7}$$

Уравнение (2.6) в новых переменных примет вид:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \psi = 0 \tag{2.8}$$

На основании (1.2), (1.3) и (1.4) получаем условия для $\psi(x_1, y_1, z_1)$:

в невозмущенной области функция ψ и ее производные равны нулю:

$$\psi = 0 \tag{2.9}$$

на поверхности крыла L_1

$$\frac{\partial\psi}{\partial z_1} = \frac{1}{\lambda\sqrt{M^2-1}}\, e^{-\nu x_1} \quad \text{при } z_1 = 0 \qquad \left(\nu = \frac{\beta}{\lambda}\right) \tag{2.10}$$

в плоскости $z_1 = 0$ вне плоскости крыла L_1 и вихревой пелены

$$\psi = 0 \tag{2.11}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть функция $\psi^*(x_1, y_1, z_1)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\psi^*}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\psi^*}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2\psi^*}{\partial x_1^2} = 0 \tag{2.12}$$

и условиям

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial z_1} = f_1(x_1) \quad \text{на } L_1 \text{ при } z_1 = 0 \tag{2.13}$$

аналогичным (2.9) и (2.11) вне L_1.

При рассмотрении этой вспомогательной задачи будем исходить из выражения для функции $\psi_0^*(x_1, y_1, z_1)$, удовлетворяющей, как и функция $\psi^*(x_1, y_1, z_1)$, дифференциальному уравнению (2.12) и условиям, аналогичным (2.9) и (2.11) вне L_1, но условие (2.13) на L_1 при $z_1 = 0$ будет

$$\frac{\partial\psi_0^*}{\partial z_1} = 1 \tag{2.14}$$

Выражение для функции $\psi_0^*(x_1, y_1, z_1)$ было дано Буземаном [2]. Значение ее производной по x_1 при $z_1 = 0$

$$\left[\frac{\partial\psi_0^*(x_1, y_1, z_1)}{\partial x_1}\right]_{z_1=0} = \begin{cases} -\pi^{-1}\arccos(1 - 2y_1/x_1) & \text{для } x_1 > y_1 \\ -1 & \text{для } x_1 < y_1 \end{cases} \tag{2.15}$$

Между функциями $\psi_0^*(x_1, y_1, z_1)$ и $\psi^*(x_1, y_1, z_1)$ установлено соотношение [3]

$$\psi^*(x_1, y_1, z_1) = \int_{A_1}^{A} \left[\frac{\partial\psi^*[(x_1-\xi_1), y_1, z_1]}{\partial z_1}\right]_{z_1=0} \frac{\partial\psi_0^*(\xi_1, y_1, z_1)}{\partial\xi_1}\, d\xi_1 =$$

$$= \int_{A_1}^{A} f_1(x_1-\xi_1)\, \frac{\partial\psi_0^*(\xi_1, y_1, z_1)}{\partial\xi_1}\, d\xi_1$$

для любой точки $A(x_1, y_1, z_1)$ возмущенного пространства; здесь точка $A_1(x_1^*, y_1, z_1)$ лежит на огибающей конусов Маха.

Для точек на крыле

$$\psi^*(x_1, y_1, 0) = \int_0^{x_1} \left[\frac{\partial\psi^*[(x_1-\xi_1), y_1, z_1]}{\partial z_1}\right]_{z_1=0} \left[\frac{\partial\psi_0^*(\xi_1, y_1, z_1)}{\partial\xi_1}\right]_{z_1=0} d\xi_1 =$$

$$= \int_0^{x_1} f_1(x_1-\xi_1) \left[\frac{\partial\psi_0^*(\xi_1, y_1, z_1)}{\partial\xi_1}\right]_{z_1=0} d\xi_1 \tag{2.16}$$

Выражение (2.16) для $\psi^*(x_1, y_1, z_1)$ позволяет найти связь между функциями $\psi^*(x_1, y_1, z_1)$ и $\psi(x_1, y_1, z_1)$ в плоскости $z_1 = 0$. Воспользуемся методами операционного исчисления. Пусть

$$F(p, y_1, z_1) = p \int_0^\infty e^{-px_1} \psi(x_1, y_1, z_1)\, dx_1$$

$$F^*(p, y_1, z_1) = p \int_0^\infty e^{-px_1} \psi^*(x_1, y_1, z_1)\, dx_1 \tag{2.17}$$

есть изображения функций $\psi(x_1, y_1, z_1)$ и $\psi^*(x_1, y_1, z_1)$.

Функции $F(p, y_1, z_1)$ и $F^*(p, y_1, z_1)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям в частных производных

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} - (p^2 - 1) F = 0, \qquad \frac{\partial^2 F^*}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial z_1^2} - p^2 F^* = 0 \tag{2.18}$$

Очевидно, что между функциями $F(p, y_1, z_1)$ и $F^*(p, y_1, z_1)$ можно установить соотношения (2.19)

$$F(y_1, z_1, p) = F^*(y_1, z_1, \sqrt{p^2 - 1}), \qquad F(y_1, 0, p) = F^*(y_1, 0, \sqrt{p^2 - 1})$$

Используем выражение (2.16) для функции $\psi^*(x_1, y_1, 0)$:

$$\psi^*(x_1, y_1, 0) = \int_0^{x_1} \left[\frac{\partial\psi^*[(x_1 - \xi_1), y_1, z_1]}{\partial z_1}\right]_{z_1=0} \left[\frac{\partial\psi_0^*(\xi_1, y_1, z_1)}{\partial \xi_1}\right]_{z_1=0} d\xi_1$$

Обозначим

$$T(p, y_1, 0) = p \int_0^\infty e^{-px_1} \left[\frac{\partial\psi_0^*(x_1, y_1, z_1)}{\partial x_1}\right]_{z_1=0} dx_1$$

$$\left[\frac{\partial F^*(p, y_1, z_1)}{\partial z_1}\right]_{z_1=0} = p \int_0^\infty e^{-px_1} \left[\frac{\partial\psi^*(x_1, y_1, z_1)}{\partial z_1}\right]_{z_1=0} dx_1 \tag{2.20}$$

По теореме свертывания для $F^*(y_1, 0, p)$ будем иметь

$$F^*(y_1, 0, p) = \frac{1}{p}\left[\frac{\partial F^*(y_1, z_1, p)}{\partial z_1}\right]_{z_1=0} T(y_1, 0, p)$$

Воспользовавшись (2.19), можно получить выражение для $F(y_1, 0, p)$, так что

$$F(y_1, 0, p) = F^*(y_1, 0, \sqrt{p^2 - 1}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p^2 - 1}} \left[\frac{\partial F^*(y_1, z_1, \sqrt{p^2 - 1})}{\partial z_1}\right]_{z_1=0} T(y_1, 0, \sqrt{p^2 - 1})$$

Из (2.19)

$$\left[\frac{\partial F^*(y_1, z_1, \sqrt{p^2 - 1})}{\partial z_1}\right]_{z_1=0} = \left[\frac{\partial F(y_1, z_1, p)}{\partial z_1}\right]_{z_1=0}$$

Поэтому

$$F(p, y_1, 0) = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 1}} \left[\frac{\partial F(y_1, z_1, p)}{\partial z_1}\right]_{z_1=0} T(y_1, 0, \sqrt{p^2 - 1})$$

Так как на основании (2.10)

$$\left[\frac{\partial F(y_1, z_1, p)}{\partial z_1}\right]_{z_1=0} = \frac{1}{\lambda\sqrt{M^2 - 1}} \frac{p}{p + \nu}$$

то окончательно выражение для изображения искомой функции $\psi(x_1, y_1, 0)$ имеет следующий вид:

$$F(p, y_1, 0) = \frac{1}{\lambda\sqrt{M^2-1}}\frac{1}{p}\frac{p}{p+\nu}\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}T(\sqrt{p^2-1}, y_1, 0) \tag{2.21}$$

Функцию $\psi(x_1, y_1, 0)$ можно построить, исходя из соотношения [4]

$$\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}\Phi(\sqrt{p^2-1}) \div f(t) + \int_0^t f(\sqrt{t^2-\tau^2})\, I_1(\tau)\, d\tau \tag{2.22}$$

Здесь $I_1(\tau)$ — функция Бесселя мнимого аргумента первого порядка.

Используя теорему свертывания и приведенное выше соотношение (2.22), для функции $\psi(x_1, y_1, 0)$ получим

$$\psi(x_1, y_1, 0) = \frac{1}{\lambda\sqrt{M^2-1}}\int_0^{x_1} e^{-\nu(x_1-\xi_1)}\left\{\left[\frac{\partial\psi_0^*(\xi_1, y_1, z_1)}{\partial\xi_1}\right]_{z_1=0} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\xi_1}\left[\frac{\partial\psi_0^*(\sqrt{\xi_1^2-\xi_2^2}, y_1, z_1)}{\partial\xi_2}\right]_{z_1=0} I_1(\xi_2)\, d\xi_2\right\} d\xi_1 \tag{2.23}$$

Введя новую переменную $\sigma_1 = \sqrt{\xi_1^2-\xi_2^2}$ и применяя известное соотношение $dI_0(z)/dz = I_1(z)$ к функции $I_1(\sqrt{\xi_1^2-\sigma_1^2})$, представим внутреннюю квадратуру в (2.23) в виде

$$-\int_0^{\xi_1}\left[\frac{\partial\psi_0^*(\sigma_1, y_1, z_1)}{\partial\sigma_1}\right]_{z_1=0}\frac{d}{d\sigma_1}\left[I_0(\sqrt{\xi_1^2-\sigma_1^2})\right] d\sigma_1$$

Тогда для функции $\psi(x_1, y_1, 0)$ получим

$$\psi(x_1, y_1, 0) = \frac{1}{\lambda\sqrt{M^2-1}}\int_0^{x_1} e^{-\nu(x_1-\xi_1)}\left\{\left[\frac{\partial\psi_0^*(\xi_1, y_1, z_1)}{\partial\xi_1}\right]_{z_1=0} - \right.$$

$$\left. -\int_0^{\xi_1}\left[\frac{\partial\psi_0^*(\sigma_1, y_1, z_1)}{\partial\sigma_1}\right]_{z_1=0}\frac{d}{d\sigma_1}\left[I_0(\sqrt{\xi_1^2-\sigma_1^2})\right] d\sigma_1\right\} d\xi_1\,. \tag{2.24}$$

Здесь

$$\left[\frac{\partial\psi_0^*(\xi_1, y_1, z_1)}{\partial\xi_1}\right]_{z_1=0} = \begin{cases} -\pi^{-1}\arccos(1-2y_1/\xi_1) & \text{для } \xi_1 > y_1 \\ -1 & \text{для } \xi_1 < y_1 \end{cases} \tag{2.25}$$

В переменных x, y, z

$$\psi(x, y, 0) = \frac{1}{\lambda\sqrt{M^2-1}}\int_0^x e^{-\beta(x-\xi)}\left\{\left[\frac{\partial\psi_0^*(\lambda\xi, \lambda\sqrt{M^2-1}y, \lambda\sqrt{M^2-1}z)}{\partial\xi}\right]_{z=0} - \right.$$

$$\left. -\int_0^{\xi}\left[\frac{\partial\psi_0^*(\lambda\sigma, \lambda\sqrt{M^2-1}y, \lambda\sqrt{M^2-1}z)}{\partial\sigma}\right]_{z=0}\frac{d}{d\sigma}\left[I_0(\lambda\sqrt{\xi^2-\sigma^2})\right] d\sigma\right\} d\xi \tag{2.26}$$

Здесь

$$\left[\frac{\partial\psi_0^*(\lambda\xi, \lambda\sqrt{M^2-1}y, \lambda\sqrt{M^2-1}z)}{\partial\xi}\right]_{z=0} =$$

$$= \begin{cases} -\lambda\pi^{-1}\arccos(1-2(y/\xi))\sqrt{M^2-1}, & \text{для } \xi > \sqrt{M^2-1}y \\ -\lambda & \text{для } \xi < \sqrt{M^2-1}y \end{cases} \tag{2.27}$$

Наконец, потенциал скоростей возмущений φ для точек на поверхности крыла на основании (2.3) можно представить так: (2.28)

$$\varphi(x, y, 0, t) = \frac{e^{\alpha t}}{\lambda\sqrt{M^2-1}} \int_0^x e^{+\beta\xi} \left\{ \left[\frac{\partial\psi_0^*(\lambda\xi, \lambda\sqrt{M^2-1}\,y, \lambda\sqrt{M^2-1}\,z)}{\partial\xi} \right]_{z=0} - \right.$$

$$\left. - \int_0^\xi \left[\frac{\partial\psi_0^*(\lambda\sigma, \lambda\sqrt{M^2-1}\,y, \lambda\sqrt{M^2-1}\,z)}{\partial\sigma} \right]_{z=0} \frac{d}{d\sigma}[I_0(\lambda\sqrt{\xi^2-\sigma^2})]\,d\sigma \right\} d\xi$$

Здесь частные производные в квадратных скобках даются выражением (2.27).

Давление, действующее на крыло, согласно (1.5) и (2.7) будет (2.29)

$$p(x_1, y_1, 0, t) = p^+ - p^- = 2\rho_\infty U\lambda e^{\alpha t + \nu x_1}\left[\left(\nu + \frac{\alpha}{U\lambda}\right)\psi(x_1, y_1, 0) + \frac{\partial\psi(x_1, y_1, 0)}{dx_1}\right]$$

На основании (2.29) может быть получено выражение для подъемной силы крыла P. Пусть l — размер крыла в направлении оси y и h — размер в направлении оси x. Тогда

$$P = \int_0^l \int_0^h p(x, y, 0, t)\,dx\,dy = \frac{1}{\lambda^2\mu}\int_0^{\lambda\mu l}\int_0^{\lambda h} p(x_1, y_1, 0, t)\,dx_1 dy_1 =$$

$$= \frac{2\rho_\infty U}{\lambda\mu} e^{\alpha t} \int_0^{\lambda\mu l}\int_0^{\lambda h} \left[e^{\nu x_1}\left(\nu + \frac{\alpha}{U\lambda}\right)\psi(x_1, y_1, 0) + e^{\nu x_1}\frac{\partial\psi(x_1, y_1, 0)}{\partial x_1}\right] dx_1 dy_1$$

$$(\mu = \sqrt{M^2-1})$$

После несложных преобразований получим

$$P = \frac{2\rho_\infty\alpha}{\lambda^2\mu} e^{\alpha t} \int_0^{\lambda\mu l}\int_0^{\lambda h} e^{\nu x_1}\psi(x_1, y_1, 0)\,dx_1 dy_1 +$$

$$+ \frac{2\rho_\infty U}{\lambda\mu} e^{\alpha t} \int_0^{\lambda\mu l}\int_0^{\lambda h} \frac{\partial}{\partial x_1}[e^{\nu x_1}\psi(x_1, y_1, 0)]\,dx_1 dy_1$$

или, подставляя выражение (2.24):

$$P = \frac{2\rho_\infty\alpha}{\lambda^3\mu^2} e^{\alpha t} \int_0^{\lambda h}\int_0^{x_1} e^{\nu\xi_1}\int_0^{\lambda\mu l}\left\{\left[\frac{\partial\psi_0^*(\xi_1, y_1, z_1)}{\partial\xi_1}\right]_{z_1=0} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\xi_1}\left[\frac{\partial\psi_0^*(\sigma_1, y_1, z_1)}{\partial\sigma_1}\right]_{z_1=0}\frac{d}{d\sigma_1}[I_0(\sqrt{\xi_1^2-\sigma_1^2})]\,d\sigma_1\right\} dy_1 d\xi_1 dx_1 +$$

$$+ \frac{2\rho_\infty U}{\lambda^2\mu^2} e^{\alpha t} \int_0^{\lambda h}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{x_1} e^{\nu\xi_1}\int_0^{\lambda\mu l}\left\{\left[\frac{\partial\psi_0^*(\xi_1, y_1, z_1)}{\partial\xi_1}\right]_{z_1=0} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\xi_1}\left[\frac{\partial\psi_0^*(\sigma_1, y_1, z_1)}{\partial\sigma_1}\right]_{z_1=0}\frac{d}{d\sigma_1}[I_0(\sqrt{\xi_1^2-\sigma_1^2})]\,d\sigma_1\right\} dy_1 d\xi_1 dx_1 \qquad (2.30)$$

Вычислим внутреннюю квадратуру:

$$K_1 = \int_0^{\lambda\mu l} \left\{ \left[\frac{\partial\psi_0^*(\xi_1, y_1, z_1)}{\partial\xi_1}\right]_{z_1=0} - \int_0^{\xi_1} \left[\frac{\partial\psi_0^*(\sigma_1, y_1, z_1)}{\partial\sigma_1}\right]_{z_1=0} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{d}{d\sigma_1}[I_0(\sqrt{\xi_1^2-\sigma_1^2})]d\sigma_1 \right\} dy_1 = \int_0^{\lambda\mu l} \left[\frac{\partial\psi_0^*(\xi_1, y_1, z_1)}{\partial\xi_1}\right]_{z_1=0} dy_1 -$$

$$-\int_0^{\xi_1} \left\{ \frac{d}{d\sigma_1}[I_0(\sqrt{\xi_1^2-\sigma_1^2})] \int_0^{\lambda\mu l} \left[\frac{\partial\psi_0^*(\sigma_1, y_1, z_1)}{\partial\sigma_1}\right]_{z_1=0} dy_1 \right\} d\sigma_1$$

На основании (2.25) легко получить

$$\int_0^{\lambda\mu l} \left[\frac{\partial\psi_0^*(\xi_1, y_1, z_1)}{\partial\xi_1}\right]_{z_1=0} dy_1 = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\xi_1} \arccos\left(1-2\frac{y_1}{\xi_1}\right) dy_1 -$$

$$- \int_{\xi_1}^{\lambda\mu l-\xi_1} dy_1 = -\lambda\mu l + \xi_1$$

Тогда

$$K_1 = -\lambda\mu l + \xi_1 + \lambda\mu l \int_0^{\xi_1} \frac{d}{d\sigma_1}[I_0(\sqrt{\xi_1^2-\sigma_1^2})]\, d\sigma_1 -$$

$$-\int_0^{\xi_1} \sigma_1 \frac{d}{d\sigma_1}[I_0(\sqrt{\xi_1^2-\sigma_1^2})]\, d\sigma_1 = -\lambda\mu l I_0(\xi_1) +$$

$$+\int_0^{\xi_1} I_0(\sqrt{\xi_1^2-\sigma_1^2})\, d\sigma_1 = -\lambda\mu l I_0(\xi_1) + \operatorname{sh}\xi_1$$

Подставляя результат вычисления K_1 в (2.30) и переходя к переменным (x, y, z, t), получим выражение для подъемной силы (по абсолютной величине)

$$P = \frac{2\rho_\infty(U+\alpha h)\, l}{\sqrt{M^2-1}} e^{\alpha t} \int_0^h e^{\beta x} I_0(\lambda x)\, dx - \frac{2\rho_\infty \alpha l}{\sqrt{M^2-1}} e^{\alpha t} \int_0^h x e^{\beta x} I_0(\lambda x)\, dx -$$

$$-2\rho_\infty a(U+\alpha h)\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\int_0^h e^{\beta x}\operatorname{sh}\lambda x dx + 2\rho_\infty a e^{\alpha t}\int_0^h x e^{\beta x}\operatorname{sh}\lambda x dx \qquad (2.31)$$

§ 3. В случае крыла бесконечного размаха, угол атаки которого изменяется во времени по экспоненциальному закону, для нахождения потенциала скоростей возмущений $\varphi(x, z, t)$ необходимо, очевидно, определить функцию $\psi(x_1, z_1)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \psi = 0 \qquad (3.1)$$

и следующим условиям. На профиле $[0, h_1]$

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial z_1}\right]_{z_1=0} = \frac{1}{\lambda\sqrt{M^2-1}} e^{-\nu x_1} \qquad (3.2)$$

В области, где среда не возмущена, т. е. вверх по потоку от передней кромки $x_1 = 0$, функция ψ и ее производные равны нулю

$$\psi = 0 \qquad (3.3)$$

Уравнение (3.1) представляет известное в математической физике телеграфное уравнение, легко решаемое посредством функции Римана. Для цельности изложения воспользуемся при решении (3.1) методами операционного исчисления. Пусть

$$F(p, z_1) = p \int_0^\infty e^{-px_1} \psi(x_1, z_1)\, dx_1 \tag{3.4}$$

есть изображение $\psi(x_1, z_1)$, тогда функция $F(p, z_1)$ может быть определена из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2F}{dz_1^2} - (p^2 - 1)F = 0 \tag{3.5}$$

общее решение которого имеет вид

$$F(p, z_1) = Ae^{-\sqrt{p^2-1}z_1} + Be^{\sqrt{p^2-1}\,z_1} \tag{3.6}$$

Здесь A и B — постоянные, зависящие от параметра p.

Используя условия (3.2) и (3.3), находим

$$A = -\frac{1}{\lambda\sqrt{M^2-1}} \frac{p}{p+\nu} \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}, \qquad B = 0 \tag{3.7}$$

Таким образом, для функции $F(p, z_1)$ получаем выражение

$$F(p, z_1) = -\frac{1}{\lambda\sqrt{M^2-1}} \frac{p}{p+\nu} \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} e^{-\sqrt{p^2-1}z_1} \tag{3.8}$$

Известно [4] следующее соотношение: (3.9)

$$\frac{p}{\sqrt{(p+a)(p+b)}} e^{-\tau\sqrt{(p+a)(p+b)}} \doteq \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau \\ \exp\left(-\dfrac{a+b}{2}t\right) I_0\left(\dfrac{a-b}{2}\sqrt{t^2-\tau^2}\right) & \text{при } t > \tau \end{cases}$$

По теореме свертывания, используя приведенное выше соотношение (3.9), определяем функцию $\psi(x_1, z_1)$ для точек профиля, т. е. при $z_1 = 0$

$$\psi(x_1, 0_1) = -\frac{1}{\lambda\sqrt{M^2-1}} \int_0^{x_1} e^{-\nu(x_1-\xi_1)} I_0(\xi_1)\, d\xi_1$$

Возвращаясь к переменным x, z, на основании (2.3) для потенциала скоростей точек крыла получаем следующее выражение:

$$\varphi(x, 0, t) = -\frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{M^2-1}} \int_0^x e^{\beta\xi} I_0(\lambda\xi)\, d\xi \tag{3.10}$$

Нетрудно видеть, что точно такое же выражение можно получить из выражения (2.28) для потенциала скоростей возмущений крыла конечного размаха, полагая

$$\left[\frac{\partial\psi_0^*(\lambda\xi,\ \lambda\sqrt{M^2-1}\,y,\ \lambda\sqrt{M^2-1}\,z)}{\partial\xi}\right]_{z=0} = -\lambda$$

Давление для точек на крыле бесконечного размаха в случае изменения угла атаки во времени по экспоненциальному закону

$$p(x, 0, t) = p^+ - p^- = 2\rho_\infty \left[\frac{\varphi(x, 0, t)}{\partial t} + U\frac{\partial\varphi(x, 0, t)}{\partial x}\right] =$$

$$= 2\rho_\infty \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{M^2-1}} e^{\alpha t} \int_0^x e^{\beta\xi} I_0(\lambda\xi)\, d\xi - \frac{U}{\sqrt{M^2-1}} e^{\alpha t} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x e^{\beta\xi} I_0(\lambda\xi)\, d\xi\right] \tag{3.11}$$

Подъемная сила профиля с хордой h

$$P = \frac{2\rho_\infty (U + \alpha h)}{\sqrt{M^2 - 1}} e^{\alpha t} \int_0^h e^{\beta x} I_0(\lambda x)\, dx - \frac{2\rho_\infty \alpha}{\sqrt{M^2 - 1}} e^{\alpha t} \int_0^h x e^{\beta x} I_0(\lambda x)\, dx \tag{3.12}$$

что находится в полном соответствии с ранее найденным выражением (2.31) для подъемной силы крыла конечного размаха, откуда (3.12) может быть получено путем предельного перехода при $l \to \infty$.

§ 4. Вернемся к задаче определения потенциала скоростей возмущений $\varphi(x, y, z, t)$ как решения уравнения (1.1) при условиях (1.2) — (1.4), т. е. к случаю, когда нормальная составляющая скорости на поверхности прямоугольного крыла изменяется во времени произвольным образом:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]_{z=0} = f(t) \quad (-\infty \leqslant t \leqslant 0) \tag{4.1}$$

Представляет интерес случай порыва, имеющего следующую форму:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]_{z=0} = f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty \leqslant t \leqslant -t_0 \\ 1 & \text{при } -t_0 \leqslant t \leqslant 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Для определения потенциала скоростей возмущений $\varphi(x, y, z, t)$ воспользуемся полученным решением (2.28)

Разложим функцию $f(t)$ в ряд по e^t (в определенных случаях целесообразно вести разложение по $e^{\alpha t}$, где α — некоторый параметр)

$$f(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{r=0}^{N} a_r e^{rt} \qquad (-\infty \leqslant t \leqslant 0) \tag{4.3}$$

и будем искать решение уравнения (1.1) в виде

$$\varphi(x, y, z, t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{r=0}^{N} a_r \varphi_r(x, y, z, t) \tag{4.4}$$

где $\varphi_r(x, y, z, t)$ — частное решение (2.28) уравнения (1.1), полученное выше.

Произведем замену переменной. Пусть $\tau = e^t$. Тогда

$$f(t) = f_1(\tau) = \lim_{N\to\infty} \sum_{r=0}^{N} a_r \tau^r \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant 1) \tag{4.5}$$

Положим затем $\tau = \frac{1}{2}(q + 1)$, или $q = 2\tau - 1$. Очевидно, для функции $f_1(\tau)$ получим

$$f_1(\tau) = g(q) = \lim_{N\to\infty} \sum_{r=0}^{N} a_r' q^r \qquad (-1 \leqslant q \leqslant 1) \tag{4.6}$$

где $g(q)$ — функция, заданная в интервале $[-1, +1]$ и имеющая в нем конечное число точек разрыва первого рода; она удовлетворяет условиям разложения в ряд по полиномам Лежандра [5]. Представим $g(q)$ в виде ряда по нормированным полиномам Лежандра:

$$g(q) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (n + \tfrac{1}{2})^{1/2} B_n P_n(q) \tag{4.7}$$

Здесь

$$P_n(q) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{E(n/2)} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} q^{n-2k} \tag{4.8}$$

ортогональный полином Лежандра n-го порядка; коэффициенты разложения

$$B_n = \int_{-1}^{+1} (n+\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}} P_n(q)\, g(q)\, dq \tag{4.9}$$

Очевидно, что ряд (4.7) для функции $g(q)$ может быть записан так:

$$g(q) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n P_n(q), \qquad P_n(q) = \sum_{k=0}^{n} b_{nk} q^k \tag{4.10}$$

Для определения коэффициентов b_{nk} сделаем некоторые преобразования в известном нам представлении (4.8) полиномов Лежандра. Положим в нем $2k = m$, тогда (4.11)

$$P_n(q) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^m+1}{2} \frac{\Gamma(2n-m+1)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\Gamma\left(n-\frac{m}{2}+1\right)\Gamma(n-m+1)} q^{n-m}$$

Пусть теперь в выражении (4.11) $n - m = k$. Получаем представление полинома Лежандра n-го порядка в виде ряда, расположенного по восходящим степеням q (4.12)

$$P_n(q) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\frac{n-k}{2}} \frac{(-1)^{n-k}+1}{2} \frac{\Gamma(n+k+1)}{F\left(\frac{n-k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n+k}{2}+1\right)\Gamma(k+1)} q^k$$

Сравнивая (4.10) и (4.12), находим

$$b_{nk} = \frac{1}{2^n} (-1)^{\frac{n-k}{2}} \frac{(-1)^{n-k}+1}{2} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n+k}{2}+1\right)\Gamma(k+1)}$$

Таким образом

$$g(q) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n P_n(q) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{k=0}^{n} b_{nk} q^k = \lim_{N\to\infty} \sum_{l=0}^{N} \sum_{k=l}^{N} a_k b_{kl} q^l.$$

Здесь

$$a_k = \left(k+\tfrac{1}{2}\right) \int_{-1}^{+1} P_k(q) g(q) dq$$

$$b_{kl} = \frac{1}{2^k} (-1)^{\frac{k-l}{2}} \frac{(-1)^{k-l}+1}{2} \frac{\Gamma(k+l+1)}{\Gamma\left(\frac{k-l}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k+l}{2}+1\right)\Gamma(l+1)} \tag{4.13}$$

Окончательно функция $g(q)$ может быть выражена так:

$$g(q) = \lim_{N\to\infty} \sum_{l=0}^{N} a_l' q^l \tag{4.14}$$

где

$$a_l' = \sum_{k=l}^{N} \left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^k}\int_{-1}^{+1} P_k(q)\,g(q)\,dq\right](-1)^{\frac{k-l}{2}}\frac{(-1)^{k-l}+1}{2}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(k+l+1)}{\Gamma\left(\frac{k-l}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k+l}{2}+1\right)\Gamma(l+1)} \tag{4.15}$$

Возвратимся к переменной τ. Очевидно, что

$$q^l = (2\tau-1)^l = \sum_{p=0}^{l}\frac{l!}{p!\,(l-p)!}(-1)^{l-p}(2\tau)^p$$

Тогда можно записать

$$g(q) = \lim_{N\to\infty}\sum_{l=0}^{N} a_l' q^l = \lim_{N\to\infty}\sum_{l=0}^{N} a_l' \sum_{p=0}^{l}\frac{(-1)^{l-p}\,l!}{p!\,(l-p)!}(2\tau)^p =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{l=0}^{N} a_l' \sum_{p=0}^{l} a''_{lp}\tau^p = \lim_{N\to\infty}\sum_{r=0}^{N}\sum_{s=r}^{N} a_s' a''_{sr}\tau^r$$

где

$$a''_{sr} = \frac{(-1)^{s-r}s!\,2^r}{r!\,(s-r)!}$$

Поэтому на основании (4.6) (4.16)

$$f_1(\tau) = \lim_{N\to\infty}\sum_{r=0}^{N}\left\{\sum_{s=r}^{N}\left[\sum_{k=s}^{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^k}\int_{-1}^{+1} P_k(q)\,g(q)\,dq\,(-1)^{\frac{k-s}{2}}\frac{(-1)^{k-s}+1}{2}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{\Gamma(k+s+1)}{\Gamma\left(\frac{k-s}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k+s}{2}+1\right)\Gamma(s+1)}\right]\frac{(-1)^{s-r}\Gamma(s+1)}{\Gamma(s-r+1)}\right\}\frac{2^r}{\Gamma(r+1)}\tau^r$$

и, наконец, для $f(t) = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]_{z=0}$ согласно (4.5) получим

$$f(t) = \lim_{N\to\infty}\sum_{r=0}^{N} a_r e^{rt} \tag{4.17}$$

где

$$a_r = \sum_{s=r}^{N}\left[\sum_{k=s}^{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^k}\int_{-1}^{+1} P_k(q)\,g(q)\,dq\,(-1)^{\frac{k-s}{2}}\frac{(-1)^{k-s}+1}{2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\Gamma(k+s+1)}{\Gamma\left(\frac{k-s}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k+s}{2}+1\right)\Gamma(s+1)}\right]\frac{(-1)^{s-r}\Gamma(s+1)2^r}{\Gamma(s-r+1)\,\Gamma(r+1)} \tag{4.18}$$

Потенциал скоростей возмущений $\varphi(x, y, 0, t)$ на основании (4.4)

$$\varphi(x, y, 0, t) = \tag{4.19}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{M^2-1}}\lim_{N\to\infty}\sum_{r=0}^{N} a_r\frac{e^{rt}}{\lambda_1 r}\int_0^x e^{\beta_1 r\xi}\left\{\left[\frac{\partial\psi_0^*(\lambda_1 r\xi,\ \lambda_1 r\sqrt{M^2-1}\,y,\ \lambda_1 r\sqrt{M^2-1}\,z)}{\partial\xi}\right]_{z=0} -\right.$$

$$\left.-\int_0^\xi\left[\frac{\partial\psi_0^*(\lambda_1 r\sigma,\ \lambda_1 r\cdot\sqrt{M^2-1}\,y,\ \lambda_1 r\sqrt{M^2-1}\,r)}{\partial\sigma}\right]_{z=0}\frac{d}{d\sigma}\left[I_0\left(\lambda_1 r\sqrt{\xi^2-\sigma^2}\right]d\sigma\right\}d\xi$$

Здесь

$$\beta_1 = -\frac{M}{a}\frac{1}{M^2-1}, \qquad \lambda_1 = \frac{1}{a}\frac{1}{M^2-1}$$

Подъемная сила крыла конечного размаха l с хордой h

$$P = \frac{2\rho_\infty}{\sqrt{M^2-1}}\lim_{N\to\infty}\sum_{r=0}^{N} a_r\Big[l(U+rh)e^{rt}\int_0^h e^{\beta_1 rx}I_0(\lambda_1 rx)\,dx -$$

$$- lre^{rt}\int_0^h xe^{\beta_1 rx}I_0(\lambda_1 rx)\,dx - \sqrt{M^2-1}\,a(U+rh)\frac{e^{rt}}{r}\int_0^h e^{\beta_1 rx}\operatorname{sh}\lambda_1 rx\,dx +$$

$$+\sqrt{M^2-1}\,ae^{rt}\int_0^h xe^{\beta_1 rx}\operatorname{sh}\lambda_1 rx\,dx\Big] \qquad (4.20)$$

Для профиля (случай крыла бесконечного размаха)

$$\varphi(x,0,t) = -\frac{1}{\sqrt{M^2-1}}\lim_{N\to\infty}\sum_{r=0}^{N} a_r e^{rt}\int_0^x e^{\beta_1 r\xi}I_0(\lambda_1 r\xi)\,d\xi \qquad (4.21)$$

$$P = \frac{2\rho_\infty}{\sqrt{M^2-1}}\lim_{N\to\infty}\sum_{r=0}^{N} a_r\Big[(U+rh)e^{rt}\int_0^h e^{\beta_1 rx}I_0(\lambda_1 rx)\,dx - re^{rt}\int_0^h xe^{\beta_1 rx}I_0(\lambda_1 rx)\,dx\Big] \qquad (4.22)$$

Необходимо заметить, что коэффициенты a_r для некоторых функций при возрастании r будут стремиться к бесконечно большим значениям. Однако любая функция может быть апроксимирована посредством конечного количества полиномов Лежандра с любой степенью точности. Получение аэродинамических характеристик в таких случаях следует рассматривать как некоторый асимптотический процесс.

В случае порыва (4.2) функция $f(t)$ разрывна и, следовательно, коэффициенты $a_r \to \infty$ при $r\to\infty$. В этом случае функцию $f(t)$ можно представить приближенно в виде

$$f(t) = \sum_{r=0}^{N} a_r e^{\alpha rt}$$

При этом удовлетворительная апроксимация получается при $N \approx 15$. На основании (4.19) и (4.20) определяются приближенные значения аэродинамических характеристик.

Поступила 18 VIII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Красильщикова Е. А. Неустановившееся движение крыла конечного размаха в сжимаемой среде. Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 1958.
2. Busemann A. Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung, H. 3, 1943.
3. Галин Л. А. ПММ, т. XI, вып. 4, 1947.
4. Эфрос А. А. и Данилевский А. М. Операционные исчисления и контурные интегралы. ОНТИ ГНТИ Украины, Харьков, 1937.
5. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. ГИИЛ, М., 1948.