Удобно ввести в качестве переменной интегрирования величину $s = p + {}^1/_2$. Тогда окончательно будем иметь

$$q(x) = -\frac{1}{\pi ix}\int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{S(s)}{4s^2 - 2\varkappa\cos\pi s - (1+\varkappa^2)}\left(\frac{x}{R_0}\right)^s ds \qquad \left(0 < \gamma < \frac{1}{2}\right) \tag{14}$$

где

$$S(s) = -2Q\varkappa\cos(\pi - \alpha)s + Q\{-2s\sin\alpha\sin[\pi s - \alpha(s+1)] - \cos\alpha s +$$
$$+ 2s(2s - \varkappa)\cos\alpha\cos(s+1)\alpha + \varkappa(2s - \varkappa)\cos\alpha s\} +$$
$$+ P\{-2s\sin\alpha\cos[\pi s - \alpha(s+1)] - \sin\alpha s +$$
$$+ 2s(2s - \varkappa)\cos\alpha\sin(s+1)\alpha - \varkappa(2s - \varkappa)\sin\alpha s\}$$

При вычислении интегралов при $x < R_0$ вычеты берутся справа, а при $x > R_0$ слева от прямой γ. В частности, при $x < R_0$ имеем

$$q(x) = \frac{1}{x}\sum_k\left(\frac{x}{R_0}\right)^{\rho_k}\left[\operatorname{Re}\Omega_k\cos\left(\theta_k\ln\frac{x}{R}\right) - \operatorname{Im}\Omega_k\sin\left(\theta_k\ln\frac{x}{R}\right)\right] \tag{15}$$

где

$$\Omega_k = \frac{S(s_k)}{\varkappa\pi\sin\pi s_k + 4s_k}, \qquad s_k = \rho_k + i\theta_k \qquad \left(\rho_k > 0,\ 0 < \theta_k < \frac{1}{2}\pi\right)$$

а S_k — корни уравнения

$$4s^2 - 2\varkappa\cos\pi s - (1+\varkappa^2) = 0 \tag{16}$$

Так как уравнение (16) всегда имеет корень, для которого $\rho < 1$, то можно сделать вывод о том, что при приближении к углу упругого квадранта напряжения $Xy = {}^1/_2\, q(x)$, бесконечно возрастая по абсолютной величине, одновременно бесконечное число раз меняет свой знак.

Если положить $s = 2\lambda + 1$, то уравнение (16) совпадает с уравнением, полученным в работе [1] для оценки порядка возрастания напряжений вблизи угла.

Автор признателен А. Я. Александрову за ряд ценных советов при выполнении этой работы.

Поступила 24 IV 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M. L. Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension. J.— l. Appl. Mech., vol. 20. No. 4, 1952.
2. Huth J. H. The Complex-Variable Approach to Stress Singularities. J—I. Appl. Mech., vol. 20, No, 4, 1953.
3. Williams M. L. The Complex-Variable Approach to Stress Singularities. J.—l. Appl. Mech., vol. 23, No 3, 1956.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1946.
5. Melan E. Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Innern beanspruchten Halbscheibe. Zt — für angew. Math., und Mech., H. 6, 1932.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В БЕСКОНЕЧНЫХ ПЛИТАХ

М. В. Дубинкин

(Москва)

В работе Я. С. Уфлянда [1] среди других задач рассмотрено действие сосредоточенной силы на бесконечную плиту. Решается уравнение, учитывающее инерцию вращения элементов пластины и влияние перерезающих сил, но граничные условия поставлены согласно элементарной теории. В настоящей работе рассматривается действие кольцевого давления на бесконечную плиту с учетом инерции вращения и сдвига. Приводится сравнение перерезающих сил, вычисленных по элементарной теории, при постановке задачи в работе [1] и по задаче, поставленной ниже.

Система уравнений, выведенная Я. С. Уфляндом в работе [1] в полярных координатах в том случае, когда искомые функции не зависят от полярного угла и внешняя нагрузка отсутствует, в безразмерных величинах принимает вид

$$\Delta w - \frac{\partial \alpha_r}{\partial r} - \frac{\alpha_r}{r} = \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad \left(\gamma = \frac{q}{k^{(1-\nu)}}\right) \tag{1}$$

$$\Delta \alpha_r - \frac{\alpha_r}{r^2} + \frac{12}{\gamma}\left(\frac{\partial w}{\partial r} - \alpha_r\right) = \frac{\partial^2 \alpha_r}{\partial t^2}$$

Здесь линейные размеры относятся к h, масса — к ρh^3, время — к h / v_1, сила — к E, изгибающий момент — к Eh^2, напряжение — к E, скорость — к v_1. Обозначения следующие: w — прогиб средней плоскости плиты, ρ — объемная плотность, h — толщина плиты, E — модуль упругости, k — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения, α_r — угол поворота элемента плиты как целого в плоскости rz, где r — безразмерная координата, v_1 и v_2 — скорости распространения волн в плите.

$$v_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}, \qquad v_2 = \sqrt{\frac{k\mu}{\rho}}$$

Решаем систему (1) операционным методом при нулевых начальных условиях, положив

$$W = \int_0^\infty w e^{-pt}\, dt, \qquad A_r = \int_0^\infty \alpha_r e^{-pt}\, dt \tag{2}$$

Решением системы уравнений относительно изображений будет

$$W = C_1 K_0(n_1 r) + C_2 K_0(n_2 r) + C_3 I_0(n_1 r) + C_4 I_0(n_2 r)$$

$$A_r = \frac{n_1^2 - p^2\gamma}{n_1}[C_3 I_1(n_1 r) - C_1 K_1(n_1 r)] + \frac{n_2^2 - p^2\gamma}{n_2}[C_4 I_1(n_2 r) - C_2 K_1(n_2 r)] \tag{3}$$

Здесь

$$n_{1,2}^2 = \frac{\gamma+1}{2}p^2 \mp \frac{\gamma-1}{2} p \sqrt{p^2 - a^2}, \qquad a^2 = \frac{48}{(\gamma-1)^2}$$

K_0, K_1 — функции Макдональда, а I_0, I_1 — функции Бесселя мнимого аргумента.

Пусть в бесконечной плите вырезано круглое отверстие малого радиуса r_0 с центром в начале координат. Предположим, что сила Q распределена по окружности радиуса r_0. Граничные условия запишем так

$$r_0\left(\frac{\partial W}{\partial r} - \alpha_r\right) = \frac{1+\nu}{k\pi} Q, \qquad \alpha_r = 0 \qquad \text{при } r = r_0 \tag{4}$$

Так как решение системы (1) должно стремиться к нулю на бесконечности, то $C_3 = C_4 = 0$, а постоянные C_1 и C_2 из условий для изображений (4) будут

$$C_1 = \frac{(1+\nu)}{2\pi k\gamma}\frac{Q}{2}\left(\frac{1}{p^2\sqrt{p^2-a^2}} - \frac{1}{p^3}\right)\frac{n_1}{K_1(n_1 r_0)}$$

$$C_2 = -\frac{(1+\nu)}{2\pi k\gamma}\frac{Q}{r_0}\left(\frac{1}{p^2\sqrt{p^2-a^2}} + \frac{1}{p^3}\right)\frac{n_2}{K_1(n_2 r_0)} \tag{5}$$

Изображение для величины $2(1+\nu) N_{\bar r} / k$ будет

$$\frac{dW}{dr} - A_r = \frac{1+\nu}{2\pi k r_0} Q\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{p^2-a^2}} + \frac{1}{p}\right)\frac{K_1(n_1 r)}{K_1(n_1 r_0)} + \left(\frac{1}{\sqrt{p^2-a^2}} + \frac{1}{p}\right)\frac{K_1(n_2 r)}{K_1(n_2 r_0)}\right] \tag{6}$$

Для нахождения перерезывающих сил применяем формулу обращения. Необходимо вычислить интегралы

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{K_1(n_\nu r)\, e^{aqt}\, dq}{\sqrt{q^2-1}\, K_1(n_\nu r_0)}, \qquad I_2^{(\nu)} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{K_1(n_\nu r)\, e^{aqt}\, dq}{q K_1(n_\nu r_0)} \qquad \left(q = \frac{p}{a}\right) \tag{7}$$

где L — контур Римана — Меллина. Подобного рода интегралы вычислены в работе [1]. Вычисление их ведется при $t > (r - r_0)/v_\nu$, так как при $t < r - r_0/v_\nu$ согласно лемме Жордана они обращаются в нуль. Подынтегральные функции в (7) имеют те же точки разветвления, что и в работе [1], а именно

$$q = \pm 1, \qquad q = 0, \qquad q = \pm i\alpha \qquad \left(\alpha = \frac{\gamma - 1}{2\sqrt{\gamma}}\right)$$

Вычисление интегралов (7) производится по тем же контурам, что и в работе [1] с помощью табл. 1, приведенной там. Только следует иметь в виду, что второй интеграл в (7) по малой окружности радиуса ε с центром в точке $q = 0$ при $\varepsilon \to 0$ не обращается в нуль. Получим

$$I_1^{(2)} = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 \left\{ e^{a\rho t}\,\mathrm{Re}\,\frac{K_1[P\sqrt{\rho}(\lambda + i\mu)r]}{K_1[P\sqrt{\rho}(\lambda + i\mu)r_0]} + \right.$$

$$\left. + e^{-a\rho t}\,\mathrm{Re}\,\frac{K_1[P\sqrt{\rho}(-\lambda + i\mu)r]}{K_1[P\sqrt{\rho}(-\lambda + i\mu)r_0)}\right\}\frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \tag{8}$$

$$I_2^{(2)} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left\{ e^{a\rho t}\,\mathrm{Im}\,\frac{K_1[P\sqrt{\rho}(\lambda + i\mu)r]}{K_1[P\sqrt{\rho}(\lambda + i\mu)r_0]} - e^{-a\rho t}\,\mathrm{Im}\,\frac{K_1[P\sqrt{(\rho}(-\lambda + i\mu)r]\,d\rho}{K_1[P\sqrt{\rho}(-\lambda + i\mu)r_0]\,\rho} + \frac{r_0}{r}\right.$$

$$I_1^{(1)} = I_1^{(2)} - I_1^*, \qquad I_2^{(1)} = -I_2^{(2)} + I_2^* + \frac{2r_0}{2} \tag{9}$$

Здесь

$$I_1^* = \int_0^\alpha \Phi\,[\pi I_1(P\omega\sqrt{\rho}\,r_0) - K_1(P\omega\sqrt{\rho}\,r_0)]\,\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2+1}}$$

$$I_2^* = -\int_0^\alpha \Phi[\pi_1 I_1(P\omega\sqrt{\rho}r_0) - K_1(P\omega\sqrt{\rho}r_0)]\,\frac{d\rho}{\rho} \tag{10}$$

$$\Phi = \frac{K_1(P\omega\sqrt{\rho}\,r)\,I_1(P\omega\sqrt{\rho}\,r_0) - I_1(P\omega\sqrt{\rho}\,r)\,K_1(P\omega\sqrt{\rho}\,r_0)}{K_1(P\omega\sqrt{\rho}\,r_0)[K_1^2(P\omega\sqrt{\rho}\,r_0) + \pi^2 I_1^2(P\omega\sqrt{\rho}\,r_0)]}.$$

Здесь и ниже введены следующие обозначения

$$q = \rho e^{i\varphi}, \quad P = aM, \quad M^2 = \frac{1}{2}(\gamma + 1), \quad N = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad v_1 = 1, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$$

$$\omega = \sqrt{N\sqrt{\rho^2 - 1} - \rho}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{s+\rho}{2}}, \quad \mu = \sqrt{\frac{s-\rho}{2}}, \quad s = \sqrt{1-N^2}\sqrt{\rho^2+\alpha^2}$$

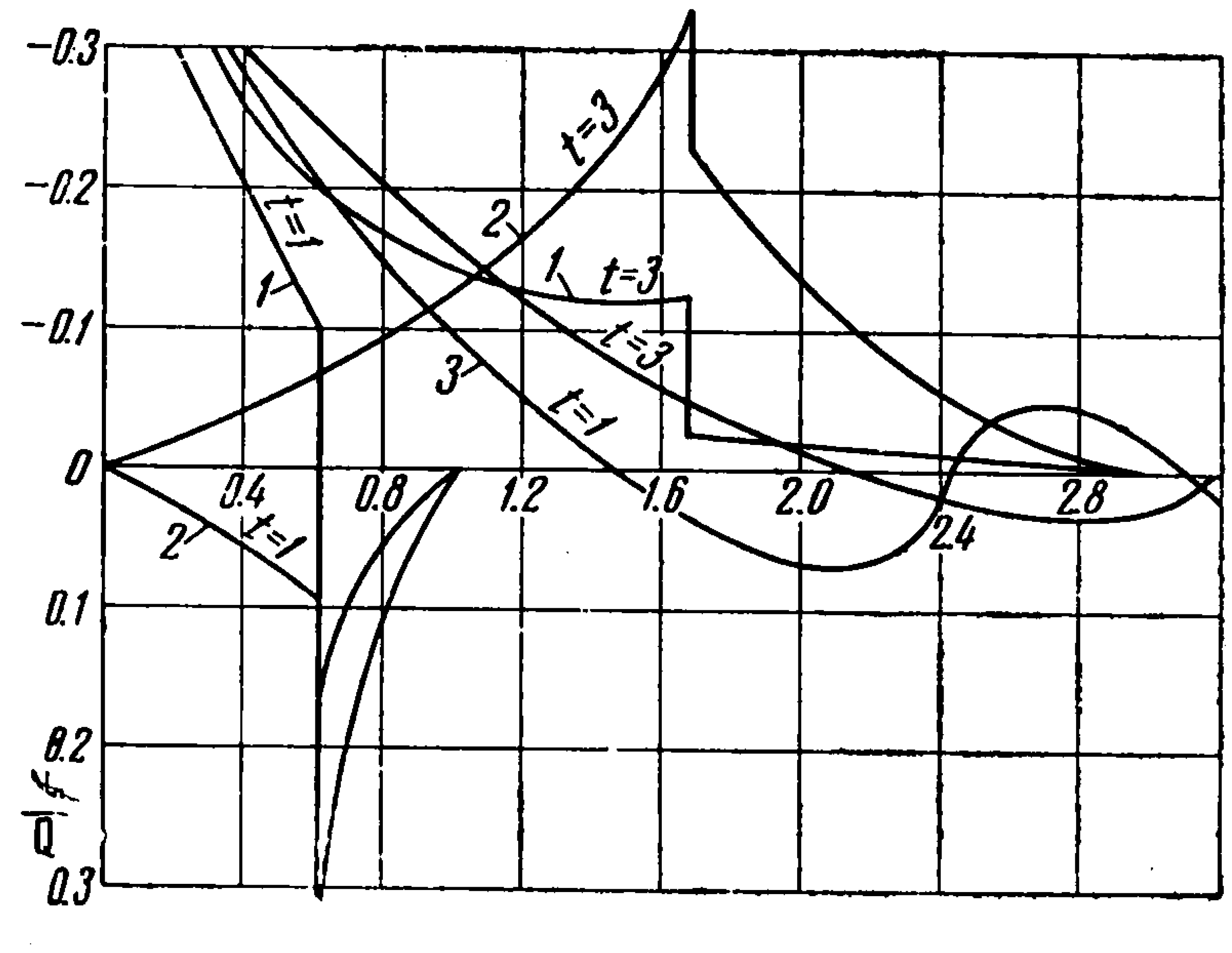
Тогда выражения перерезывающих сил для различных областей будут

$$\begin{aligned}
N_r &= \frac{Q}{4\pi r_0}\left(I_1^* + I_2^* + \frac{2r_0}{r}\right) && \text{при } r - r_0 < \frac{t}{\sqrt{\gamma}} \\
N_r &= \frac{Q}{4\pi r_0}\left(-I_1^{(2)} + I_1^* - I_2^{(2)} + I_2^* + \frac{2r_0}{r}\right) && \text{при } \frac{t}{\sqrt{\gamma}} < r - r_0 < t \\
N_r &= 0 && \text{при } r - r_0 > t
\end{aligned} \tag{11}$$

Перейдя в формулах (11) к пределу при $r_0 \to 0$, можно получить формулы для сосредоточенной силы, приложенной в центре плиты. Для $r - r_0 < \dfrac{t}{\sqrt{\gamma}}$, например, формула будет:

$$N_r = \frac{Q}{4\pi}\left[\int_0^\alpha \frac{I_1(P\omega\sqrt{\rho}\,r)P\omega\sqrt{\rho}\cos a\rho t}{\rho\sqrt{\rho^2+1}}\,(\rho - \sqrt{\rho^2+1})\,d\rho + \frac{2}{r}\right] \tag{12}$$

На фигуре приведены графики перерезывающих сил для двух моментов времени $t = 1$ и $t = 3$ по различным теориям. Причем обозначено: 1 — по волновой теории при точных граничных условиях, 2 — по волновой теории с граничными условиями по элементарной теории, 3 — по элементарной теории. Качественное отличие волновых решений от элементарного здесь состоит в том, что если по последнему N_r изменяется непрерывно от ∞ до 0 при изменении r от 0 до ∞, то в волновых решениях N_r терпит разрыв на фронте волны v_2 величины $Q/2\pi r$ и $N_r = 0$ перед фронтом волны v_1. Кроме того, из самой постановки задачи видно, что при $r \to 0$, $N_r \to \infty$ в 3 и 1 и $N_r \to 0$ в 2. При больших r значения N_r, вычисленные по (12), близко подходят к значениям, вычисленным по [1], когда $t = 3$, но значительно разнятся от них, когда $t = 1$.



Стремление N_r к ∞ при $r \to 0$ противоречит физической сущности деформации плит. Это происходит оттого, что в начальный момент времени элемент под силой, согласно принятой теории, испытывает деформацию чистого сдвига. Противоречие можно устранить, если рассматривать пространственную деформацию цилиндра, выделенного в окрестности действующей силы, как это было приведено у С. П. Тимошенко [2].

Поступила 12 II 1959 Институт механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин. ПММ, т. XII, вып. 3, 1948 г.
2. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. ОГИЗ, Гостехиздат, стр. 80, 1948 г.
3. Лурье А. И.— Операционное исчисление. Гос. изд. техн.-теор. лит-ры, 1951.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ Л. А. ГАЛИНА

Д. Д. Ивлев

(Москва)

В заметке [1] решение Л. А. Галина [2] о напряженном состоянии плоскости с круговым отверстием при двуосном растяжении (плоская деформация) дополнялось построением поля перемещений.

В рассматриваемом случае имеет место стесненная деформация, поэтому для определения перемещений в пластической области следует воспользоваться соотношениями теории Прандтля — Рейсса

$$\frac{2de_\rho^{\,p}}{\sigma_\rho - \sigma_\theta} = \frac{2de_\theta^{\,p}}{\sigma_\theta - \sigma_\rho} = \frac{de_{\rho\theta}^{\,p}}{2\tau_{\rho\theta}} \tag{1}$$

Здесь индекс p наверху означает, что рассматривается пластическая составляющая приращения деформации.

Используя предположение о несжимаемости материала, получим первое уравнение для определения перемещений:

$$e_\rho + e_\theta = 0 \tag{2}$$

Второе уравнение получается следующим образом. В задаче Л. А. Галина в пластической области $\tau_{\rho\theta} = 0$; далее

$$e_{\rho\theta} = e_{\rho\theta}^{\,p} + e_{\rho\theta}^{\,e} = e_{\rho\theta}^{\,p} + \frac{\tau_{\rho\theta}}{2G} \tag{3}$$