

О ТЕЛАХ МИНИМАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

В. Н. Жигулев, Ю. Л. Жилин

(Москва)

Рассматриваются некоторые вариационные задачи для тел, слабо возмущающих сверхзвуковой поток. Оказалось возможным в общем случае отделить задачу по отысканию сопротивления от задачи по отысканию самих тел минимального сопротивления. Для решения первой задачи достаточно выразить интересующие характеристики тела (например, силы, моменты, объем и т. д.) через значения потенциала возмущенной скорости на характеристической поверхности, огибающей тело. В работе в качестве примера получено соотношение, связывающее значение объема тела со значениями потенциала возмущенной скорости на характеристической поверхности, огибающей тело.

Показано, что потенциал возмущенной скорости, соответствующий обтеканию тела минимального сопротивления при произвольных фиксированных входном и выходном сечениях и заданном объеме, на задней характеристической поверхности удовлетворяет уравнению Пуассона со смешанными краевыми условиями. Найдены осесимметрические тела с протоками, обладающие минимальным сопротивлением при фиксированных входном и выходном сечениях и данном объеме.

Рассматривается также задача об оптимальном подборе фюзеляжа, имеющего заданную длину и объем, к данному крылу, и получена оценка снизу для сопротивления системы крыло — фюзеляж.

В работе используется метод, предложенный А. А. Никольским для решения задачи по отысканию контура тела вращения минимального сопротивления, проходящего через две заданные точки. Отметим, что этим методом в работе [1] найдено сопротивление оптимального крыла с прямой задней кромкой, перпендикулярной набегающему потоку, а в работе [2] решена задача по отысканию сопротивления оптимального крыла произвольной формы в плане.

§ 1. О постановке вариационных задач в сверхзвуковом потоке. Пусть ставится следующая задача: найти тело, обладающее минимальным волновым сопротивлением при сверхзвуковых скоростях полета, имеющее некоторые количества K_1, \dots, K_n фиксированными (под количествами K_i разумеем габаритные размеры тела, его объем, подъемную силу, момент, которые оно воспринимает, и т. д.).

Будем решать эту задачу в линеаризированном потоке газа.

Найдем огибающие всех характеристических поверхностей, которые отделяют возмущенную часть потока от невозмущенной в прямом и обратном потоках (прямой поток имеет скорость в невозмущенной части U_∞ обратный — $-U_\infty$). Очевидно, эти огибающие пересекаются по некоторой линии L_S . Пусть объем, заключенный между ними, будет Ω_S и имеет поверхность S .

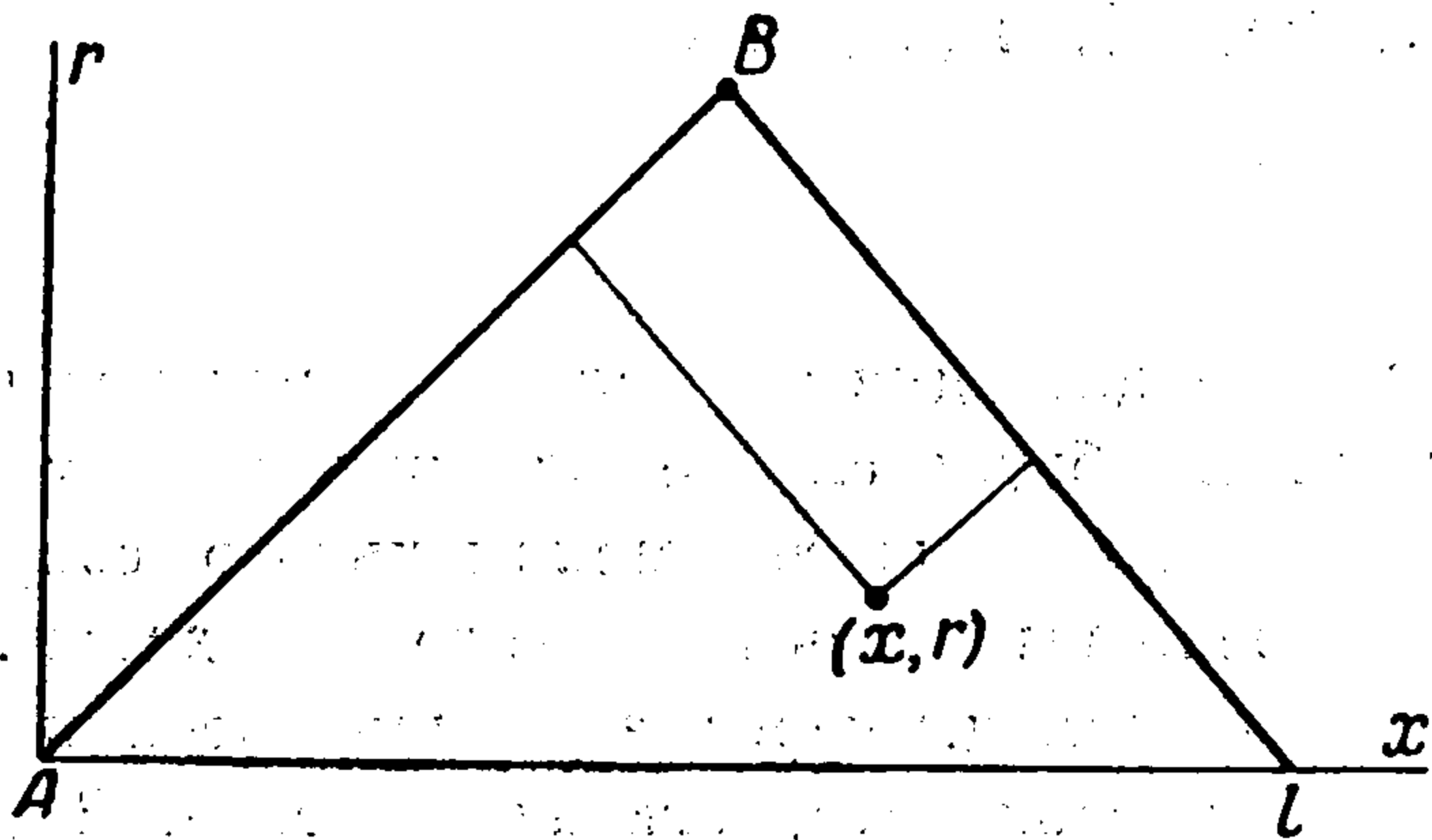
Предположим, что существует решение задачи Гурса для поверхности S (т. е. задачи по отысканию внутри Ω_S потенциала φ , удовлетворяющего волновому уравнению, по заданному на S его значению φ_S). Но тогда

любое количество K_i , связанное с геометрической или силовой характеристикой тела, может быть записано в виде

$$K_i = B_i(\varphi_S) \quad (1.1)$$

где B_i — определенный интегро-дифференциальный оператор.

Следовательно, поставленная выше вариационная задача может быть сформулирована как задача по отысканию потенциала φ_S , соответствующего обтеканию тела минимального сопротивления, при условиях (1.1) ($K_i = \text{const}$). Это обстоятельство является важным во многих случаях, так как позволяет разделить задачу по нахождению сопротивления экстремального тела от задачи нахождения самого тела (связанную с решением задачи Гурса), так как многие из характеристик K_i



Фиг. 1

(например, силы, моменты, объем) могут быть записаны на S непосредственно. При этом получаются простые уравнения для нахождения φ_S и сопротивления экстремального тела. Пример: решение задачи Гурса для случая осевой симметрии (фиг. 1) при $\varphi = 0$ на AB дается формулой

$$\varphi(x, r) = -\frac{2}{\pi V l - x + \beta r} \int_R^\Lambda \varphi'(\eta) K(\eta, x, r) d\eta \quad \left(\Lambda = \frac{l}{2\beta}, R = \frac{l - x + \beta r}{2\beta} \right)$$

$$K(\eta, x, r) = \frac{2\beta r \Pi(1/2\pi, n, k) - (l - x - \beta r) F(1/2\pi, k)}{\sqrt{x + \beta r - l + 2\beta\eta}} \quad (\beta^2 = M^2 - 1) \quad (1.2)$$

$$n = -\frac{x - \beta r - l + 2\beta\eta}{x + \beta r - l + 2\beta\eta}, \quad k = \frac{(x - \beta r - l + 2\beta\eta)(l - x - \beta r)}{(x + \beta r - l + 2\beta\eta)(l - x + \beta r)}$$

Здесь M — число Маха в невозмущенном потоке, $\Pi(1/2\pi, n, k)$ — полный эллиптический интеграл 3-го рода, $F(1/2\pi, k)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода. Таким образом, может быть решена любая вариационная задача в потоке, обладающем осевой симметрией.

§ 2. Основные соотношения. Будем предполагать, что тело имеет цилиндрический проток, образующие которого параллельны U_∞ ; начинается тело плоским контуром L_1 , заканчивается плоским контуром L_2 (фиг. 2)¹. Возьмем элементарный контур на поверхности S около точки (y, z) и проведем через него трубку тока до пересечения с плоскостью $P(x=0)$. Вычислим объем этой трубки тока:

$$d\Omega = \int_L d\sigma dl = dq \int_L \frac{dl}{\rho V} \quad (2.1)$$

Здесь dl — элемент длины трубки тока, $d\sigma$ — площадь ее поперечного сечения, dq — расход газа через взятую трубку тока, ρ — плотность, V — величина полной скорости. Считая далее возмущения, вносимые

¹ Предположение о том, что контуры L_1 и L_2 плоские, необязательно: формулы, полученные в этом параграфе, справедливы и без этих предположений.

телом, малыми величинами, имеющими порядок ϵ , будем иметь

$$\frac{1}{\rho V} = \frac{1}{\rho_\infty U_\infty} \left(1 + \frac{\beta^2}{U_\infty} \frac{d\varphi}{dl} \right) + O(\epsilon^2), \quad dl = dx + O(\epsilon^2) \quad (2.2)$$

$d\varphi/dl$ — производная от потенциала возмущенной скорости вдоль линии тока. Тогда

$$d\Omega = \frac{dq}{\rho_\infty U_\infty} \left[f(y, z) + \frac{\beta^2}{U_\infty} (\varphi_S - \varphi_P) \right] \quad (2.3)$$

Здесь $x = f(y, z)$ — уравнение поверхности S ,

$$\varphi_S(y, z) = \varphi(x, y, z) \quad \text{при } x = f(x, z) \quad (2.4)$$

Нетрудно видеть, что

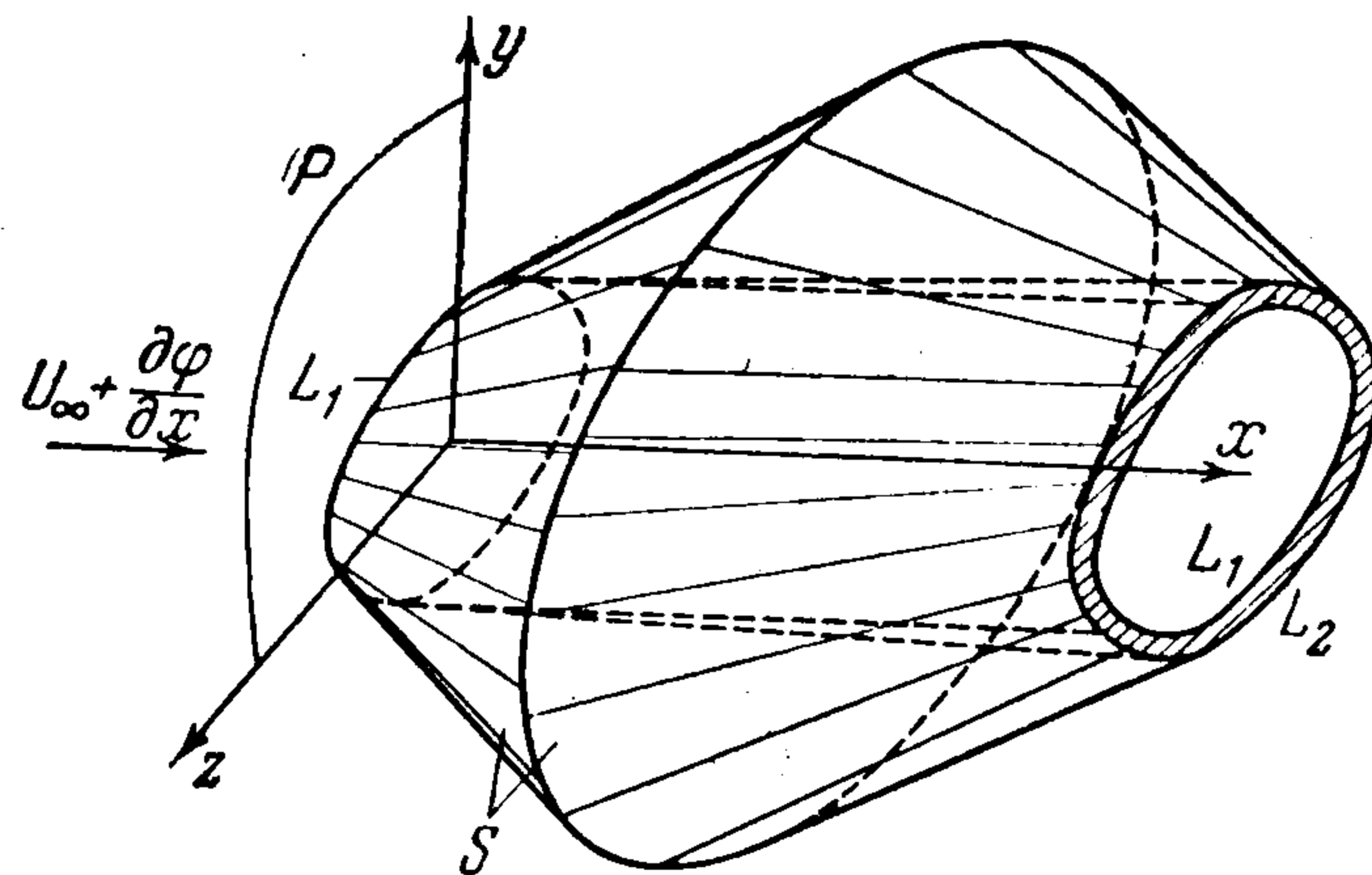
$$dq = \rho_\infty U_\infty dS \cos(nx) - \rho_\infty \left(\frac{\partial \varphi_S}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_S}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} \right) dS \cos(nx) \quad (2.5)$$

n — внешняя нормаль к S . Интегрируя (2.3), (2.4) по всей характеристической поверхности S , получим

$$U_\infty \Omega_0 = \frac{1}{2} \iint_S \left(\frac{\partial \varphi_S}{\partial y} \frac{\partial f^2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_S}{\partial z} \frac{\partial f^2}{\partial z} \right) dS \cos(nx) - \beta^2 \iint_S \varphi_S dS \cos(nx) \quad (2.6)$$

$$\Omega_0 = \Omega_L + \Omega_{L1} - \Omega_{L2}$$

Здесь через Ω_L обозначен объем, заключенный между поверхностью тела и плоскостями $x = \text{const}$, проходящими через контуры $L_1(P_{L1})$ и $L_2(P_{L2})$, через Ω_{L1} — объем между цилиндрической поверхностью, проходящей через контур L_1 , с образующей $\parallel U_\infty$ и плоскостями P и P_{L1} , через Ω_{L2} — объем, заключенный между цилиндрической поверхностью, проходящей через контур L_2 , с образующей $\parallel U_\infty$ и плоскостями P и P_{L2} .



Фиг. 2

Применяя закон количества движения, получим для силы R , действующей на тело:

$$R = Xi + Yj + Zk = - \iint_S [\rho (V \cdot n) V + pn] dS \quad (2.7)$$

(p — давление) или, линеаризируя,

$$R = i \frac{\rho_\infty}{2} \iint_S \left[\left(\frac{\partial \varphi_S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_S}{\partial z} \right)^2 \right] dS \cos(nx) - \\ - j \rho_\infty U_\infty \iint_S \frac{\partial \varphi_S}{\partial y} dS \cos(nx) - k \rho_\infty U_\infty \iint_S \frac{\partial \varphi_S}{\partial z} dS \cos(nx) \quad (2.8)$$

Применяя уравнение неразрывности к поверхности S , получим

$$\iint_S dq = 0 \quad (2.9)$$

или, линеаризируя,

$$-U_\infty \Sigma = \iint_S \left(\frac{\partial \varphi_S}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_S}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} \right) dS \cos(nx) \quad (2.10)$$

где Σ — разность площадей, ограниченных контурами L_1 и L_2 . Если на тело набегают невозмущенный поток, то $\partial \varphi / \partial y = \partial \varphi_S / \partial z = 0$ на передней характеристической поверхности и интегрирование в формулах (2.6), (2.8) и (2.10) производится только лишь по задней характеристической поверхности.

§ 3. Вычисление сопротивления экстремальных тел. Сформулируем вариационную задачу. Пусть заданы входной L_1 и концевой L_2 контуры тела, а также его объем, т. е. Ω_0 . Проведем переднюю и заднюю характеристические поверхности через контуры L_1 и L_2 . Найдем такое распределение потенциала на задней характеристической поверхности S , при котором достигается минимум функционала сопротивления

$$X = \frac{\rho_\infty}{2} \iint_S (\varphi_{0y}^2 + \varphi_{0z}^2) dy dz$$

при условиях ¹

$$\Omega_0 = \frac{1}{U_\infty} \iint_S f (\varphi_{0y} f_y + \varphi_{0z} f_z) dy dz - \frac{\beta^2}{U_\infty} \iint_S \varphi_0 dy dz = \text{const}$$

$$\Sigma = -\frac{1}{U_\infty} \iint_S (\varphi_{0y} f_y + \varphi_{0z} f_z) dy dz = \text{const}$$

$\varphi_0 = 0$ на линии пересечения передней и задней характеристических поверхностей (индексы y и z при φ_0 и f означают дифференцирование по y и z вдоль поверхности S). Эта задача эквивалентна отысканию минимума функционала

$$I = \iint_S [\varphi_{0y}^2 + \varphi_{0z}^2 + 2\lambda_1 (\varphi_{0y} f_y + \varphi_{0z} f_z) + 4\lambda_2 f (\varphi_{0y} f_y + \varphi_{0z} f_z) - 4\lambda_2 \beta^2 \varphi_0] dy dz \quad (3.1)$$

где λ_1 и λ_2 — постоянные множители Лагранжа. Минимум функционала (3.1) достигается при φ_0 , удовлетворяющем следующим условиям (фиг. 3):

$$(1) \quad \Delta (\varphi_0 + \lambda_1 f + \lambda_2 f^2) = -2\lambda_2 \beta^2 \quad \text{в области } D$$

$$(2) \quad \varphi_0 = 0 \quad \text{на } l_1$$

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial n} (\varphi_0 + \lambda_1 f + \lambda_2 f^2) = 0 \quad \text{на } L_2$$

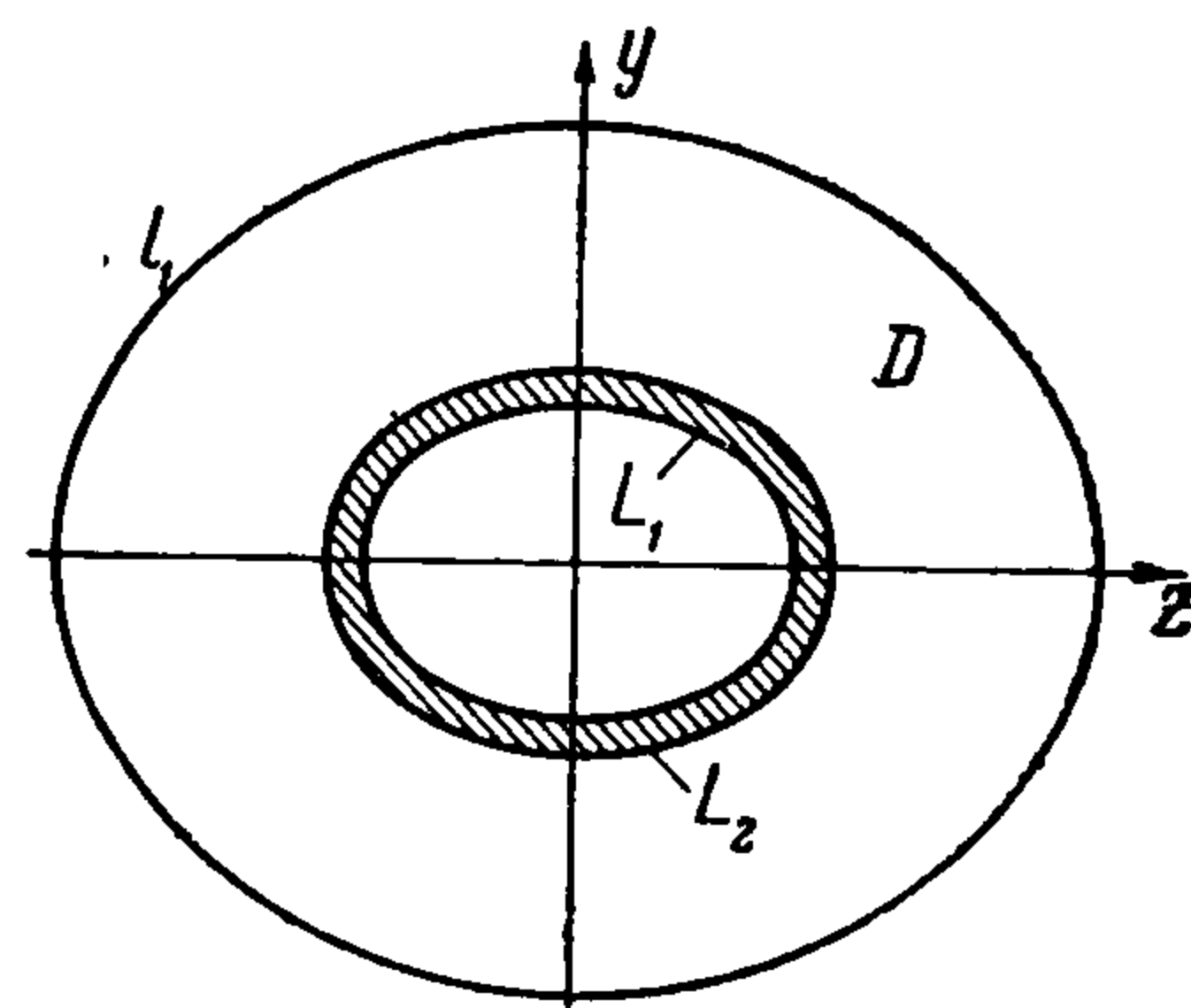
Здесь Δ — оператор Лапласа, l_1 — проекции линии пересечения передней и задней характеристических поверхностей на плоскость $x = \text{const}$, D область между контурами L_2 и l_1 .

¹ Как нетрудно заметить, среди этих условий нет условия того, что тело проходит через заданные контуры L_1 и L_2 . Такое условие можно было бы сформулировать в общем случае, только лишь зная решение задачи Гурса. В некоторых случаях (например, в плоском и осесимметрическом) оно выполняется автоматически. При выполнении условий, сформулированных в этом параграфе, можно гарантировать, что тело проходит через любой один из контуров L_1 или L_2 .

Таким образом, потенциал возмущенной скорости, соответствующий обтеканию тела минимального сопротивления, на задней характеристической поверхности удовлетворяет уравнению Пуассона со смешанными краевыми условиями¹.

Вычислим значения множителей λ_1 и λ_2 . Для этого введем функции ψ_1 и ψ_2 , определяемые условиями

$$\begin{aligned} \Delta \psi_1 &= 0, & \Delta \psi_2 &= -2\beta^2 \text{ в } D \\ \psi_1 &= f, & \psi_2 &= f^2 \text{ на } l_1 \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial n} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial n} = 0 & \text{ на } L_2 \end{aligned}$$



Фиг. 3

Из определения функций ψ_1 и ψ_2 видно, что эти функции зависят только от β и формы области S . Тогда искомый потенциал можно представить в виде

$$\varphi_0 = \lambda_1(\psi_1 - f) + \lambda_2(\psi_2 - f^2)$$

Формулы (2.5), (2.8) и (2.10) для тела минимального сопротивления после несложных преобразований можно привести к виду

$$\Omega_0 = \frac{\lambda_1}{2U_\infty} \left[\int_{l_1} f^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} dl - 2\beta^2 \iint_D \psi_1 dy dz \right] + \frac{\lambda_2}{2U_\infty} \left[\int_{l_1} f^2 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} dl - 2\beta^2 \iint_D \psi_2 dy dz \right] \quad (3.2)$$

$$\Sigma = \frac{\lambda_1}{U_\infty} \left[\beta^2 S - \int_{l_1} f \frac{\partial \psi_1}{\partial n} dl \right] - \frac{\lambda_2}{U_\infty} \int_{l_1} f \frac{\partial \psi_2}{\partial n} dl \quad (3.3)$$

$$\frac{2X}{\rho_\infty U_\infty^2} = \frac{\lambda_1}{U_\infty} \Sigma - 2 \frac{\lambda_2}{U_\infty} \Omega_0$$

Введем обозначения

$$a = \beta^2 S - \int_{l_1} f \frac{\partial \psi_1}{\partial n} dl, \quad c = 2\beta^2 \iint_D \psi_2 dy dz - \int_{l_1} f^2 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} dl$$

$$b = \int_{l_1} f \frac{\partial \psi_2}{\partial n} dl = \int_{l_1} f^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} dl - 2\beta^2 \iint_D \psi_1 dy dz$$

Разрешая уравнения (3.2) и (3.3) относительно λ_1 и λ_2 , получаем

$$\frac{\lambda_1}{U_\infty} = \frac{\Sigma}{a} + \frac{2b}{b^2 - ac} \Omega_1, \quad \frac{\lambda_2}{U_\infty} = \frac{2a}{b^2 - ac} \Omega_1 \left(\Omega_1 = \Omega_0 - \frac{b}{2a} \Sigma \right) \quad (3.4)$$

Для сопротивления X будем иметь

$$\frac{2X}{\rho_\infty U_\infty^2} = \frac{1}{a} \Sigma^2 + \frac{4a}{ac - b^2} \Omega_1^2 \quad (3.5)$$

Наряду с вариационной задачей, сформулированной в начале этого параграфа, можно также рассмотреть более частную задачу. Пусть заданы входной L_1 и выходной L_2 контуры и отыскивается тело минимального

¹ Здесь не доказывается, что φ_0 , удовлетворяющее перечисленным выше условиям, соответствует обтеканию какого-то реального (т. е. имеющего всюду положительную толщину) тела. Во всяком случае при таком распределении φ_0 получается оценка снизу для сопротивления реального тела минимального сопротивления при условиях, сформулированных в начале этого параграфа.

Строго говоря, в работах [1,2] также получают оценки снизу для волнового сопротивления.

сопротивления, проходящее через эти контуры (т. е. объем тела произволен) [3]. Для такого тела минимального сопротивления

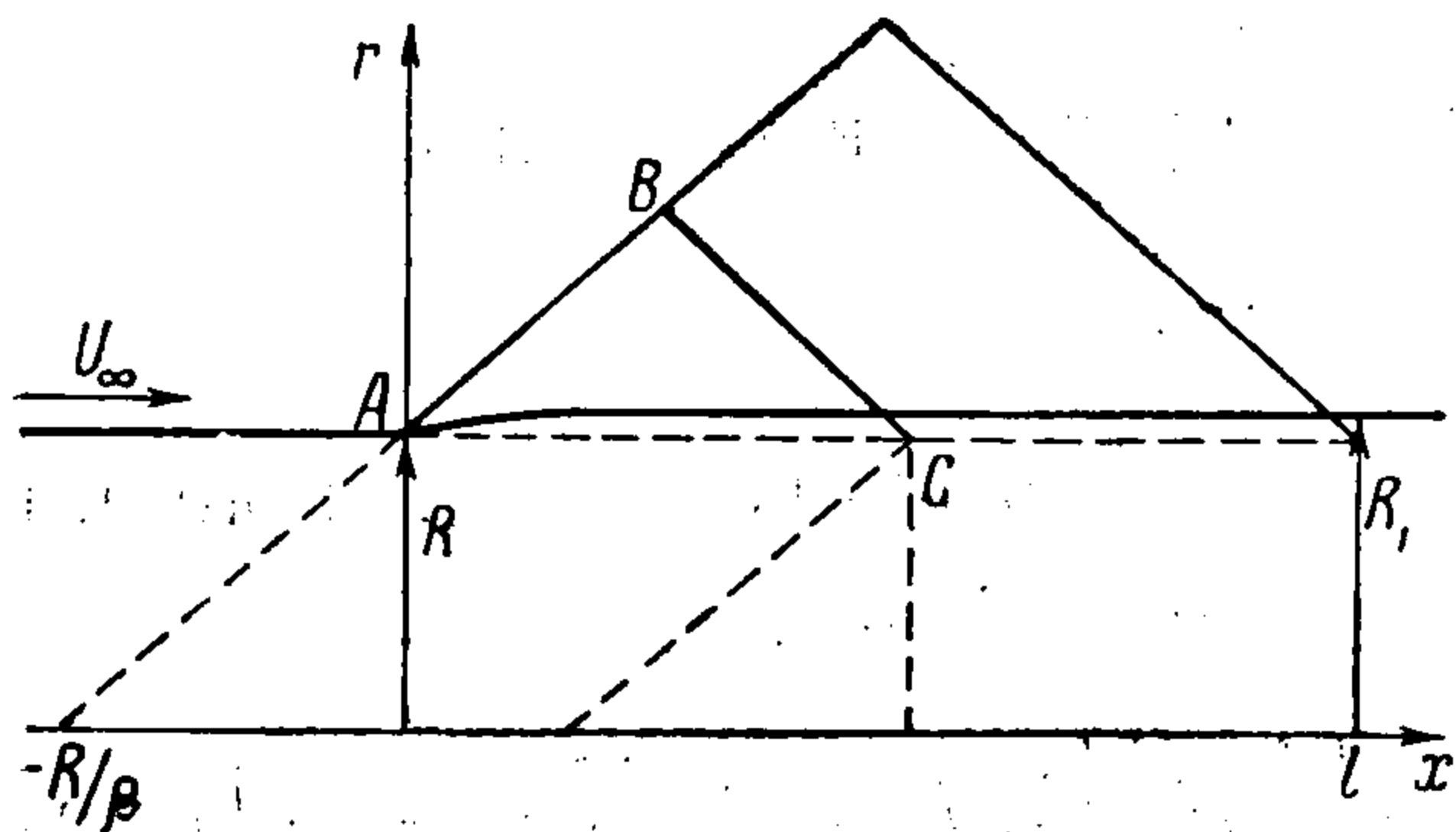
$$\frac{2X}{\rho_{\infty} U_{\infty}^2} = \frac{1}{a} \Sigma^2, \quad \Omega_1 = 0, \quad \Omega_0 = \frac{b}{2a} \Sigma$$

В частности, если линия пересечения передней и задней характеристических поверхностей лежит в плоскости $x = \text{const}$, то

$$\Omega_0 = -0.5l \Sigma \quad (3.6)$$

l — длина тела. Эта формула позволяет вычислить объем неизвестного тела минимального сопротивления.

§ 4. Тела вращения с цилиндрическими потоками, обладающие минимальным сопротивлением. В качестве примера рассмотрим задачу об отыскании тела вращения с цилиндрическим потоком, обладающего ми-



Фиг. 4

нимальным внешним волновым сопротивлением. Будем считать, что заданы (фиг. 4): объем тела (т. е. Ω_0), его длина l , радиусы входного R и конечного R_1 сечений и число Маха M . Частные случаи этой задачи рассматривались в [1, 4-6]

В дальнейшем будем пренебрегать величиной $\beta(R_1 - R)/l$ по сравнению с единицей. Решая уравнения

для ψ_1 и ψ_2 (см. § 3) и находя значение потенциала φ_0 , соответствующего обтеканию тела минимального сопротивления, получаем

$$\psi_1 = \frac{l}{2}, \quad \psi_2 = -\frac{\beta^2 r^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} \left(\frac{l}{2\beta} + R \right)^2 + \beta^2 R^2 \ln \frac{2\beta r}{l + 2\beta R} + \frac{l^2}{4}$$

Введем для дальнейшего в этом параграфе безразмерные величины

$$\bar{\varphi}_0 = \frac{\varphi_0}{lU_{\infty}}, \quad \bar{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1}{U_{\infty}}, \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{\lambda_2 l}{U_{\infty}}, \quad \bar{R} = \frac{\beta R}{l}$$

$$\bar{r} = \frac{\beta r}{l}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{l}, \quad \bar{q} = \frac{q}{U_{\infty} l}, \quad \bar{\Sigma} = \frac{\Sigma}{l^2}$$

и условимся в дальнейшем черточки над буквами опустить. Тогда для потенциала φ_0 получим следующее выражение:

$$\varphi_0 = \lambda_1 \left[r - R - 0.5 \right] + \lambda_2 \left[R^2 \ln \frac{r}{R + 0.5} - \frac{3}{2} r^2 + \right. \\ \left. + 2(1 + R)r - \frac{1}{4}(R + 0.5)(2R + 5) \right]$$

Из уравнений (3.2) и (3.3) следует, что

$$\lambda_1 = B\Sigma + A\Omega_1, \quad \lambda_2 = -A\Omega_1$$

где

$$A = \frac{64}{\pi \{ (1 + 4R)(1 + 4R - 8R^2) + 64R^4 \ln[(R + 0.5)/R] \}}$$

$$B = \frac{4}{\pi(1 + 4R)}, \quad \Omega_1 = \frac{\Omega_0}{l^3} + 0.5\Sigma$$

Окончательно имеем

$$\varphi_0 = B\Sigma \left[r - R - 0.5 \right] - A\Omega_1 \left[R^2 \ln \frac{r}{R + 0.5} - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} r^2 + 2(R + 0.5)r - \frac{1}{2}(R + 0.5)^2 \right] \quad (4.1)$$

Формула (3.5) позволяет вычислить сопротивление неизвестного пока еще экстремального тела:

$$\frac{2X}{\rho_{\infty} U_{\infty}^2 l^2} = B \Sigma^2 + 2A \Omega_1^2$$

Перейдем теперь к решению задачи Гурса. Найдем такое распределение источников на отрезке $(-R, 1-R)$ оси x , при котором потенциал принимает заданное значение на характеристике BC и обращается в нуль на AB . Для этого воспользуемся известным в линеаризованной теории решением волнового уравнения:

$$\varphi(r, x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{x-r} \frac{q(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - r^2}} \quad (4.2)$$

Для интенсивности источников $q(\xi)$ получаем уравнение

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R'} \frac{q(\xi)}{\sqrt{1+R-\xi}} \frac{d\xi}{\sqrt{1+R-2r-\xi}} = \varphi_0(r) \quad (R' = 1+R-2r) \quad (4.3)$$

Решением уравнения (4.3) является

$$q(\xi) = 2\sqrt{1+R-\xi} \int_{\xi_1}^{R_1} \frac{\varphi_0'(r) dr}{\sqrt{2r-1+\xi-R}} \quad \left(\begin{array}{l} R_1 = R+0.5 \\ \xi_1 = 0.5(1+R-\xi) \end{array} \right) \quad (4.4)$$

На основании этой формулы было получено распределение потенциала внутри области, ограниченной передним и задним характеристическими конусами, которое приведено в § 1. В случае тела минимального сопротивления

$$q(\xi) = 2B \Sigma \sqrt{(R+\xi)(1+R-\xi)} - A \Omega_1 \left[(-1+2\xi) \sqrt{(R+\xi)(1+R-\xi)} + 4R^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{R+\xi}{1+R-\xi}} \right] \quad (4.5)$$

Чтобы определить форму тела, воспользуемся формулой (2.10), примененной к ведущему контуру ABC (фиг. 4). Будем иметь

$$\Sigma(x) = 2\pi \int_R^{r(x)} r \varphi_r dr \quad (4.6)$$

где $\Sigma(x)$ — безразмерная площадь в сечении x , φ — значение безразмерного потенциала на характеристике BC .

Интегрируя формулу (4.6) по частям и подставляя значение потенциала (4.2), получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma(x) = & R \int_{-R}^{x-R} \frac{q(\xi) d\xi}{\sqrt{(x+R-\xi) - 2R(x+R-\xi)}} + \\ & + \int_R^{R+x} dr \int_{-R}^{x+R-2r} \frac{q(\xi) d\xi}{\sqrt{(x+R-\xi)(x+R-\xi-2r)}} \end{aligned}$$

Изменив порядок интегрирования во втором интеграле и интегрируя еще раз по частям, будем иметь

$$\Sigma(x) = \int_{-R}^{x-R} q'(\xi) \sqrt{(x-\xi)^2 - R^2} d\xi \quad (4.7)$$

Последняя формула носит общий характер. В частности, если радиус протока равен $R = 0$, то

$$\Sigma(x) = \int_0^x q'(\xi)(x-\xi) d\xi, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dx} \Sigma(x) = q(x)$$

Подставляя в формулу (4.7) значение $q'(\xi)$ из (4.5) и приводя получившийся интеграл к каноническому виду, получаем окончательно:

$$\begin{aligned} \Sigma(x) = & \frac{B\Sigma}{2\sqrt{(x+2R)(1-x+2R)}} [2R(1+4R)\Pi(n, k) - \\ & - 2R(x+2R)K(k) - (1-2x)(x+2R)(1-x+2R)E(k)] + \\ & + \frac{2}{3} A \Omega_1 \sqrt{(x+2R)(1-x+2R)} [(R+x-x^2-4R^2)E(k) - \\ & - R(1-4R)K(k)] \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $K(k)$, $E(k)$ и $\Pi(n, k)$ — полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего родов с параметрами

$$k^2 = \frac{x(1-x)}{(x+2R)(1-x+2R)}, \quad n = \frac{x}{x+2R}$$

Формула (4.8) применима и для вычисления образующей тела минимального сопротивления, проходящего через два заданных радиуса при произвольном объеме. В этом случае $\Omega_1 = 0$ [см. (3.4) и (3.6)].

§ 5. Исследование комбинаций тел, имеющих минимальное волновое сопротивление. Пусть характеристическая поверхность $S = S_1 + S_2$ состоит из обратного и прямого конусов Маха, имеющих вершины на оси x в точках $x = 0$ и $x = l$ (фиг. 5). Введя в плоскости $x = \text{const}$ полярные координаты $y = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$ и замечая, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

можно следующим образом переписать соотношения для объема и для площади Σ тела или системы тел, находящихся внутри поверхности S :

$$\frac{U_\infty \Omega_0}{2\pi\beta^2} = - \iint_{S_1} \frac{d\Phi}{dr} r^2 dr + \iint_{S_1} \Phi r dr + \iint_{S_2} \frac{d\Phi}{dr} \left(r - \frac{l}{\beta}\right) r dr - \iint_{S_2} \Phi r dr \quad (5.1)$$

$$\frac{U_\infty \Sigma}{2\pi\beta} = \iint_{S_1} \frac{d\Phi}{dr} r dr - \iint_{S_1} \frac{d\Phi}{dr} r dr \quad \left(\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi d\theta\right) \quad (5.2)$$

Величину Φ назовем средним потенциалом. Таким образом, если поверхность S состоит из двух конусов Маха, то объем тела, находящегося внутри этой поверхности, а также разность площадей выходного

и входного сечений Σ зависят только от значений среднего потенциала Φ на поверхности S . Пусть далее

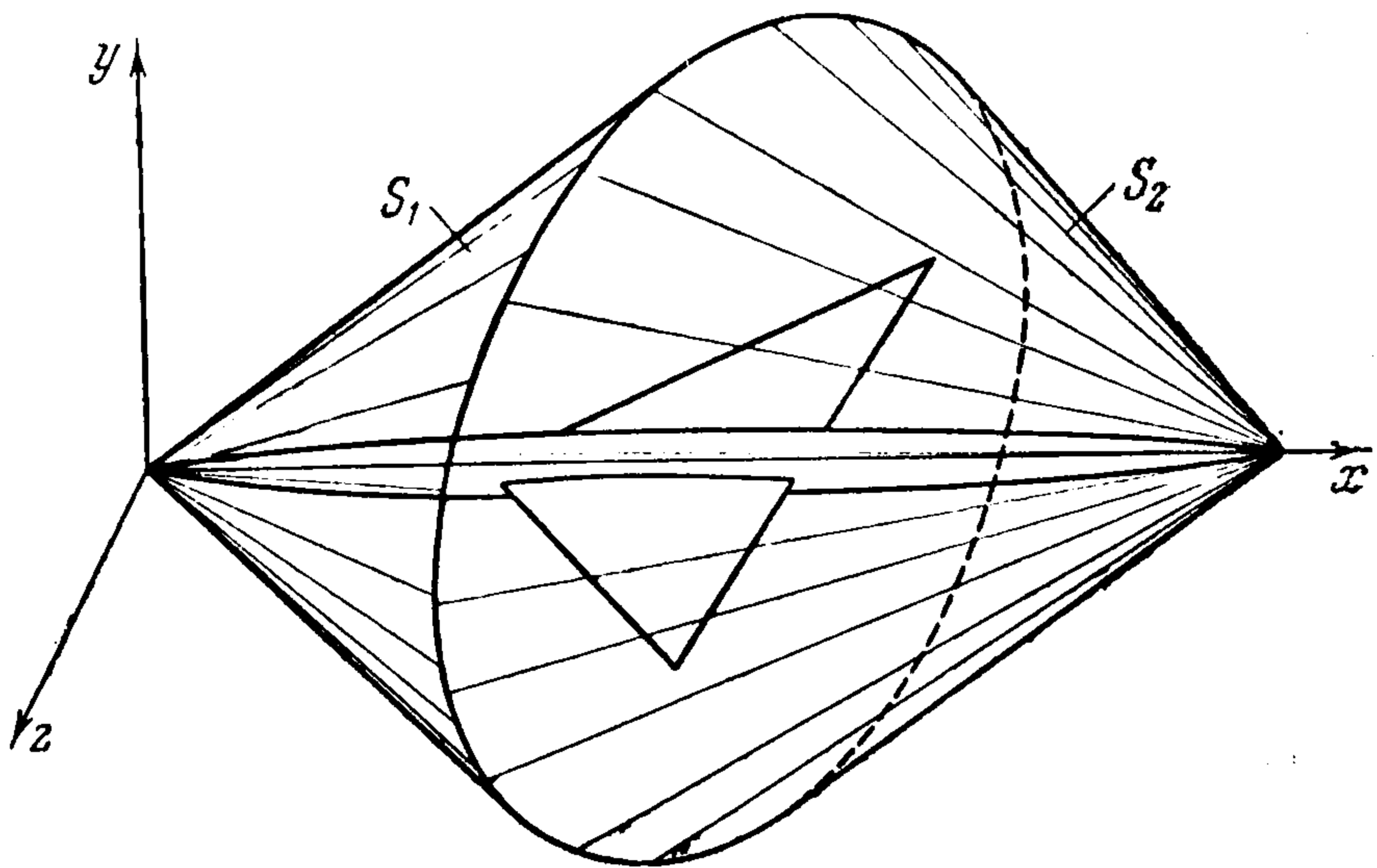
$$\varphi = \Phi + \Delta \quad \left(\int_0^{2\pi} \Delta d\theta = 0 \right)$$

Тогда формула для сопротивления может быть переписана как

$$\begin{aligned} X = & -\pi\rho_\infty \int_{S_1} \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 r dr + \pi\rho_\infty \int_{S_2} \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 r dr - \frac{\rho_\infty}{2} \iint_{S_1} \left[\left(\frac{d\Delta}{dr} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial\Delta}{\partial\theta} \right)^2 \right] r dr d\theta + \frac{\rho_\infty}{2} \iint_{S_2} \left[\left(\frac{\partial\Delta}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial\Delta}{\partial\theta} \right)^2 \right] r dr d\theta \end{aligned} \quad (5.3)$$

Следовательно, выражение для сопротивления X состоит из двух частей, из которых одна зависит только от величины Φ , а другая не зависит от этой величины.

Поставим следующую задачу: пусть даны некоторые фиксированные тела, обтекаемые сверхзвуковым потоком газа, и пусть требуется подобрать такое тело заданной длины, площади Σ и объема Ω_0 , чтобы сопротивление, испытываемое искомым телом и теми телами или их частями, которые находятся внутри поверхности S , было минимальным (проток, если он имеется в искомом теле, предполагаем круглым). Для решения воспользуемся соотношениями (5.1), (5.2), (5.3).



Фиг. 5

Все интегралы по S_1 следует считать заданными. Выше сформулированная задача является задачей по отысканию минимума функционала (5.3) при условиях (5.1) и (5.2). Поскольку условия (5.1) и (5.2) зависят лишь от среднего потенциала, а переменная часть выражения для функционала X представляется в виде двух положительных членов, из которых один зависит от Φ , а другой от него не зависит, то позволительно искать отдельно минимумы переменных частей:

$$I_1 = \iint_{S_2} \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 r dr, \quad I_2 = \iint_{S_2} \left[\left(\frac{\partial\Delta}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial\Delta}{\partial\theta} \right)^2 \right] r dr d\theta \quad (5.4)$$

Найдем минимум I_1 при условиях (5.1) и (5.2). Заметим, что условие (5.1) путем интегрирования по частям может быть преобразовано к виду:

$$\frac{U_\infty \Omega_0}{2\pi\beta^2} = - \iint_{S_1} \frac{d\Phi}{dr} \left(\frac{3}{2} r^2 - \frac{1}{2} r_0^2 \right) dr + \iint_{S_2} \frac{d\Phi}{dr} \left(\frac{3}{2} r^2 - \frac{1}{2} r_0^2 - \frac{lr}{\beta} \right) dr \quad (5.5)$$

Здесь r_0 — радиус протока. Функция Лагранжа для рассматриваемого случая будет

$$L = \iint_{S_2} \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 r dr - 2\lambda_1 \iint_{S_2} \frac{d\Phi}{dr} r dr - 2\lambda_2 \iint_{S_2} \frac{d\Phi}{dr} \left(\frac{3}{2} r^2 - \frac{1}{2} r_0^2 - \frac{lr}{\beta} \right) dr \quad (5.6)$$

где λ_1 и λ_2 — пока неопределенные константы.

Уравнение Эйлера для функционала (5.6) имеет вид:

$$\frac{d\Phi}{dr} = \lambda_1 + \lambda_2 \left(\frac{3}{2} r - \frac{1}{2} \frac{r_0^2}{r} - \frac{l}{\beta} \right) \quad (5.7)$$

Из того факта, что вторая вариация величины J_1

$$\delta^2 J_1 = 2 \iint_{S_2} \left(\frac{d(\delta\Phi)}{dr} \right)^2 r dr$$

всегда положительна, заключаем, что выражение (5.7) дает функционалу J_1 минимум. Постоянные λ_1 и λ_2 находятся из условий (5.1) и (5.2) аналогично § 3.

Легко заметить, что если бы решалась задача по отысканию тел вращения минимального сопротивления с объемом, равным сумме объемов всех тел (как данных, так и искомого) внутри рассматриваемой характеристической поверхности, с такой же, как и у наших тел, площадью Σ и имеющего потенциал на передней части характеристической поверхности, равный среднему исходному потенциалу, то потенциал для искомого тела вращения на задней части характеристической поверхности совпадал бы с выражением (5.7).

Такое тело вращения будем называть эквивалентным телом вращения. Задача по отысканию тел вращения, обладающих минимальным сопротивлением, исследовалась в § 4. Обратимся теперь ко второй части задачи.

Именно, найдем минимум интеграла J_2 . Предположим, что фиксированные тела таковы, что потенциал их является функцией, имеющей интегрируемые на S производные и квадраты производных. Эти требования, конечно, всегда выполняются на практике.

Разберем для начала случай, когда в плоскости ($y = 0$) задано крыло с симметричным профилем и когда к нему подбирается симметричный относительно этой плоскости фюзеляж.

Каждой функции $\varphi_k^{(i)}$ соответствует функция $\Delta_k^{(i)}$, причем:

$$\Delta_k^{(i)} = \varphi_k^{(i)} - \Phi_k^{(i)}$$

Потенциал от крыла φ_k на S_2 можно приблизить функцией Φ_k' , разложимой в ряд Фурье, так, чтобы интегралы

$$\iint_{S_2} \left\{ \left[\frac{\partial(\Delta_k - \Delta_k')}{\partial r} \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial(\Delta_k - \Delta_k')}{\partial \theta} \right]^2 \right\} r dr d\theta$$

$$\iint_{S_2} \left[\frac{\partial(\Delta_k - \Delta_k')}{\partial r} \frac{\partial(\Delta + \Delta_k')}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\Delta_k - \Delta_k')}{\partial \theta} \frac{\partial(\Delta + \Delta_k')}{\partial \theta} \right] r dr d\theta$$

(Δ соответствует потенциалу фюзеляжа φ_0) были сколь угодно малы.

Потенциал фюзеляжа удовлетворяет уравнению

$$-\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \theta^2} = 0 \quad (5.8)$$

Разложим величину Φ_k' на S в ряд Фурье. Взяв первые n членов, ищем φ_0 в виде тригонометрического полинома по θ порядка n так, чтобы на S_2

$$\varphi_{ki}' = -\varphi_{0i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

т. е. чтобы сумма соответствующих коэффициентов Фурье для φ_k' и φ_0 обратилась в нуль до порядка n .

Величина n может быть выбрана так, чтобы интеграл

$$\iint_{S_2} \left[\left(\frac{\partial R_{kn}'}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial R_{kn}'}{\partial \theta} \right)^2 \right] r dr d\theta$$

был достаточно мал (R_{kn}' — остаточный член ряда Фурье для функции φ_k').

Таким образом, получилось, что при помощи надлежащего подбора фюзеляжа, вообще говоря, можно для симметричной комбинации крыла и фюзеляжа получить сопротивление, сколь угодно мало отличающееся от сопротивления эквивалентного тела вращения за вычетом интеграла по S_1 от величины Δ . Вместе с тем это сопротивление, назовем его X_{\min} , является нижней границей для величины сопротивления комбинаций рассматриваемой задачи. Отметим, что эта нижняя граница достижима не во всех случаях, так как возможно появление областей с отрицательными толщинами. Практически для уменьшения сопротивления системы крыло — фюзеляж нужно выбрать n так, чтобы таких областей еще не было.

Аналогично и для общего случая, где подбор наиболее выгодного тела будет связан с наличием дополнительных условий о непротекании жидкости через некоторые поверхности. Таким образом, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Для n условий задачи, сформулированной выше, может быть в принципе подобрано тело так, чтобы суммарное сопротивление, испытываемое всеми телами, находящимися внутри характеристической поверхности S , сколь угодно мало отличалось от X_{\min} нижней границы для сопротивления изучаемой комбинации.

Теорема 2. Распределение величины среднего потенциала по части S_2 характеристической поверхности для экстремальной комбинации совпадает с распределением потенциала на S_2 для эквивалентного тела вращения.

Поступила 13 V 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. К о г а н М. Н. О телах минимального сопротивления в сверхзвуковом потоке газа. ПММ, вып. 2, 1957.
2. Ж и л и н Ю. Л. Крылья минимального сопротивления, ПММ, вып. 2, 1957.
3. S e a r s W. R. On Projectiles of Minimum Wave Drag. Quart. App. Math., vol. IV, No 4, 1947.
4. P a r k e r H. M. Minimum Drag Ducted and Pointed Bodies of Revolution Based on Linearised Supersonic Theory. NASA Report 1213, 1955.
5. H e a s l e t M. A. and Fuller F. B. Axially Shapes with Minimum Wave Drag. NASA Report 1256, 1956.