

ОБТЕКАНИЕ КОНУСА ВЯЗКИМ ТЕПЛОПРОВОДНЫМ ГАЗОМ С БОЛЬШИМИ СВЕРХЗВУКОВЫМИ СКОРОСТЯМИ

В. В. Лунев

(Москва)

В работе изучается обтекание вязким теплопроводным газом круглого конуса без угла атаки при больших сверхзвуковых скоростях. Вся возмущенная область течения делится на две разделенные четкой границей подобласти [1,2]: вязкую, течение в которой считается ламинарным и описывается уравнениями пограничного слоя, и невязкую, течение в которой описывается уравнениями идеального газа.

Исследуется лишь случай слабого взаимодействия, т. е. рассматривается область течения, достаточно удаленная от носика конуса. При этом величина $\epsilon = \delta/\beta L$, где L — расстояние этой области от носика по оси конуса с углом полураствора θ_0 , δ — толщина пограничного слоя в этом месте, $\beta_0 = \operatorname{tg} \theta_0$, считается малой и задача решается методом малых возмущений (в подобной постановке ранее решены задачи о пластине [3,4] и клине [5]). Члены, имеющие порядок ϵ^2 и выше, во внимание не принимаются.

Основным решением являются решение уравнений бесконечно тонкого пограничного слоя на конусе — эта задача сводится к задаче о пластине [6] — и табулированное [7] коническое течение идеального газа. Поверхность конуса принята изотермической или теплоизолированной.

Будем пользоваться двумя системами координат с центром в вершине конуса: цилиндрической x_1, r, φ для невязкой области и конической x, y, φ для вязкой. Здесь x_1 отсчитывается по оси конуса, x — по образующей, r — расстояние точки до оси, y — до поверхности конуса. Через $u, u^{(1)}$ и $v, v^{(1)}$ будем обозначать проекции скорости на оси x_1, x и r, y соответственно. Индексы ∞, δ, w и k будут относиться соответственно к величинам набегающего потока, к границе пограничного слоя, к поверхности конуса и к размерным величинам на поверхности конуса при обтекании его идеальным газом.

§ 1. Невязкая область. Течение около круглого конуса в переменных $(x_1, \beta = r/x_1)$ описывается системой

$$v_0' = - \frac{a_0^2 v_0}{\beta [a_0^2 (1 + \beta^2) - (\beta u_0 - v_0)^2]} \quad \left(a_0^2 = \kappa \frac{p_0}{\rho_0} \right)$$

$$\frac{\rho_0'}{\rho_0} = \kappa \frac{\rho_0'}{\rho_0} = \kappa \frac{\beta u_0 - v_0}{a_0^2} v_0', \quad u_0' = - \beta v_0' \quad (1.1)$$

Здесь штрихи обозначают производные по β , плотность, скорости, давление и расстояния отнесены соответственно к $\rho_\infty, U_\infty, \rho_\infty U_\infty^2$ и L .

При $\beta = \beta_0 = \operatorname{tg} \theta_0$ имеем

$$v_0 = \beta_0 u_0, \quad v_0' = - \frac{u_0}{1 + \beta_0^2}, \quad \rho_0' = \rho_0' = 0$$

$$u_0^{(1)'} = u_0' \cos \theta_0 + v_0' \sin \theta_0 = 0 \quad (1.2)$$

В окрестности $\beta \approx \beta_0$ для тонкого конуса интегрирование первого уравнения (1.1) с учетом (1.2) дает $v_0 = u_0 \beta_0^2 / \beta$. Эта формула дает хорошее совпадение с точным решением вплоть до скачка уплотнения (с точностью до 5% при $M_\infty \beta_0 \approx 1$ и точное совпадение при больших $M_\infty \beta_0$).

На скачке уплотнения величины v_0 , ρ_0 , ρ_0 и u_0 связаны с углом θ^* наклона скачка к оси конуса обычными соотношениями.

При определении величин первого порядка малости считаем конус достаточно тонким и пользуемся упрощенной на основании закона плоских сечений [8] системой уравнений

$$\begin{aligned} -x_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + (\beta - v) \frac{\partial v}{\partial \beta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \beta}, & x_1 \beta \frac{\partial \rho}{\partial x_1} - \beta^2 \frac{\partial \rho}{\partial \beta} + \frac{\partial (\rho \beta v)}{\partial \beta} &= 0 \\ x_1 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{x}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \right) + (v - \beta) \frac{\rho^x}{\rho} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{p}{\rho^x} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Величина u определяется из уравнения Бернулли. Ищем решение (1.3) в виде

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \varepsilon \frac{v_1}{\sqrt{x_1}} + O(\varepsilon^2), & \rho &= \rho_0 + \varepsilon \frac{\rho_1}{\sqrt{x_1}} + O(\varepsilon^2) \\ u &= 1 + \varepsilon \frac{u_1}{\sqrt{x_1}} + O(\varepsilon^2), & p &= p_0 + \varepsilon \frac{p_1}{\sqrt{x_1}} + O(\varepsilon^2) \\ T &= T_0 + \varepsilon \frac{T_1}{\sqrt{x_1}} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Функции $v_1(\beta)$, $p_1(\beta)$ и $\rho_1(\beta)$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} (\beta - v_0) v_1' + \left(\frac{1}{2} - v_0' \right) v_1 &= \frac{1}{\rho_0} p_1' - \frac{p_0'}{\rho_0} \frac{\rho_1}{\rho_0} \\ (\rho_0 \beta v_1 + v_0 \beta \rho_1)' - \beta \left(\frac{1}{2} \rho_1 + \beta \rho_1' \right) &= 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{p_1}{\rho_0} - x \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) + (\beta - v_0) \left(\frac{p_1}{\rho_0} - x \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)' &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

В этих уравнениях за v_0 , ρ_0 и т. д. примем решение уравнений (1.1). Соответственно поле скоростей в пограничном слое может быть представлено в виде

$$u^{(1)} = u_0^{(1)} + \varepsilon u_1^{(1)} + \dots, \quad v^{(1)} = \varepsilon v_0^{(1)} + \dots \quad \left(u_0^{(1)} \rightarrow \frac{u_0(\beta_0)}{\cos \theta_0} \text{ при } y \rightarrow y_\delta \right)$$

Из условия непрерывности скоростей при $y = y_\delta$ имеем

$$\begin{aligned} \beta_0 u_0(\beta_0) + \varepsilon u_1^{(1)} \sin \theta_0 + \varepsilon v_0^{(1)}(y_\delta) \cos \theta_0 &= \\ = v_0(\beta_0) + \frac{y_\delta}{x_1} v_0' + \varepsilon \frac{v_1(\beta_0)}{\sqrt{x_1}} + O(\varepsilon^2), & u_1^{(1)} \sim \beta_0^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Как известно [6]

$$v_0^{(1)}(y_\delta) = \frac{u_0}{\cos \theta_0} \left(\sqrt{3} v_p - \frac{y_\delta}{x} \right) \quad \left(v_p = \frac{V_0}{\sqrt{3x}} \right)$$

где v_p — безразмерная нормальная составляющая скорости на границе пограничного слоя на пластине. Отсюда

$$\varepsilon v_1(\beta_0) = V_0 [1 + O(\varepsilon + \beta)] \approx V_0 \quad (1.6)$$

Пусть уравнения формы скачка и угла его наклона будут

$$\begin{aligned} r &= \beta^* x_1 + \varepsilon r_1 + \dots, & \theta &= \theta^* + \frac{\varepsilon \theta_1}{\sqrt{x_1}} + \dots \\ r_1 &= 2\theta_1 \sqrt{x_1}, & \beta^* &= \operatorname{tg} \theta^* \approx \theta^* \end{aligned}$$

Тогда после линеаризации соотношений на скачке получим при $\beta = \beta^*$

$$\begin{aligned} p_1(\beta^*) &= \left[\frac{4\theta^*}{\kappa + 1} - 2p_0'(\beta^*) \right] \theta_1 \\ v_1 &= \left[\frac{2}{\kappa + 1} \left(1 + \frac{1}{M_\infty^2 \theta^{*2}} \right) - 2v_0'(\beta^*) \right] \theta_1 \\ \rho_1 &= \left[\frac{4\rho_0}{2 + (\kappa - 1) M_\infty^2 \theta^{*2}} - 2\theta^* \rho_0'(\beta^*) \right] \frac{\theta_1}{\theta^*} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Уравнения (1.4) не изменят вида от замены p_1 , ρ_1 и v_1 на p_1/θ_1 , ρ_1/θ_1 ; и v_1/θ_1 ; при этом из (1.7) исчезнет θ_1 и задача сведется к задаче Коши с данными в точке $\beta = \beta^*$. Величина θ_1 определится из (1.6).

Последнее уравнение (1.4) имеет интеграл, принимающий при $v_0 = u_0 \beta_0^2 / \beta$ и с учетом (1.7) вид:

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{p_0} - \kappa \frac{\rho_1}{\rho_0} &= k \left(\frac{\beta^2}{\beta_0^2} - 1 \right)^{-1/4} = \omega(\beta) \\ k &= \frac{4\kappa(\kappa - 1)(M_\infty^2 \theta^{*2} - 1)^2 (\beta^{*2} / \beta_0^2 - 1)^{1/4} \theta_1}{(2\kappa M_\infty^2 \theta^{*2} - \kappa + 1) [2 + (\kappa - 1) M_\infty^2 \theta^{*2}] \theta^*} \end{aligned} \quad (1.8)$$

С учетом (1.8) система (1.4) сводится к системе двух уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_1}{p_0} \right)' &= \frac{\kappa v_0' \beta}{v_0 a_0^2} \left(\frac{1}{2} + 2v_0' \right) v_1 - \frac{\kappa v_0' \beta}{v_0 a_0^2} (\beta - v_0) \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} v_0' \right) \frac{p_1}{p_0} + \frac{v_0'^2 \beta}{a_0^2 v_0} (\beta - v_0) \omega(\beta) \\ v_1' &= \left[-\frac{1}{\beta} - \frac{\beta - v_0}{a_0^2} v_0' + \frac{v_0' \beta}{v_0 a_0^2} (\beta - v_0) \left(\frac{1}{2} + 2v_0' \right) \right] v_1 + \\ &\quad + \left[\frac{1}{2\kappa} - \frac{v_0' \beta}{v_0 a_0^2} (\beta - v_0)^2 \left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} v_0' \right) \right] \frac{p_1}{p_0} + \frac{v_0'^2 \beta}{\kappa v_0 a_0^2} (\beta - v_0)^2 \omega(\beta) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Температура в потоке определяется из уравнения состояния и формулы (1.8):

$$T_1 = T_{11} + T_{12}, \quad \frac{T_{11}}{T_0} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{p_1}{p_0}, \quad \frac{T_{12}}{T_0} = \frac{1}{\kappa} \omega(\beta) \quad (1.10)$$

Уравнения (1.9) не имеют особых точек, поэтому p_1 и T_{11} ограничены, напротив, $T_{12} \rightarrow \infty$ при $\beta \rightarrow \beta_0$; величины $T_{11}/\sqrt{x_1}$ и $T_{12}/\sqrt{x_1}$ представляет собой соответственно потенциальное и вихревое (постоянная вдоль линии тока) слагаемые.

Неограниченное возрастание T_{12} свидетельствует о незаконности применения метода малых возмущений при $\beta \approx \beta_0$. Однако можно не интересоваться поведением решения в области, в действительности занятой пограничным слоем. На границе же пограничного слоя за счет малости отрицательной степени в выражении для ω величина T_{12} будет иметь нормальный порядок.

Из уравнения Бернулли и (1.10) следует

$$u_1^{(1)} = u_1 \cos \theta_0 + v_1 \sin \theta_0 = u_{11}^{(1)} + u_{12}^{(1)} \quad (1.11)$$

где

$$u_{11}^{(1)} = \frac{1}{\kappa M^2 \sqrt{x_1}} \frac{p_1(\beta_0)}{p_0(\beta_0)}, \quad u_{12}^{(1)} = \frac{\omega(\beta_0)}{\kappa(\kappa - 1) M^2 \sqrt{x_1}}, \quad M^2 = \frac{\kappa k^2 p_k}{\kappa p_k \cos^2 \theta_0}$$

Согласно закону подобия обтекания тонких тел [9] при $M_\infty \theta_0 \gg 1$ величины ρ_0/θ_0^2 , v_0/θ_0 и ρ_0 зависят лишь от переменной

$$t = (\beta - \beta_0) / (\beta^* - \beta_0)$$

и параметра $M_\infty \theta_0$. Пусть

$$P = (p_1/p_0) (\theta_0/\theta_1), \quad W = v_1/\theta_1$$

Тогда уравнения (1.9) примут вид:

$$\begin{aligned} P' &= A_1(t) W + B_1(t) P + C_1(t) \\ W' &= A_2(t) W + B_2(t) P + C_2(t) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Коэффициенты $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, величины $P(1)$, $W(1)$, $k_0 = k\theta_0/\theta_1$ и $t^* = \beta^*/\beta_0$ будут зависеть лишь от параметра $M_\infty \theta_0$.

Следовательно, и решение системы (1.12) зависит лишь от $M_\infty \theta_0$. Функции $P(t)$ и $W(t)$ для различных чисел M приведены на фиг. 1, величина t^* — на фиг. 2. Из (1.6) при $\beta = \beta_0$ следует

$$\varepsilon \frac{p_1}{p_0} = \frac{V_0}{\theta_0} \frac{P}{W}, \quad \varepsilon \theta_1 = \frac{V_0}{W} \quad (1.13)$$

§ 2. Вязкая область. Основные уравнения. Система уравнений пограничного слоя ненулевой толщины на конусе имеет вид [2]

$$\begin{aligned} \rho u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \rho v^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} &= -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left(r \mu \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} \right) \\ \rho u^{(1)} \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v^{(1)} \frac{\partial i}{\partial y} &= u^{(1)} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left(r \frac{\mu}{\sigma} \frac{\partial i}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^{(1)} r) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^{(1)} r) &= 0, \quad r = x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

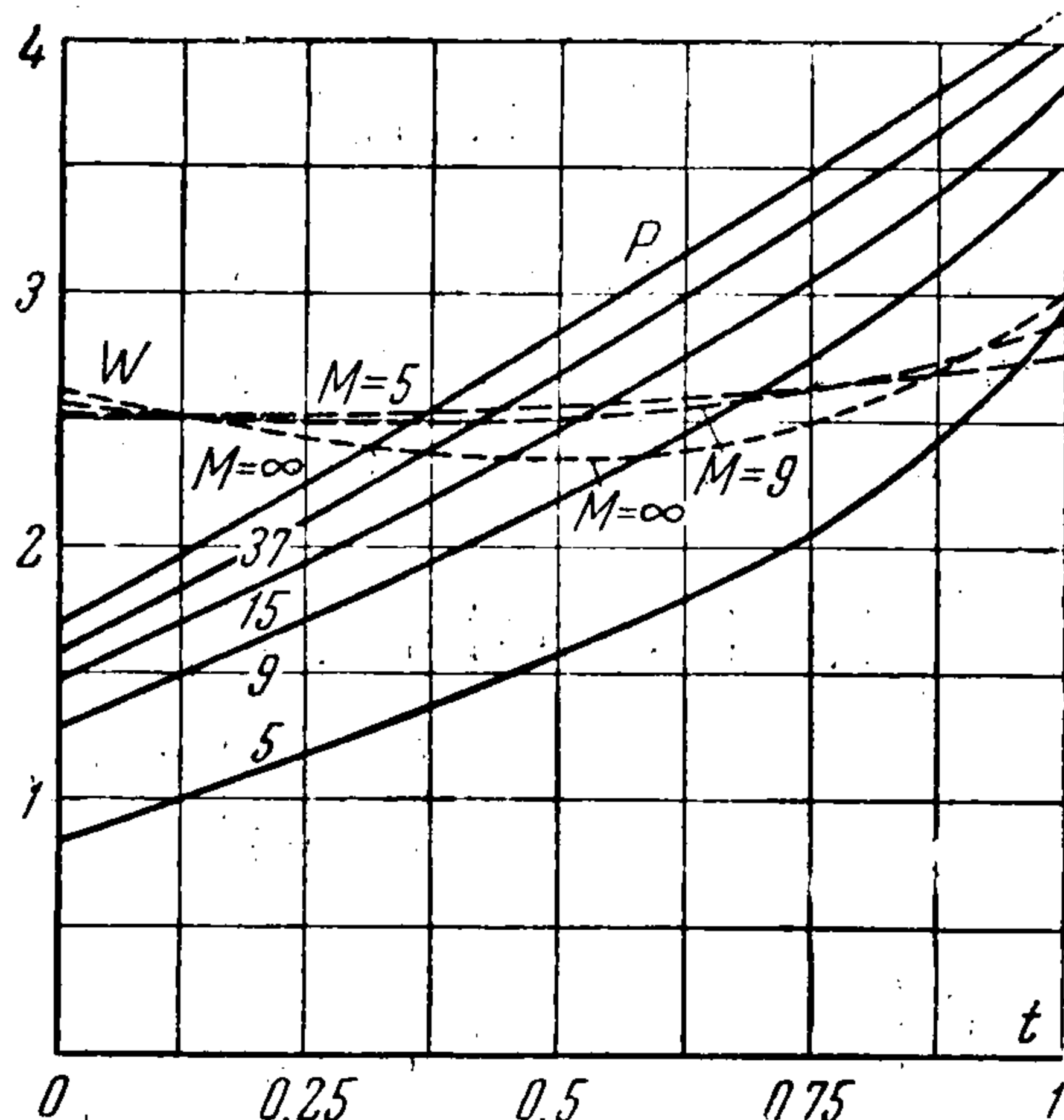
Здесь i , μ и $\sigma = \text{const}$ — энтальпия, вязкость и число Прандтля¹. Видоизменяя известное преобразование Крокко, заменим переменные (x, y) на $(\xi = x^3/3, u^{(1)})$ и искомую функцию $u^{(1)}$ на $\tau = (\mu/x) (\partial u/\partial y)$. Вводя функцию тока Ψ , из первого и последнего уравнений (2.1) получим

$$\frac{1}{\beta_0} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \frac{\mu}{\tau} (1 + K) \frac{dp}{d\xi} - \frac{\partial}{\partial u^{(1)}} [\tau (1 + K)], \quad \frac{1}{\beta_0} \frac{\partial \Psi}{\partial u^{(1)}} = \frac{\rho \mu u^{(1)}}{\tau} (1 + K) \quad (2.2)$$

Здесь $K = y/\beta_0 x \sim \varepsilon$. Ниже размерные величины $u^{(1)}$, ρ , i , μ , ρ , τ , x , y без изменения обозначений всюду соответственно заменим на безразмерные:

$$\frac{u^{(1)} \cos \theta_0}{u_k}, \quad \frac{\rho}{\rho_k}, \quad \frac{i}{i_k}, \quad \frac{\mu}{\mu_k}, \quad \frac{\rho}{\rho_\infty U_\infty^2}, \quad \frac{\tau \cos^2 \theta_0 L \sqrt{R}}{\rho_k u_k^2}, \quad \frac{x}{L}, \quad \frac{y}{L}, \quad R = \frac{\rho_k u_k L}{\mu_k \cos \theta_0}$$

¹ Для газов $\sigma = \sigma(i, p)$ — мало изменяющаяся функция и влияние переменности σ на решение может быть учтено методом работы [10].



Фиг. 1

Сделаем замену переменных $(\xi, u^{(1)}) \rightarrow (\xi, \eta = u^{(1)}/u_\delta^{(1)})$ и введем обозначения

$$F(i, p) = \frac{\mu p}{\mu_k, p_k}, \quad \frac{\partial F(i, p)}{\partial p} = f, \quad K = \varepsilon K_0, \quad u_\delta^{(1)} = u_\delta$$

(Для воздуха в широком диапазоне температур $\partial F/\partial i \ll 1$, что будет использовано ниже.) Тогда после исключения Ψ из (2.2) и обычных преобразований получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} [(1 + \varepsilon K_0) \tau] + \eta u_\delta^3 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1 + \varepsilon K_0}{\tau} F \right) &= \quad (2.3) \\ &= \frac{u_\delta}{\kappa M^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\mu (1 + \varepsilon K_0)}{\tau} \right] \frac{d p}{d \xi} p_0 + u_\delta^2 \eta^2 \frac{d u_\delta}{d \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(F \frac{1 + \varepsilon K_0}{\tau} \right) \\ \tau^2 \frac{\partial^2 i}{\partial \eta^2} + (1 - \sigma) \tau \frac{\partial \tau}{\partial \eta} \frac{\partial i}{\partial \eta} + (\kappa - 1) M^2 \sigma u_\delta^2 \tau^2 - \sigma \eta u_\delta^3 F \frac{\partial i}{\partial \xi} &= \\ &= - \frac{\sigma}{\kappa M^2} \mu u_\delta \left[(\kappa - 1) M^2 \eta u_\delta^2 + \frac{\partial i}{\partial \eta} \right] \frac{d p}{d \xi} p_0 - \\ &\quad - \sigma \eta^2 u_\delta^2 F \frac{d u_\delta}{d \xi} \frac{\partial i}{\partial \eta} - \varepsilon (1 - \sigma) \frac{\tau^2}{1 + \varepsilon K_0} \frac{\partial K_0}{\partial \eta} \frac{\partial i}{\partial \eta} \end{aligned}$$

Первое уравнение (2.1) и температурные условия дают при $\eta = 0$

$$\tau \frac{\partial}{\partial \eta} [\tau (1 + \varepsilon K_0)] = \frac{u_\delta \mu}{\kappa M^2} (1 + \varepsilon K_0) \frac{d p}{d \xi} p_0, \quad i = i_w \quad \text{или} \quad \frac{\partial i}{\partial \eta} = 0 \quad (2.4)$$

Согласно (1.2) в (2.3) — (2.4) следует положить

$$p/p_0 = 1 + \varepsilon p_1(\beta_0) / \sqrt{x} p_0(\beta_0)$$

§ 3. Вязкая область. Решение уравнений. Решение системы (2.3) ищем в виде

$$\tau = \tau_* + \varepsilon \tau_1 + \dots, \quad i = i_* + \varepsilon i_1 + \dots \quad (3.1)$$

Пусть $\tau_* \rightarrow 0$, $i_* \rightarrow 1$ при $\eta \rightarrow 1$. Тогда, полагая

$$\tau_* = g_*(\eta) \sqrt{2\xi}, \quad i_* = i_*(\eta)$$

и отбрасывая в (2.3) величины порядка ε , для $g_*(\eta)$ и $i_*(\eta)$ имеем

$$\begin{aligned} g_* g_*'' &= - \eta F(i_*, p_0), \quad (g_*'(0) = g_*(1) = 0), \quad i_* = 1 + \sigma(\kappa - 1) M^2 J_1 + e J_2 \\ J_1 &= \int_\eta^1 g_*^{\sigma-1} \int_0^\eta g_*^{1-\sigma} d\eta_1 d\eta, \quad J_2 = \int_\eta^1 g_*^{\sigma-1} d\eta, \quad e = \frac{i_w - i_e}{J_2(0)} \\ i_e &= 1 + \sigma(\kappa - 1) M^2 J_1(0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решение этой системы для произвольного вида F рассмотрено в работах [10,11].

Рассмотрим условия для τ_1 и i_1 на внешней границе. Переход из плоскости $\xi\eta$ в физическую плоскость xu осуществляется при $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon = 0$ соответственно по формулам

$$y = \frac{u_\delta}{x \sqrt{R}} \int_0^\eta \frac{\mu}{\tau} d\eta_1, \quad y = \sqrt{\frac{2x}{3R}} \int_0^\eta \frac{\mu(i_*, p_0)}{g_*} d\eta = \sqrt{\frac{2x}{3R}} h \quad (3.3)$$

Некоторой фиксированной точке (x, y) соответствует значение $\eta(x, y)$

$$\begin{aligned} \eta(x, y) &= \eta_0(y/\sqrt{x}) + \varepsilon\eta_1(x, y) = \frac{u_0^{(1)} + \varepsilon u_1^{(1)}}{1 + \varepsilon u_{1\delta}} = \\ &= u_0^{(1)} + \varepsilon(u_1^{(1)} - u_0^{(1)}u_{1\delta}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Функция $\eta_0(y/\sqrt{x})$ определяется из второй формулы (3.3), а η_1 — из условия равенства правых частей обеих формул. В той же точке функции τ и i равны $\tau_*(\eta_0)$ и $i_*(\eta_0)$ при $\varepsilon = 0$ и

$$\tau = \tau_*(\eta_0) + \varepsilon\left(\eta_1 \frac{\partial \tau_*}{\partial \eta} + \tau_1\right) \dots, \quad i = i_*(\eta_0) + \varepsilon(i_1 + i_*' \eta_1) \quad (3.5)$$

в общем случае. Вблизи границы имеем $\partial u_0^{(1)}/\partial \beta \sim \varepsilon\beta$, $\partial T_0/\partial \beta \sim \varepsilon\beta$ при стремлении извне [см. (1.2)] и

$$\partial u_0^{(1)}/\partial y \sim g_* \approx 0, \quad \partial i_*/\partial y \sim g_*' \approx 0$$

при стремлении изнутри. Следовательно, граничные условия не изменяются при переносе их с истинной границы пограничного слоя на y_δ -границу при $\varepsilon = 0$, определяемую по (3.3), и

$$u_{1\delta} = u_{11}^{(1)} + u_{12}^{(1)}, \quad i = i_* + \varepsilon T_1/T_0 \sqrt{x} \quad \text{при } y = y_\delta$$

Так как [10]

$$u_0^{(1)} = 1 + g_*/g_*' \approx 1 \quad \text{при } \eta \approx 1$$

то согласно (3.4) — (3.5) — граничные условия для τ_1 и i_1 должны быть подчинены требованию

$$\eta_1 \approx 0, \quad i_1 + \eta_1 i_*' \approx T_1/T_0 \sqrt{x} \quad \text{при } \eta = \eta_\delta \approx 1 \quad (3.6)$$

причем будем требовать удовлетворения этих условий (и, следовательно, определять y_δ) при $\gamma_\delta = 0,98 \div 0,999$.

Подставляя (3.1) в (2.3) и приравнявая нулю сумму членов порядка ε , получим систему линейных уравнений в частных производных для τ_1 и i_1 , которую можно разбить на три независимые группы, положив

$$\tau_1 = \tau_{11} + \tau_{12} + \tau_{13}, \quad i_1 = i_{11} + i_{12} + i_{13}, \quad \eta_1 = \eta_{11} + \eta_{12} + \eta_{13}$$

Здесь τ_{11} , i_{11} и τ_{12} , i_{12} обусловлены соответственно потенциальной и вихревой составляющими невязкого потока, а τ_{13} , i_{13} — присутствием в уравнениях величины K_0 . Согласно (1.10) и (3.3) имеем при $\beta = \beta_\delta$

$$\frac{T_{12}}{T_0} = \frac{k}{\alpha} \omega(\gamma_\delta) = \frac{k}{\alpha} \left(\frac{2y_\delta}{x\beta_0}\right)^{-1/4} = \varepsilon^{-1/4} \frac{k}{\alpha} \left(\frac{2}{\beta_0} \sqrt{\frac{2}{3R}}\right)^{-1/4} h_\delta^{-1/4} x^{1/8}, \quad h_\delta = h(\gamma_\delta)$$

Так как $y_\delta/\beta_0 x \sim \varepsilon$, то формально величина $\varepsilon T_{12}/T_0 \sqrt{x}$ имеет порядок малости $\varepsilon^{3/4}$ при $y = y_\delta$, т. е. более низкий, чем $\varepsilon T_{11}/T_0 \sqrt{x}$, однако это различие несущественно, так как $\varepsilon^{-1/4} \sim 1$ для практически интересных значений ε . Заметив, что

$$x^{1/2} = 3^{1/2} \xi^{1/2}, \quad \varepsilon K_0 = \frac{y}{\beta_0 x} = \frac{h}{\beta_0} \left(\frac{3}{2} R x\right)^{-1/2}$$

будем искать решения в виде

$$\begin{aligned}
 \tau_{11} &= \frac{3^{-1/6} \xi^{-1/6} p_1}{\kappa M^2 \sqrt{2\xi} p_0} g_1(\eta), & i_{11} &= \frac{3^{-1/6} \xi^{-1/6} p_1}{\kappa M^2 p_0} [j_1(\eta) + (\kappa - 1) M^2 (1 - 2\sigma J_1)] \\
 \tau_{12} &= \frac{3^{1/6} k \xi^{-1/6}}{\kappa (\kappa - 1) M^2 V \sqrt{2\xi}} \left(\frac{\beta_0 \sqrt{R}}{2\sqrt{2}} \right)^{1/4} g_2(\eta), & \varepsilon \tau_{13} &= \frac{3^{-2/3} \xi^{-1/6}}{\beta_0 \sqrt{R\xi}} g_3(\eta) \\
 i_{12} &= \frac{3^{-1/6} k \xi^{-1/6}}{\kappa} \left(\frac{\beta_0 \sqrt{R}}{2\sqrt{2}} \right)^{1/4} [j_2(\eta) - 2\sigma h \delta^{-1/4} J_1] \\
 \varepsilon i_{13} &= \frac{3^{-2/3} \sqrt{2\xi}^{-1/6}}{\beta_0 \sqrt{R}} j_3(\eta), & \eta_{11} &= \frac{3^{-1/6} \xi^{-1/6} p_1}{\kappa M^2 p_0} \eta_{*1}(\eta) \\
 \eta_{12} &= \frac{3^{-1/6} k \xi^{-1/6}}{\kappa} \left(\frac{\beta_0 \sqrt{R}}{2\sqrt{2}} \right)^{1/4} \eta_{*2}(\eta), & \varepsilon \eta_{13} &= \frac{3^{-1/6} \xi^{-1/6} \sqrt{2}}{\beta_0 \sqrt{3R}} \eta_{*3}(\eta)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

При этом задача сводится к решению трех систем вида:

$$g_*^2 g_m'' - \alpha_m \eta F g_m = \varphi_m, \quad g_m^2 j_m'' + (1 - \sigma) g_* g_*' j_m' + \beta_m \sigma \eta F j_m = \psi_m \tag{3.8}$$

$$(m = 1, 2, 3; \alpha_1 = \alpha_3 = \frac{2}{3}, \alpha_2 = \frac{3}{4}, \beta_1 = \beta_3 = \frac{1}{3}, \beta_2 = \frac{1}{4})$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= \left(3F - \frac{2}{3} \kappa f M^2 \right) \eta g_* - \frac{1}{3} g_*^2 \left[\left(\frac{\mu}{g_*} \right)' - \eta^2 \left(\frac{F}{g_*} \right)' \right] \\
 \varphi_2 &= h \delta^{-1/4} F \left(3\eta g_* - \frac{1}{4} \eta^2 g_*' \right), & \varphi_3 &= -g_*^2 (h g_*)'' - \frac{2}{3} \eta g_* F h \\
 \psi_1 &= -(1 - \sigma) i_*' g_*^2 \left(\frac{g_1}{g_*} \right)' + \frac{2}{3} \sigma^2 (\kappa - 1) M^2 \eta F J_1 + \\
 &\quad + \frac{1}{3} \sigma (\kappa - 1) M^2 (\mu - F) \eta + \frac{1}{3} \sigma (\mu - \eta^2 F) i_*' \\
 \psi_2 &= -\frac{1 - \sigma}{(\kappa - 1) M^2} g_*^2 i_*' \left(\frac{g_2}{g_*} \right)' + \frac{1}{2} \sigma^2 \eta F h \delta^{-1/4} - \frac{\sigma}{4(\kappa - 1) M^2} \eta^2 F i_*' h \delta^{1/4} \\
 \psi_3 &= -(1 - \sigma) g_*^2 i_*' \left(h + \frac{g_3}{g_*} \right)'
 \end{aligned}$$

Здесь и ниже¹

$$F = F(i_*, p_k), \quad f = f(i_*, p_k), \quad \mu = \mu(i_*, p_k)$$

Из (3.7) и (3.3) следует

$$\eta_{*m} = \frac{g_*}{\mu} \left(\int_0^\eta \frac{\mu g_m}{g_*^2} d\eta - \int_0^\eta [j_m - (\kappa - 1) M^2 (1 - \sigma J_1)] \frac{\mu'}{g_*} d\eta - \int_0^\eta \frac{\mu}{g_*} d\eta \right) \tag{3.9}$$

С учетом (3.7) условия (3.6) и (2.4) примут вид:

$$j_1 - 2\sigma (\kappa - 1) M^2 J_1 + \eta_{*1} i_*' = 0, \quad j_2 - 2\sigma h \delta^{-1/4} J_1 + \eta_{*2} i_*' = h \delta^{-1/4} \tag{3.10}$$

$$j_3 + \eta_{*3} i_*' = 0, \quad \eta_{*m} = 0 \quad \text{при } \eta = \eta_\delta$$

$$g_* g_1' = -\frac{1}{3} \mu, \quad g_2' = 0, \quad g_3' = -\mu \tag{3.11}$$

$$j_1 + (\kappa - 1) M^2 = 2\sigma (\kappa - 1) M^2 J_1, \quad j_2 = 2\sigma h \delta^{-1/4} J_1,$$

$$j_3 = 0 \quad \text{или} \quad i_m' = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

¹ Без ограничения $\partial F / \partial i \ll 1$ правые части φ_m содержали бы члены вида $f_m \cdot (\partial F / \partial i)$ и решение системы (3.8) было бы значительно сложнее.

Пусть g_m^* и j_m^* — решения уравнений (3.8) при $\varphi_m = \psi_m = 0$, удовлетворяющие условиям $g_m^*(0) = j_m^*(0) = 1$ и $g_m^{*'}(0) = j_m^{*'}(0) = 0$. Тогда общее решение уравнений (3.8) имеет вид (A_m, B_m, C_m — постоянные):

$$g_m = -g_m^* \int_{\eta}^1 \frac{1}{g_m^{*2}} \int_0^{\eta} \frac{\varphi_m g_m^*}{g_*^2} d\eta d\eta - g_m^{*'}(0) g_m^{**} + A_m g_m^* \quad (3.12)$$

$$j = j_m^* H_m(\eta) + C_m j_m^{**} + B_m j_m^* \quad (3.13)$$

$$g_m^{**} = g_m^* \int_{\eta}^1 \frac{d\eta}{g_m^{*2}}, \quad j_m^{**} = j_m^* \int_{\eta}^1 \frac{g_*^{\sigma-1}}{j_m^{*2}} d\eta, \quad H_m(\eta) = \int_0^{\eta} \frac{g_*^{\sigma-1}}{j_m^{*2}} \int_0^{\eta} \frac{\psi_m j_m^*}{g_*^{\sigma+1}} d\eta d\eta$$

Здесь g_m^{**} и j_m^{**} — линейно независимые с g_m^* и j_m^* решения тех же однородных уравнений. Легко проверить, что при $\eta \rightarrow 1$ решения первого и второго однородных уравнений (3.8) имеют вид:

$$\text{const } (-g_*')^{\alpha_m}, \quad \text{const } g_* (-g_*')^{-(1+\alpha_m)}$$

$$\text{const } (-g_*')^{-\beta_m}, \quad \text{const } g_*^{\sigma} (-g_*')^{\beta_m-1}$$

Из структуры уравнения следует, что g_m^* — возрастающая функция и, следовательно, имеет вид: $\text{const } (-g_*')^{\alpha_m}$ при $\eta \approx 1$. Оба решения j_m^* и j_m^{**} убывают при $\eta \rightarrow 0$, но ниже, в приложении, будет показано, что именно $j_m^* \rightarrow \text{const } (-g_*')^{-\beta_m}$. При $\eta \approx 1$ и $\sigma \leq 2$ справедливо следующее¹:

$$\mu = 1 + \mu' (i_* - 1), \quad \varphi_1 = \text{const } (1 - \sigma) g_*^{\sigma} + \text{const } g_*$$

$$i_* - 1 = \text{const} \left(\frac{g_*^{\sigma}}{g_*'} \right), \quad g_1 \approx A_1 g_1^* + \text{const} \left(\frac{g_*^{\sigma}}{g_*'^2} \right) + \text{const } g_*$$

$$\varphi_1 \approx \text{const } A_1 g_*^{\sigma-1} (-g_*')^{3/2} + \text{const} (-g_*^{2\sigma-1}/g_*') + \text{const} (-g_*^{\sigma}/g_*')$$

Интеграл H_1 сходится при $\sigma \geq 1/2$ и расходится при $\sigma < 1/2$. Положив $B_1 = B_{12} + B_{11}$, где $B_{11} = -H(1)$ при $\sigma \geq 1/2$ и $B_{11} = 0$ при $\sigma < 1/2$, будем иметь при $\eta \approx 1$

$$j_1 = \text{const } A_1 j_1^* g_*^{\sigma-1} + \text{const } g_*^{2\sigma-1} [g_*'^3 (\sigma-1)(2\sigma-1)]^{-1} + \\ + \text{const } g_*^{\sigma} (-g_*')^{-1} + B_{12} j_1^* \quad (3.14)$$

При $\sigma < 1$ эти формулы справедливы для тех η , при которых $(1-\sigma)g_*'^2 \geq 1$, $(2\sigma-1)g_*'^2 \geq 1$. При $\sigma \approx 1$ или $\sigma \approx 1/2$ асимптотический вид для j_{*1} получим, положив в (3.14) формально $(1-\sigma)g_*'^2 = 1$ или $(2\sigma-1)g_*'^2 = 1$ соответственно. Из (3.9) можно получить

$$\eta_{*1} = \text{const } A_1 (-g_*')^{-1/2} + \text{const } g_*^{\sigma} [g_*'^3 (\sigma-1)]^{-1} + \text{const } g_* g_*'$$

¹ В справедливости приводимых ниже асимптотических оценок можно убедиться последовательным применением правила Лопиталья и теоремы Коши о среднем.

Функция $(-g_*')^{-1/3}$ убывает очень медленно $((-g_*')^{-1/3} = 0.69$ при $\eta = 0.999$, если $F = 1$), поэтому из условия $\eta_{1*} \approx 0$ следует $A_1 = 0$. При $\eta \approx 1$ справедливо соотношение, которое приводим без доказательства:

$$j_m^* H_m + \eta_{*m} i_*' = \text{const } j_m^* + O(g_*^\sigma g_*') \quad (3.15)$$

Это соотношение дает возможность определить B_m из условий (3.10) при любом σ . Если $\sigma > 1/2$, то $\eta_{*1} i_*' \rightarrow 0$ и $j_1 \approx 0$ при $\eta \rightarrow 1$; следовательно¹, $B_1 = -H_1(1)$.

При $m = 2$ решение уравнения (3.8) имеет вид:

$$g_2 = -h_\delta^{-1/4} \eta g_*' + A_2 g_2^*$$

с учетом которого имеем при $\eta \approx 1$

$$\eta_{*2} \approx h_\delta^{-1/4} + \frac{4}{3} A_2 g_* g_2^{*'}, \quad g_2^* \approx a_0 (-g_*')^{3/4}, \quad (h_\delta = -g_*'(\eta_\delta) + h_0, \quad h_0 = \text{const})$$

Полагая $\eta_{*2}(\eta_\delta) = 0$ и, следовательно, $j_2(\eta_\delta) \approx h_\delta^{-1/4}$, будем иметь

$$A_2 = -\frac{3}{4} (h^{1/4} g_* g_2^{*'})_{\eta=\eta_\delta}^{-1} \approx -\frac{1}{a_0} \left[\frac{-g_*'(\eta_\delta)}{h_\delta} \right]^{1/4}, \quad B_2 = \frac{h_\delta^{-1/4}}{j_2^*(\eta_\delta)} - H_2(\eta_\delta) \quad (3.16)$$

В пределах $\eta_\delta = 0.98 + 0.999$ величина A_2 меняется незначительно, однако при этом вследствие того, что $h_0 \gg -g_*'(\eta_\delta)$ при $M \gg 1$, она существенно отличается от своего предельного при $\eta_\delta \rightarrow 1$ значения, равного $-1/a_0$. Хотя H_2 имеет при $\eta \rightarrow 1$ особенность вида $[g^{\sigma-1}/(1-\sigma)g_*'^2]$, величина B_2 также мало меняется при $\eta_\delta = 0.98 \div 0.999$. Согласно (3.15) величина B_2 имеет при $\eta_\delta \rightarrow 1$ конечное значение, вообще говоря, отличное от выбранного нами значения (3.16).

Формула (3.12) при $m = 3$ преобразуется к виду

$$g_3 = -g_* h + H_0(\eta) + A_3 g_1^*$$

где $H_0(\eta)$ обозначает первый интеграл в правой части (3.12), в котором функция φ_m заменена на $-4/3 \eta h F g_*$. При $\eta \approx 1$

$$g_3 = A_3 g_1^* + O(g_* g_*'), \quad j_3 = \text{const } A_3 j_1^* g_*^{\sigma-1} + H_3(1) j_1^* + O(g_*^\sigma / g_*'^2) + B_3 j_1^* \\ \eta_{*3} = \text{const } A_3 (-g_*')^{-1/3} + O(g_* g_*')$$

Из (3.10) следует, что $A_3 = 0$ и $B_3 = -H_3(1)$. Заметим, что $j_3 \equiv 0$ при $\sigma = 1$. Постоянные C_m выбираются из условий при $\eta = 0$ и равны нулю при $j_m'(0) = 0$.

Следует заметить, что при $m = 1$ или $m = 3$, так же как и в основном приближении, требование непрерывности поля скоростей и температур при переходе из вязкой области в невязкую привело по существу к граничным условиям асимптотического пограничного слоя. В случае $m = 2$ схема асимптотического в классическом смысле пограничного слоя не обеспечивает практического совпадения параметров вязкого и невязкого решения на рационально выбранной границе раздела между ними,

¹ Уравнения (3.8) при $m = 1$ идентичны уравнениям работы [10], где $\alpha_1 = 2n + 1$, $\beta_1 = -2n$, n — натуральное. В указанной работе использовалось условие $j_{n1} = 0$ при $\eta = 1$. Это условие справедливо согласно изложенному лишь при $\sigma > 1/2$, и более строгим было бы использовать (3.10).

так как при этом стремление функций к своим предельным при $\eta = 1$ значениям столь медленное ($g_2 \sim -(g'_*)^{-1/4}$, $\eta_{*2} \sim (-g'_*)^{-5/4}$ при $\eta \rightarrow 1$, если $A_2 = -1/a_0$), что эти значения могут быть формально достигнуты лишь при величинах y , далеко выходящих за пределы пограничного слоя.

В заключение выведем формулу для V_0 . Из первого и последнего уравнений (1.1) для пластины ($dp/dx = 0$, $r \rightarrow \infty$) следует в размерных величинах

$$\rho v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_u - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_y \frac{\partial \Psi}{\partial u} \Big|_x, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_u = -\frac{\partial \tau_*}{\partial u}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial u} \Big|_x = \frac{\rho \mu}{\tau_*}, \quad \tau_* = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Подставляя сюда $\partial u / \partial x = -(\partial y / \partial x) / (\partial y / \partial u)$ и переходя к безразмерным величинам, получим

$$\rho v = \frac{g'_* + \rho \eta h}{\sqrt{2xR}}, \quad v_p = \frac{g'_* + h}{\sqrt{2xR}} = \frac{h_0}{\sqrt{2xR}}, \quad h_0 = \int_0^1 \frac{\mu - \eta F}{g_*} d\eta, \quad V_0 = h_0 \sqrt{\frac{3}{2R}}$$

§ 4. Анализ результатов. Для получения более общих, хотя и менее точных формул при численных расчетах было принято $F = F_0 = \text{const}$, $\mu = F_0 i$. В этом случае [10]

$$g_* = \sqrt{F_0} g_0, \quad h_0 = \sqrt{F_0} [I_0 + \sigma(x-1)M^2 I_1 + e I_2], \quad h = -\sqrt{F_0} g_0' + h_0 = \sqrt{F_0} h_1$$

$$g_1 = \sqrt{F_0} [(0.4xM^2 - 1.8)g_0 + g_{11} + (x-1)M^2 g_{12} + e g_{13}].$$

$$g_2 = -F_0^{3/8} h_1^{-1/4} \left[\eta g_0' + \frac{1}{a_0} (-g_0')^{1/4} g_2^* \right], \quad g_3 = F_0 [g_{31} + (x-1)M^2 g_{32} + e g_{33}]$$

$$j_1 = (x-1)M^2 j_{11} + (x-1)^2 M^4 j_{12} + (x-1)M^2 e j_{13} + e^2 j_{14} + e j_{15} + C_1 j_1^{**} \quad (4.1)$$

$$j_2 = (F_0 h_1)^{-1/4} \left[j_{21} + \frac{e}{(x-1)M^2} j_{22} + C_2 j_2^{**} \right]$$

$$j_3 = \sqrt{F_0} [(x-1)M^2 j_{31} + (x-1)^2 M^2 j_{32} + e(x-1)M^2 j_{33} + e^2 j_{34} + e j_{35} + C_3 j_3^{**}]$$

Функция $g_0(\eta)$ удовлетворяет уравнению (3.2) при $F = 1$. Все входящие в правые части (4.1) функции зависят лишь от σ . Для $\sigma = 0.725$ значения некоторых из этих функций при $\eta = 0$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

m	g_{m1}	g_{m2}	g_{m3}	j_{m1}	j_{m2}	j_{m3}	j_{m4}	j_{m5}	j_m^{**}
1	0.668	0.211	0.500	-0.0036	-0.0071	0.630	1.62	1.12	1.74
2				-0.543	0.97				1.67
3	0.488	0.174	0.450	-0.060	-0.110	-0.048	-0.061	-0.121	

$$[I_0(1) = 1.22, \quad I_1(1) = 1.08, \quad I_2(1) = 1.87, \quad a_0 = 1.43]$$

Величина индуцированного давления на поверхности конуса $(p - p_0)/p_0$ и толщина пограничного слоя при $\sigma = 0.725$ и $x = 1.4$ определяются формулами

$$\frac{p - p_0}{p_0} = \left(0.515 + 8.3 \frac{i_w}{M_\infty^2 i_\infty} - 0.86 \beta_0^2 \alpha_2 \right) \alpha_1 \Omega \quad (4.2)$$

$$\frac{y_\delta}{\beta_0 x} = \left(0.34 + 5.5 \frac{i_w}{M_\infty^2 i_\infty} + 10.7 \beta_0^2 \alpha_2 \right) \alpha_3 \Omega \quad (4.3)$$

В равенствах (4.2) и (4.3) приняты обозначения

$$\Omega = \frac{\chi}{M_\infty^2 \beta_0^2} = \frac{\kappa - 1}{2\beta_0^2} \sqrt{\frac{U_\infty \mu_\infty F_0 F_1}{\kappa x p_\infty}}$$

$$\chi = \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^3 \left(\frac{F_0 F_1}{R_\infty}\right)^{1/2}, \quad F_1 = \frac{\mu_k T_\infty}{\mu_\infty T_k}, \quad R_\infty = \frac{U_\infty \rho_\infty x}{\mu_\infty}$$

Здесь и ниже i_w и x — размерные величины, коэффициенты α_i зависят лишь от $M_\infty \beta_0$ и представлены на фиг. 2. Тепловые потоки к поверхности в размерных величинах равны $q = -x u_s (\tau / \sigma) (\partial i / \partial y) |_{\eta=0}$, откуда следует

$$\varepsilon \frac{q_1}{q_0} = \left(\varepsilon \frac{\partial i_1}{\partial \eta} + \varepsilon \frac{\tau_1}{\tau_0} - \varepsilon u_{1s} \right)_{\eta=0}, \quad q_1 = q_{11} + q_{12} + q_{13}$$

Величины q_{11} , τ_{11} и т. д. для тех же σ и κ определяются по формулам

$$\frac{\varepsilon \tau_{11}}{\tau_0} = \left[4.55 \left(\frac{i_w}{M_\infty^2 i_\infty} \right)^2 + 3.86 \frac{i_w}{M_\infty^2 i_\infty} + 0.222 \right] \alpha_1 \Omega$$

$$\frac{\varepsilon \tau_{12}}{\tau_0} = - \left(0.085 + 1.35 \frac{i_w}{i_\infty M_\infty^2} \right)^{3/4} \alpha_4 \beta_0^2 \chi^{3/4}$$

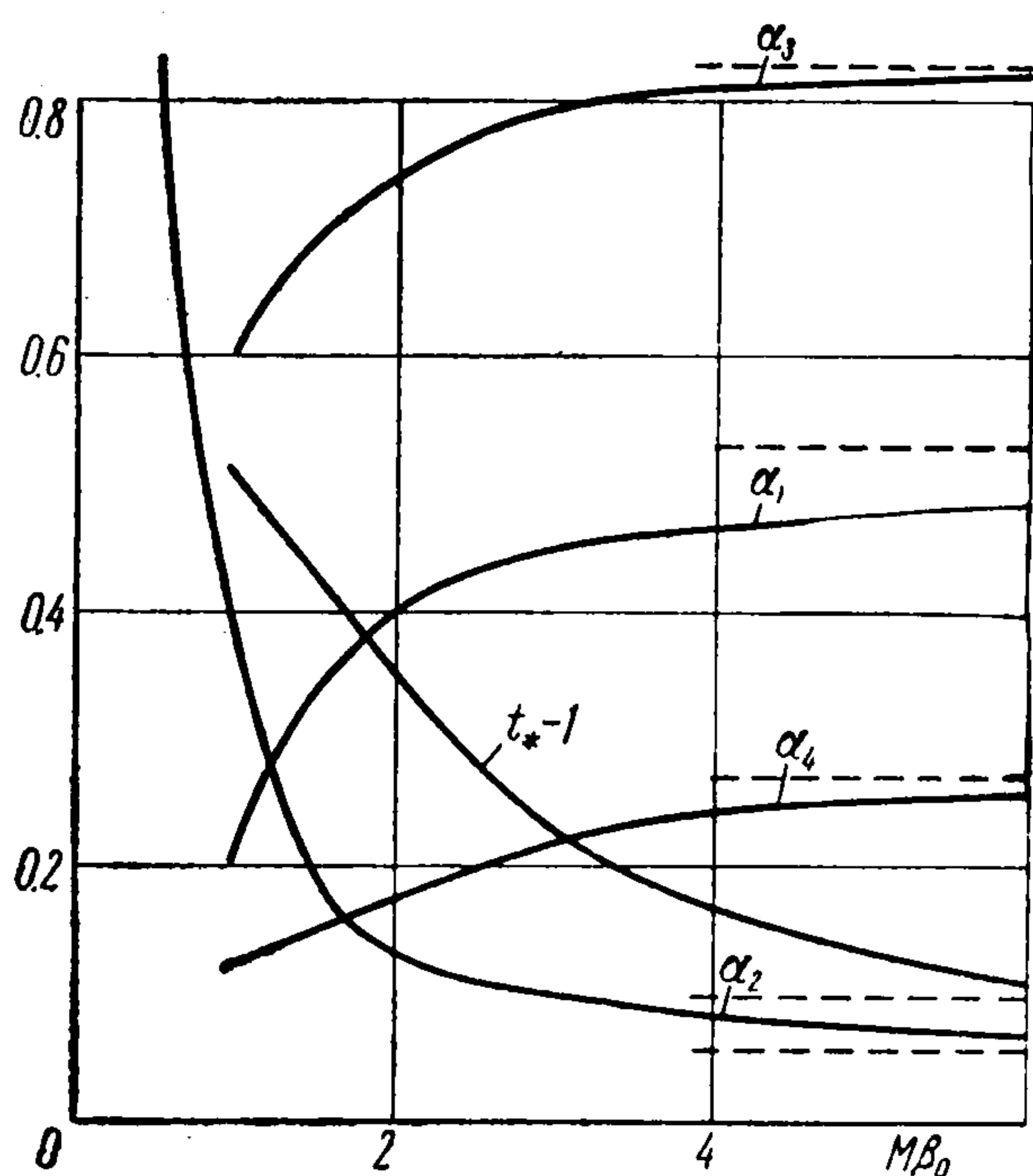
$$\frac{\varepsilon \tau_{13}}{\tau_0} = \left(2.84 \frac{i_w}{i_\infty M_\infty^2} + 0.123 \right) \alpha_3 \Omega \quad (4.4)$$

$$\frac{\varepsilon q_{11}}{q_0} = \left[-0.95 \left(\frac{i_w}{i_\infty^2 M^2} \right)^2 + 3.27 \frac{i_w}{i_\infty M^2} + 0.207 \right] \alpha_1 \Omega$$

$$\frac{\varepsilon q_{13}}{q_0} = \left(2.98 \frac{i_w}{i_\infty M_\infty^2} + 0.161 \right) \alpha_3 \Omega$$

Члены в (4.2) — (4.4), содержащие β_0^2 , малы и при $M_\infty \gg 1$ несущественны (в формулах (4.4) эти члены опущены). Этот факт является подтверждением закона подобия сверхзвукового течения вязкого газа [2], согласно которому критериями подобия являются параметры

$$\chi, M_\infty \beta_0 \quad (i_w / i_\infty M_\infty^2)$$



Фиг. 2

Расчеты показали, что равновесная температура поверхности практически не зависит от ε и остается равной своему значению при $\varepsilon = 0$. Члены, содержащие j_{11} , j_{12} , j_{31} , j_{32} , пренебрежимо малы по сравнению с другими в выражениях для q_{1m} и в (4.4) опущены. Из (4.4) следует, что $\tau_{12} / \tau_{11} \sim q_{12} / q_{11} \sim \beta_0^4 M_\infty^{3/4} R_\infty^{1/2} \ll 1$ при $R_\infty \leq 10^8$ и $M_\infty \leq 20$. Следовательно, завихренность потока вследствие искривленности ударной волны не оказывает заметного влияния на характеристики пограничного слоя.

Из формул (4.4) следует, что увеличение толщины пограничного слоя при $M_\infty \gg 1$ ведет к увеличению сопротивления трения и, что особенно важно, к увеличению тепловых потоков к поверхности тела.

Особое внимание следует обратить на то обстоятельство, что τ_{13} , q_{13} имеют тот же порядок величины, что и τ_{11} , q_{11} . Это значит, что на осесимметричных телах в отличие от плоских само по себе утолщение пограничного слоя при $M_\infty \gg 1$ безотносительно к повышению давления за счет взаимодействия приводит к росту сопротивления трения и теплопередачи. Это явление может оказаться существенным и в тех случаях, когда влияние пограничного слоя на внешний поток не будет играть особой роли, например, на передней части боковой поверхности затупленного тела.

Пределы применимости полученных результатов можно оценить из условия $y_\delta / \beta_0 x \ll 1$. Для того чтобы пренебречь величиной порядка ε^2 , достаточно, например, чтобы $\varepsilon = y_\delta / \beta_0 x \ll 1/7$.

В этом случае при $F_0 = F_1 = 1$ из (4.3) должно следовать

$$R_\infty \geq 0.15 M_\infty^2 / \beta_0^4 \text{ или } x \geq 0.1 (U_\infty \mu_\infty / \beta_0^4 p_\infty) \text{ при } i_w \approx 0$$

$$R_\infty \geq 2 M_\infty^2 / \beta_0^4 \text{ или } x \geq 1.5 (U_\infty \mu_\infty / \beta_0^4 p_\infty) \text{ при } i_w = i_e \approx 0.17 M_\infty^2 i_\infty$$

Такой способ дает, вообще говоря, возможность определить то расстояние от носика $x = x_0$, начиная с которого уже можно пользоваться приближенными уравнениями метода малых возмущений, но он имеет тот присущий всей теории пограничного слоя недостаток, что не учитывает влияние вниз по потоку различия в точке $x = x_0$ точного и полученного выше приближенного решений.

Граничная величина $\eta_\delta = 0.98 \div 0.999$, принятая выше, в некоторой степени условна и выбрана из следующих соображений.

При $M^2 = 1/\alpha_2 \beta_0^2 \gg 1$ разность $i_\delta - 1 \sim (x - 1)(1 - \eta_\delta)/\alpha_2 \beta_0^2$ порядка единицы при $\eta_\delta = 0.98 + 0.99$ и близка к нулю при $\eta_\delta \geq 0.999$. Следовательно, при $\eta \leq 0.98$ влияние вязкости уже заметно, а при $\eta \geq 0.999$ пренебрежимо мало. С другой стороны, так как в ядре пограничного слоя $i - 1 \geq 1$, то в указанном диапазоне и для скорости и для энthalпии граничные условия можно считать удовлетворенными.

Заметим, что величина y_δ практически не изменяется в пределах $\eta_\delta = 0.98 \div 0.999$, что следует из сравнения функций h и h_0 .

Изложенный метод применим также и для затупленных конусов, если размер затупления невелик. В этом случае на некотором расстоянии от носка поле течения, построенное без учета пограничного слоя, будет мало отличаться от конического и влияние этого отличия на пограничный слой в линейной постановке можно учесть независимо [10].

Приложение к § 3. Рассмотрим уравнение

$$g_*^2 j_m'' + (1 - \sigma) g_* g_*' j_m' + \beta_m \sigma \eta F(\eta) j_m = 1$$

или в самосопряженной форме

$$(g_*^{1-\sigma} j_m')' + \sigma \beta_m \frac{\eta F}{g_*^{\sigma+1}} j_m = 0 \quad (1)$$

Это уравнение имеет два линейно-независимых решения, j_{1m} и j_{2m} , причем

$$j_{1m} \sim (-g_*')^{-\beta_m}, \quad j_{2m} \sim g_*^\sigma (-g_*')^{\beta_m-1} \text{ при } \eta \rightarrow 1$$

Докажем, что решение, удовлетворяющее условию $j_m'(0) = 0$ может принадлежать только к типу $j_{1m} = j_m^*$, если $0 < \beta_m < 1$.

Уравнение (1) приводится к виду:

$$\frac{d^2 j_m}{dt^2} = - \frac{\sigma \beta_m \eta F}{g_*^2} j_m, \quad t = \int_0^\eta g_*^{\sigma-1} d\eta$$

При $\eta < 1$ к этому уравнению применима теорема Чаплыгина [12], согласно которой $j_1 \leq j_2$, если $\beta_1 > \beta_2$, и $j_1 = j_2$, $j'_1 = j'_2$ при $\eta = 0$.

При $\beta_m = 1$ уравнение (1) имеет решение $j_0 = g_*^\sigma$. Пользуясь (1), составим равенство:

$$(g_*^{1-\sigma} j'_m)' j_0 - (g_*^{1-\sigma} j'_0)' j_m = [g_*^{1-\sigma} (j'_m j_0 - j'_0 j_m)]' (1 - \beta_m) \sigma \frac{\eta F}{g_*^{\sigma+1}} j_0 j_m \quad (2)$$

При $j'_m(0) = 0$, интегрируя (2), получим

$$g_*^{(1-\sigma)} (j'_m j_0 - j'_0 j_m) = (1 - \beta_m) \sigma \int_0^\eta \frac{\eta F}{g_*^{\sigma+1}} j_0 j_m d\eta \quad (3)$$

Если $j_m = j_{2m}$, то, легко видеть, левая часть (3) исчезает при $\eta \rightarrow 1$ как $g_*^\sigma (-g'_*)^{\beta_m-1}$, а интеграл справа сходится и равенство (3) невозможно. Следовательно, $j_m = j_{1m}$; в этом случае правая и левая части (3) равны $\sigma (-g'_*)^{\beta_m-1}$ при $\eta \approx 1$. Тем самым утверждение § 3 доказано. Функции j_m^* при $\sigma = 0.725$ приведены в таблице 2:

Таблица 2

η	0	0.20	0.40	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.97	0.99	1
j_1^*	1	0.996	0.980	0.943	0.910	0.864	0.790	0.725	0.684	0.616	0
j_2^*	1	0.999	0.992	0.959	0.927	0.884	0.817	0.762	0.715	0.648	0

Поступила 28 VI 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Stewartson. On the Motion of a Flat Plate at High Speed in Viscous Compressible fluid, JAS, № 5, 1955.
2. Лунев В. В. О подобии при обтекании тонких тел вязким газом при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, т. XXII, вып. 1, 1959.
3. Куо. Обтекание вязким газом плоской пластины, движущейся с большими сверхзвуковыми скоростями. Механика, сб. переводов, № 6, 1956.
4. Куо. The Effects of Prandtle Namber on High Speed Viscous Flow over a Flat Plate JAS, No. 11, 1956.
5. Pan and Kuо. Compressible Viscous Flow Past a Wedge, Moving at Hypersonic Speeds. J. Math. and Physics, No. 2, 1956.
6. Современное состояние аэродинамики больших скоростей, под ред. Хоурта, ИИЛ, 1955 г.
7. Корал. Table of Supersonic Flow Around Cones, Cambridge, 1947.
8. Ильюшин А. А. Закон плоских сечений, ПММ, т. XIX, вып. 6, 1956.
9. Tsien. Similarity Lows of Hypersonic flows J. Math and Physics, v. XXV, No. 3, 1946.
10. Лунев В. В. Применение метода малых возмущений к задачам ламинарного пограничного слоя. ПММ, т. XX, № 5, 1957.
11. Лунев В. В. Ламинарный пограничный слой сжимаемого газа на пластине при больших перепадах температур. ПММ, т. XIX, № 3, 1956.
12. Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, ГИТТЛ, Москва, 1950.