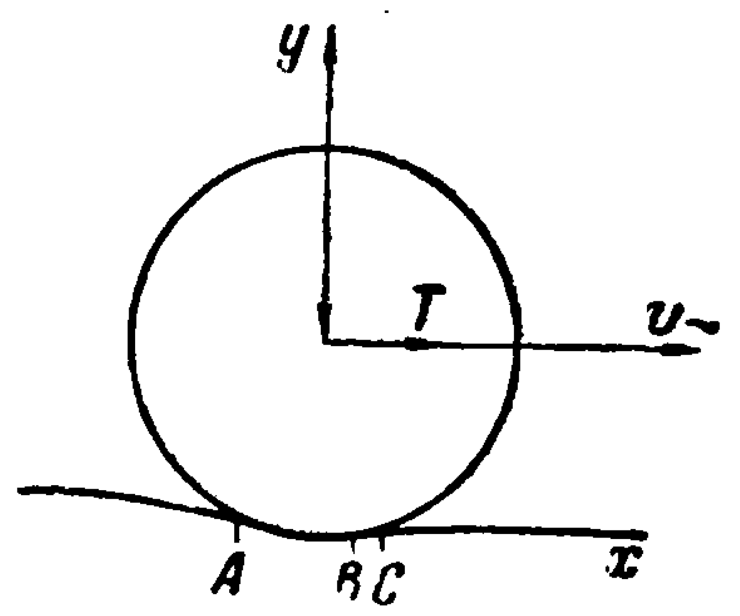
О ПЕРЕКАТЫВАНИИ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ

В. И. Моссаковский

(Днепропетровск)

В диссертации Н. И. Глаголева[1] изучался вопрос о перекатывании упругих цилиндров, состоящих из одинаковых материалов. Было установлено, что при отсутствии силы тяги T (см. схему качения на фигуре) касательные силы на площадке контакта исчезают, и напряженное состояние в этом случае ничем не отличается от обычного сжатия упругих тел.



При наличии силы тяги линия контакта точкой C делится на две части — область сцепления AC и область скольжения CB.

Суммарное «проскальзывание» $\delta = R^{-}\omega - V$ определяется по формуле:

$$\delta = V\frac{ka}{R}\left[\sqrt{1 + T/pk} - 1\right] \tag{0.1}$$

и при $T = 0$ оказывается равным нулю.

В настоящей заметке решается задача о качении колеса по рельсу по инерции (сила тяги T равна нулю) без предположения, что материал колеса и основания одинаков. Как обычно в контактных задачах теории упругости, колесо и рельс заменяются упругими полуплоскостями.

§ 1. Пусть колесо движется вправо со скоростью v. Поскольку мы не учитываем внутреннего трения в колесе и основании и заранее предполагаем, что на всей области контакта имеет место сцепление, ясно, что потерь энергии происходить не должно и процесс можно принять установившимся.

Рассматривая задачу в координатах, неподвижно связанных с центром колеса и движущихся поступательно вправо со скоростью v, приходим к статической задаче теории упругости для двух полуплоскостей.

Индексом *1* обозначаем величины, относящиеся к нижней полуплоскости (рельсу), индексом *2* — к верхней полуплоскости (колесу).

На линии $y = 0$ имеем граничные условия [1]

$$v_1'(x) - v_2'(x) = \frac{x}{R}, \qquad \delta + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right)v = 0 \tag{1.1}$$

(на линии контакта)

$$\begin{aligned} &\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{вне линии контакта} \\ &\sigma_{y_1} = \sigma_{y_2}, \quad \tau_{xy_1} = \tau_{xy_2} \quad \text{на всей линии } y = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Имеют место формулы, выражающие напряжения и смещения в упругом теле [1]

$$\begin{aligned} &\sigma_{y_k} + i\tau_{xy_k} = \Phi_k(z) - \Phi_k(\bar z) + (z - \bar z)\overline{\Phi_k'(z)} \qquad (k = 1, 2) \\ &2\mu_k(u_k' + iv_k') = \varkappa\Phi_k(z) + \Phi_k(\bar z) - (z - \bar z)\overline{\Phi_k(z)} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Из условий (1.2) получим

$$\Phi_1(z) = -\Phi_2(z)$$

Поэтому из условия (1.3) найдем

$$2\mu_1(u_1' + iv_1')_{y=0} = \varkappa_1\Phi_1^- + \Phi_1^+, \qquad 2\mu_2(u_2' + iv_2')_{y=0} = -\varkappa_2\Phi_1^+ - \Phi_1^- \tag{1.4}$$

Здесь значками — и + обозначены предельные значения функции Φ_1 соответственно при подходе снизу и сверху к линии $y = 0$.

Два условия (1.1) можно объединить в одно

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} + i\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial x}\right) = \frac{\delta}{v} + i\,\frac{x}{R}$$

---

[1] Глаголев Н. И.—Исследование взаимодействия колес и рельсов и некоторых связанных с ним явлений. Диссертация. Москва. 1948. Институт механики АНСССР.

Использовав (1.5), получим граничные условия задачи линейного сопряжения для определения функции $\Phi_1(z)$

$$\left(\frac{\varkappa_1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)\Phi_1^- + \left(\frac{\varkappa_2}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_1}\right)\Phi_1^+ = 2\left(\frac{\delta}{v}+\frac{ix}{R}\right) \tag{1.6}$$

§ 2. Решение задачи линейного сопряжения, ограниченное на краях линии контакта и на бесконечности, имеет вид (2.1)

$$\Phi_1(z) = 2\left(\frac{\varkappa_1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{\varkappa_2}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_1}\right)^{-1}\left[\frac{\delta}{v}+\frac{it}{R}-\frac{it}{R}\sqrt{(z-b)(z-a)}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{i\gamma}\right]$$

где $z=b$ и $z=a$ координаты соответственно правого и левого концов линии контакта

$$\gamma=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\varkappa_1\mu_2+\mu_1}{\varkappa_2\mu_1+\mu_2} \tag{2.2}$$

Для нахождения неизвестных величин a, b и δ исследуем поведение функции $\Phi_1(z)$ вблизи бесконечно удаленной точки. Разлагая выражение в квадратных скобках (2.1) в ряд, получим

$$\Phi_1(z) = \left(\frac{\varkappa_1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{\varkappa_2}{\mu_1}\frac{1}{\mu_1}\right)^{-1}\left[\frac{\delta}{v}+\frac{i(b+a)}{2R}-\right. \tag{2.3}$$
$$\left.-\gamma(b-a)+\frac{i}{2Rz}\left(\gamma^2+\frac{1}{4}\right)(b-a)^2+\ldots\right]$$

Функция $\Phi_1(z)$ на бесконечности должна иметь вид

$$\Phi(z) = \frac{iP}{2\pi z}+0(z) \tag{2.4}$$

Сопоставляя (2.3) с (2.4), получим

$$b=-a, \qquad \frac{\delta}{v}-\frac{\gamma}{R}2b=0 \tag{2.5}$$
$$\left(\frac{\varkappa_1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{\varkappa_2}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_1}\right)^{-1}\frac{1}{R}\left(\gamma^2+\frac{1}{4}\right)4b^2=\frac{P}{2\pi}$$

Таким образом, оказалось, что площадка контакта расположена симметрично по отношению к центру колеса.

В случае плоской деформации $\varkappa=3-4\nu$, а для плоского напряженного состояния $\varkappa=(3-\nu)/1+\nu$. Для металлов коэффициент Пуассона ν можно принять равным 0.3, следовательно, как в случае плоского напряженного состояния, так и для плоской деформации коэффициент $\varkappa$ близок к двум.

Следовательно, знак величины γ определяется отношением μ_2/μ_1.

В случае жесткого колеса и податливого основания ($\mu_2>\mu_1$) показатель γ, а следовательно, и δ положительны. В этом случае $V<R\omega$.

В противном случае, когда основание является более жестким, чем колесо, имеет место соотношение $V>R\omega$.

Качественная сторона этого явления была обнаружена и объяснена О. Рейнольдсом.

Третья формула (2.5) показывает, что в случае перекатывания колеса по инерции длина площадки контакта оказывается несколько меньшей, чем при сжатии двух тел той же формулы и из тех же материалов без трения (при $\gamma\neq0$).

Поступила 28 V 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И.— Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1949.