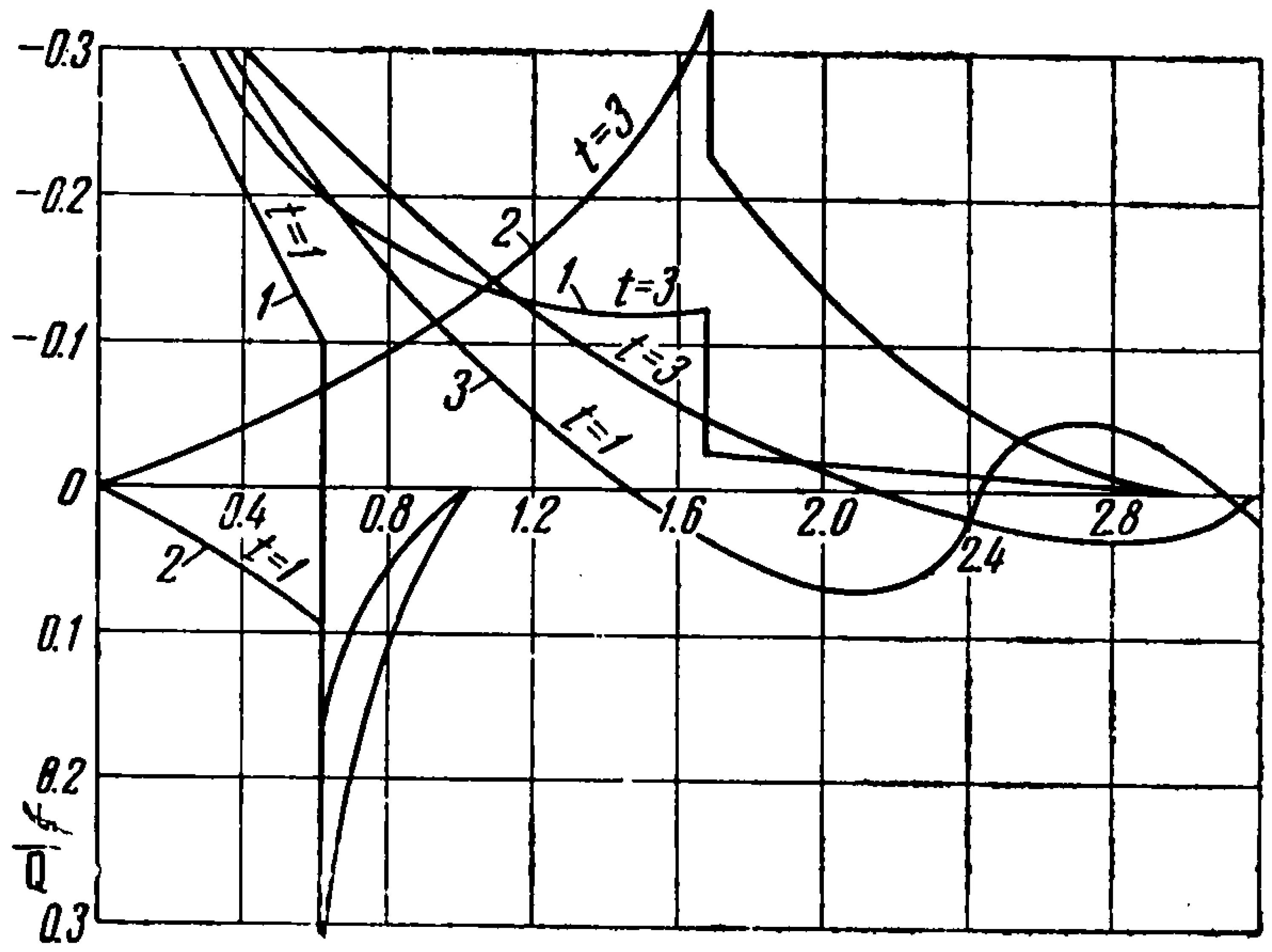
при точных граничных условиях, 2 — по волновой теории с граничными условиями по элементарной теории, 3 — по элементарной теории. Качественное отличие волновых решений от элементарного здесь состоит в том, что если по последнему N_r' изменяется непрерывно от ∞ до 0 при изменении r от 0 до ∞, то в волновых решениях N_r терпит разрыв на фронте волны v_2 величины $Q/2\pi r$ и $N_r = 0$ перед фронтом волны v_1. Кроме того, из самой постановки задачи видно, что при $r \to 0$, $N_r \to \infty$ в 3 и 1 и $N_r \to 0$ в 2. При больших r значения N_r, вычисленные по (12), близко подходят к значениям, вычисленным по [1], когда $t = 3$, но значительно разнятся от них, когда $t = 1$.



Стремление N_r к ∞ при $r \to 0$ противоречит физической сущности деформации плит. Это происходит оттого, что в начальный момент времени элемент под силой, согласно принятой теории, испытывает деформацию чистого сдвига. Противоречие можно устранить, если рассматривать пространственную деформацию цилиндра, выделенного в окрестности действующей силы, как это было приведено у С. П. Тимошенко [2].

Поступила 12 II 1959 Институт механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин. ПММ, т. XII, вып. 3, 1948 г.
2. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. ОГИЗ, Гостехиздат, стр. 80, 1948 г.
3. Лурье А. И.— Операционное исчисление. Гос. изд. техн.-теор. лит-ры, 1951.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ Л. А. ГАЛИНА

Д. Д. Ивлев

(Москва)

В заметке [1] решение Л. А. Галина [2] о напряженном состоянии плоскости с круговым отверстием при двуосном растяжении (плоская деформация) дополнялось построением поля перемещений.

В рассматриваемом случае имеет место стесненная деформация, поэтому для определения перемещений в пластической области следует воспользоваться соотношениями теории Прандтля — Рейсса

$$\frac{2de_\rho^{\,p}}{\sigma_\rho - \sigma_\theta} = \frac{2de_\theta^{\,p}}{\sigma_\theta - \sigma_\rho} = \frac{de_{\rho\theta}^{\,p}}{2\tau_{\rho\theta}} \tag{1}$$

Здесь индекс p наверху означает, что рассматривается пластическая составляющая приращения деформации.

Используя предположение о несжимаемости материала, получим первое уравнение для определения перемещений:

$$e_\rho + e_\theta = 0 \tag{2}$$

Второе уравнение получается следующим образом. В задаче Л. А. Галина в пластической области $\tau_{\rho\theta} = 0$; далее

$$e_{\rho\theta} = e_{\rho\theta}^{\,p} + e_{\rho\theta}^{\,e} = e_{\rho\theta}^{\,p} + \frac{\tau_{\rho\theta}}{2G} \tag{3}$$

здесь G — модуль сдвига; индекс e наверху приписан упругой составляющей деформации в пластической области; поэтому из (1) и (3) получим для пластической области

$$de_{\rho\theta} = 0 \tag{4}$$

Одна из возможных трактовок теории Прандтля — Рейсса состоит в использовании эйлерового представления о поле скоростей перемещений [3].

Покажем, что в рассматриваемом случае решение исходных уравнений при лагранжевом представлении совпадает с решением в эйлеровом представлении [1].

В самом деле, в этом случае интегрирование уравнения (4) даст

$$e_{\rho\theta} = f(x, y, \lambda) \tag{5}$$

где λ — параметр нагружения.

Однако в силу характера предположений, положенных в основу решения Л. А. Галина, функция в правой части уравнения (5) обращается в нуль. Докажем это обстоятельство. Основным предположением, положенным в основу решения Л. А. Галина, является допущение о том, что контур границы пластической области не пересекает контура отверстия. Таким образом, характер предположений Л. А. Галина по существу устанавливает ограничения на процесс нагружения.

Рассмотрим процесс деформирования. В момент, когда появляется пластическая область, контур пластической области совпадает с контуром отверстия. Следовательно, в этот момент имеет место осесимметричное напряженное состояние. При осесимметричной деформации всюду $e_{\rho\theta} = 0$. Далее на границе упругой и пластической областей $\tau_{\rho\theta} = 0$, поэтому из закона Гука следует, что на ней $e_{\rho\theta} = 0$. Следовательно, при последовательном распространении пластической зоны в любой фиксированной точке в момент прохождения через нее границы пластической области имеет место $e_{\rho\theta} = 0$. Далее согласно (4) в любой точке пластической области имеет место $de_{\rho\theta} = 0$, поэтому деформация $e_{\rho\theta}$ в пластической области всегда будет равна нулю, т. е. $f(x, y, \lambda) = 0$.

Таким образом, результаты заметки [1] полностью сохраняют силу и в случае лагранжевой трактовки соотношений теории Прандтля — Рейсса.

Остановимся на ограничениях, накладываемых на нагружение. Чтобы избежать разгрузки, недопустимой при нагружении условиями задачи Л. А. Галина, необходимо, чтобы пластическая зона в любой момент нагружения полностью содержала в себе пластическую зону в любой предыдущий момент нагружения.

В задаче Л. А. Галина силы, действующие на бесконечности, обозначим через $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$, радиус контура отверстия — R, давление на контуре отверстия — q. Границей пластической области является эллипс с полуосями $a(1+\delta)$ и $a(1-\delta)$, причем

$$a = R \exp\left\{\frac{1}{2k}\left(\frac{A+B}{2} + q - k\right)\right\}, \qquad \delta = \frac{B-A}{2k} \qquad (B \geqslant A) \tag{6}$$

где k — постоянная, стоящая в правой части условия пластичности.

Припишем величинам в предыдущий момент нагружения индекс 1, в последующий — индекс 2. Тогда должно иметь место

$$a_2(1+\delta_2) \geqslant a_1(1+\delta_1), \qquad a_2(1-\delta_2) \geqslant a_1(1-\delta_1) \tag{7}$$

Из (7) сразу следует, что $a_2 \geqslant a_1$. Используя (6) и (7), получим искомые пределы изменения усилий A, B, q. Легко убедиться, что область изменения нагрузок существует.

Автор признателен С. С. Григоряну за обсуждение этой заметки.

Поступила 3 VI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д. Д. Об определении перемещений в задаче Л. А. Галина, ПММ, т. XXI, вып. 5, 1957.
2. Галин Л. А. Плоская упруго-пластическая задача. ПММ, т. X, вып. 3, 1946.
3. Григорян С. С. Об общих уравнениях динамики грунтов. Докл. АН СССР, т. CXXIV, вып. 2, 1959.