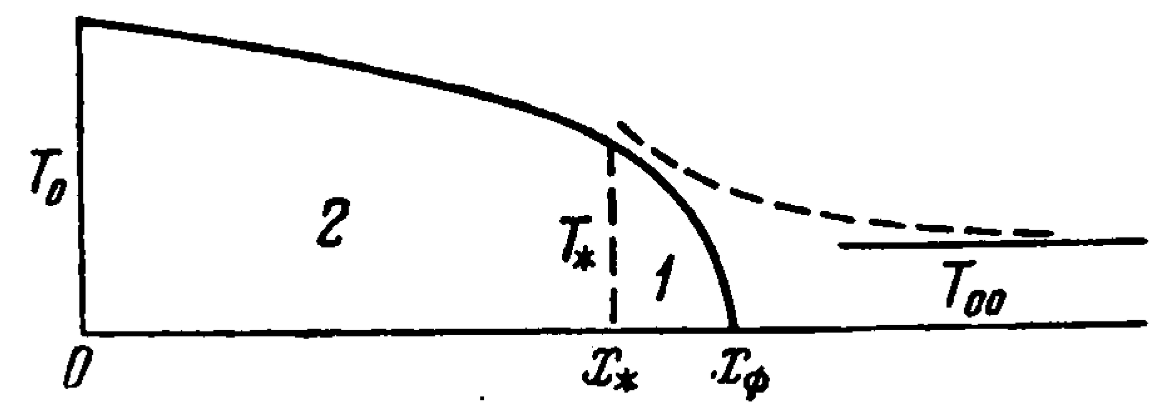
РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛОВОЙ ВОЛНЫ ОТ ГРАНИЦЫ ДВУХ СРЕД

Э. И. Андрианкин

(Москва)

Рассматривается задача о распространении тепла от плоской границы и распаде разрыва температур с учетом изменения фазового состояния вещества. Производится оценка энергии, передаваемой в среду с малой теплопроводностью при мгновенном выделении тепла из точки на границе раздела двух сред.

1. Пусть на плоскости $x = 0$ (фигура) поддерживается температура T_0. После нагревания до температуры $T_* < T_0$ вещество переходит в другое фазовое состояние (область 2 на фигуре). Теплоемкость c и коэффициент теплопроводности $\varkappa$ при $T < T_*$ отметим индексом 1 (область 1 на фигуре), а при $T > T_*$ индексом 2.



Закон распространения тепла описывается уравнениями

$$c_i \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \varkappa_i(T) \frac{\partial T}{\partial x}, \qquad \varkappa_i = \varkappa_{0i} \varphi_i(z), \qquad \left(z = \frac{T}{T_0}\right) \quad (i=1,\,2) \tag{1}$$

На границе фазового перехода x_* условие баланса тепла запишется так:

$$\varkappa_2 \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x_*-0} - \varkappa_1 \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x_*+0} = \lambda \frac{dx_*}{dt} \tag{2}$$

Задача характеризуется параметрами, размерности которых выражаются через размерности длины L, времени t, температуры T и количества тепла Q:

$$c_i = QL^{-3}T^{-1}, \qquad \varkappa_{0i} = QT^{-1}L^{-1}t^{-1},\ \lambda = QL^{-3}, \qquad T_0 = T_* = T_1 = T$$

Из этих параметров, координаты x и времени t можно образовать только одну независимую безразмерную переменную и ряд безразмерных постоянных:

$$\eta_i = x\left[\frac{c_i}{2\varkappa_{0i} t}\right]^{1/2}, \qquad \gamma = \left[\frac{c_1 \varkappa_{10}}{c_2 \varkappa_{20}}\right]^{1/2}, \qquad \mu = \frac{\lambda}{C_2 T_0}, \qquad \beta = \frac{T_*}{T_0} \tag{3}$$

Поэтому уравнения (1) запишутся так:

$$\frac{d}{d\eta_i} \varphi_i(z_i) \frac{dz_i}{d\eta_i} + \eta_i \frac{dz_i}{d\eta_i} = 0 \tag{4}$$

Если начальная температура среды $T_{00} = 0$, то граничными условиями, определяющими z_1, z_2, фронт тепловой волны $x_ф$ и границу фазового перехода x_*, будут

$$z_1(\eta_{1ф}) = 0, \qquad z_1(\eta_{1_*}) = \beta, \qquad z_2(0) = 1, \qquad z_2(\eta_{2*}) = \beta$$

$$\varphi_2(z_2) \frac{dz_2}{d\eta_2}\bigg|_{\eta_{2*}} - \gamma \varphi_1(z_1) \frac{dz_1}{d\eta_1}\bigg|_{\eta_{1_*}} = \mu \eta_{2_*} \tag{5}$$

$$\varphi_2(1)\left(\frac{dz_2}{d\eta_2}\right)_0 + \int\limits_0^{\eta_{2_*}} z_2\, d\eta_2 + \gamma \int\limits_{\eta_{1_*}}^{\eta_ф} z_1\, d\eta_1 + \mu\eta_{2_*} = 0$$

Интегральные кривые уравнения (4) подробно исследованы Г. И. Баренблаттом в работе [3], из данных которой следует, что существует единственная интегральная кривая, удовлетворяющая на конечном расстоянии $x_ф(t)$ условию $T_ф = \varkappa(\partial T / \partial x)_ф = 0$. Если $T_{00} \neq 0$, то решение дается интегральными кривыми, имеющими на бесконечности горизонтальные асимптоты [5].

Аналогично рассматривается задача о распаде разрыва температур. Если считать, что в момент $t = 0$ соприкасаются две полуплоскости с температурами T_1 и T_4, то решение автомодельно. В силу автомодельности температура на границе $x = 0$ остается постоянной. Ее следует определить из условия непрерывности потоков тепла в сечении $x = 0$, например, после решения предыдущей задачи при $x > 0$ и $x < 0$ в зависимости от параметра T_0.

2. Рассмотрим задачу о мгновенном выделении тепла на границе двух сред с нулевыми начальными температурами. Предположим, что $\varkappa_i = \varkappa_{0i} T^{k-1}$. Если $\varkappa_{01} = \varkappa_{02}$, $c_1 = c_2$, то в плоском случае [1] решение можно записать так:

$$\xi_1 = x\left[Q^{1-k}\frac{ck}{\varkappa_0 t}\right]^{\frac{1}{k+1}}, \qquad T = \left(\frac{ckQ^2}{\varkappa_0 t}\right)^{\frac{1}{k+1}}\left[\frac{k-1}{2k(k+1)}(e_0 - \xi_1^2)\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

$$e_0 = \left\{2\left[\frac{2k(k+1)}{k-1}\right]^{\frac{1}{k-1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{k-1}\right)\left[\Gamma\left(\frac{k}{k-1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}\right\}^{\frac{2(k-1)}{k+1}} \tag{6}$$

Условие равенства температур и потоков тепла в плоскости $x=0$ в случае $\varkappa_{01}\neq\varkappa_{02}$, $c_1\neq c_2$ требует, чтобы энергия была распределена по закону

$$Q_1 / Q_2 = \gamma, \qquad Q_1 + Q_2 = Q \tag{7}$$

Тогда решение дается формулами (6), где надо положить $Q = 2Q_2$ при $x > 0$ и $Q = 2Q_1$ при $x < 0$. Формулу (7) интересно сравнить с аналогичной в случае газовой динамики [4], когда перераспределение энергии при плоском взрыве на границе двух сред происходит по закону $E_2/E_1 = (\rho_1/\rho_2)^{1/2}$. Заметим, однако, что при $k_1 > k_2$ мгновенно энергию можно выделить только в среде *1*. Задача о мгновенном выделении тепла из точки на границе двух сред ($k_1 = k_2$) зависит только от

$$\xi = rt^{\frac{1}{1-3k}}\left[\frac{Q}{c\psi(k)}\right]^{\frac{1-k}{3k-1}}\left(\frac{ck}{\varkappa_0}\right)^{\frac{1}{3k-1}} = rt^{\frac{1}{3k-1}}B^{-1}(k)$$

$$\psi(k) = 2\pi\left[\frac{k-1}{2k(3k-1)}\right]^{\frac{1}{k-1}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{k-1}\right)\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{k}{k-1}\right)\right]^{-1}$$

и угла θ. Количество тепла, поступившего в среду *2*, сохраняется во времени:

$$\Delta Q\Psi(k) = 2\pi Q\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int\limits_0^{\xi_\text{ф}(\theta)} F(\xi,\theta)\,\xi^2 d\xi, \; T = \left[\frac{ck}{\varkappa_0}\left(\frac{Q}{c\Psi(k)}\right)^{2/3} t^{-1}\right]^{3/(3k-1)} F(\xi,\theta) \tag{8}$$

При этом существует поверхность, через которую нет потока тепла.

Если $k_1\neq k_2$, то задача неавтомодельна. Однако и в этом случае можно приближенно оценить количество тепла, переданное среде *2*. Будем считать, что в среде *1* распространяется область высокой температуры и радиус нагретой полусферы меняется по закону

$$r_\text{ф} = B(k_1)\, t^{\frac{1}{3k_1-1}}, \qquad T_0 = \frac{3Q}{4\pi c r_\text{ф}^3} = At^{\frac{3}{1-3k_1}} \tag{9}$$

Допуская, что $\varkappa_2 \ll \varkappa_1$, когда можно считать, что в среду *2* тепло передается плоскими волнами, найдем

$$\Delta Q = 2\pi\int\limits_0^{r_\text{ф}} r\,dr\int\limits_t^{\tau}\varkappa_2[T_0(t)]\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} dt, \; \tau = \left(\frac{r}{B}\right)^{3k_1-1} \tag{10}$$

Значение производной $(\partial T/\partial x)_{x=0}$ определяется из решения задачи о распространении тепла от стенки [2, 5], температура которой

$$T = A(t_1+\tau)^{3/(1-3k_1)}, \qquad 0\leqslant t_1\leqslant t-\tau \qquad \text{при } \Delta Q\ll Q.$$

Поступила 26 VII 1958

Институт химической физики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. и Компанеец А. С. О распространении тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сб., посвящ. 70-летию А. Ф. Иоффе. Изд-во АН СССР, 1950.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Об одном нелинейном дифференциальном уравнении, встречающемся в теории фильтрации. Докл. АН СССР, т. LXIII, № 6, 1948.
3. Баренблатт Г. И. О неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.
4. Зельдович Я. Б. Движение газа под действием кратковременного давления. Акустический журнал, т. II, №, 1, 1956.
5. Баренблатт Г. И. О приближенном решении задач одномерной нестационарной фильтрации в пористой среде. ПММ, т. XVIII, вып. 3, 1954.