

СМЕШАННАЯ ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КВАДРАНТА

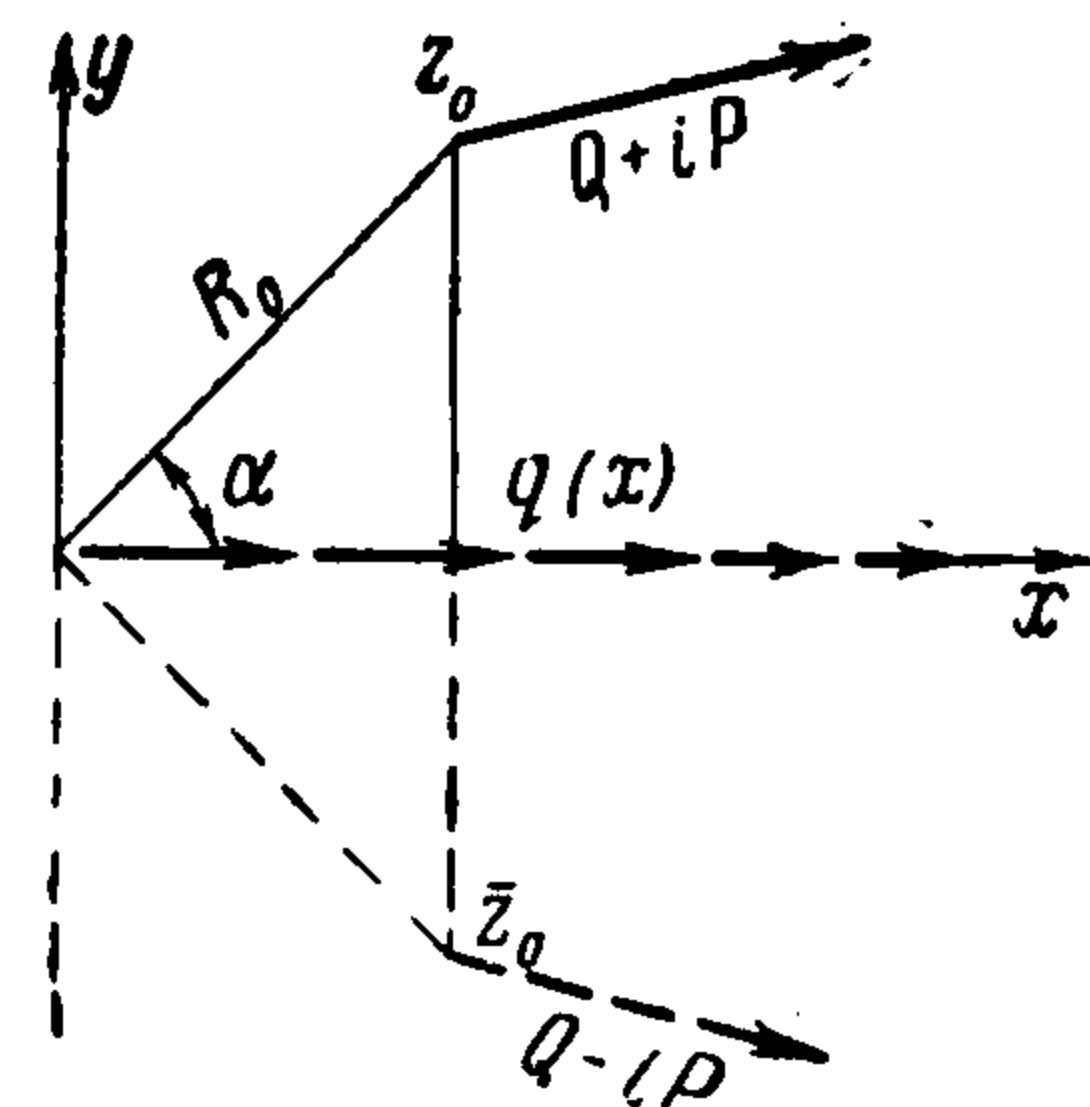
Л. М. Куршин

(Новосибирск)

Задача сводится к интегральному уравнению, определяющему касательные напряжения в защемлении. Полученное решение позволяет дополнить результаты работ [1,2,3].

Рассмотрим задачу о напряжениях в упругом квадрante $x > 0, y > 0$ плоскости переменной $z = x + iy$ при действии на него сосредоточенной силы $Q + iP$, приложенной в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ ($x_0 > 0, y_0 > 0$). Пусть при $y = 0$ равны нулю смещения u, v , а при $x = 0$ равны нулю внешние усилия (фиг. 1).

Для решения задачи дополним квадрант до полуплоскости $x > 0$. Новый квадрант $x > 0, y < 0$ нагрузим симметрично в точке $z_0 = x_0 - iy_0$ силой $Q - iP$. Введем также дополнительную, пока произвольную, нагрузку $q(x)$, распределенную вдоль оси x . Очевидно, при действии на полуплоскость $x > 0$ симметричных нагрузок $Q + iP, Q - iP$ и $q(x)$ при $y = 0$ смещение v равно нулю. Нагрузку $q(x)$ определим таким образом, чтобы на оси x выполнялось также условие $u = 0$.



Фиг. 1

Рассмотрим напряженное состояние полученной полуплоскости $x > 0$ со свободным краем $x = 0$ от нагрузок $Q + iP, Q - iP$ и $q(x)$.

Если для напряжений использовать известные представления

$$\begin{aligned} X_x + Y_y &= 2 [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \\ Y_y - X_x + 2iX_y &= 2 [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi'(z)] \end{aligned} \quad (1)$$

то для общего случая силы $P + iQ$, приложенной в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, согласно формулам¹ работы [5] можно получить

$$\Phi_1(Q + iP, z, z_0) = -\frac{Q + iP}{2\pi(1 + \kappa)} \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{\kappa}{z + \bar{z}_0} \right) - \frac{Q - iP}{2\pi(1 + \kappa)} \frac{z_0 + \bar{z}_0}{(z + \bar{z}_0)^2} \quad (2)$$

$$\Psi_1(Q + iP, z, z_0) = \frac{Q - iP}{2\pi(1 + \kappa)} \left[\frac{\kappa}{z - z_0} + \frac{1}{z + \bar{z}_0} + \frac{z_0 + \bar{z}_0}{(z + \bar{z}_0)^2} \right] - \bar{z}_0 \frac{d\Phi_1}{dz} \quad \left(\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \right)$$

В случае действия на полуплоскость нагрузок $Q + iP, Q - iP$ и $q(x)$ будем иметь

$$\Phi(z) = \Phi_1(Q + iP, z, z_0) + \Phi_1(Q - iP, z, \bar{z}_0) + \int_0^{\infty} \Phi_1[q(t), z, t] dt \quad (3)$$

$$\Psi(z) = \Psi_1(Q + iP, z, z_0) + \Psi_1(Q - iP, z, \bar{z}_0) + \int_0^{\infty} \Psi_1[q(t), z, t] dt$$

Если определить $q(x)$ из условия $u = 0$ при $y = 0$, то формулы (3) и (1) при $x > 0, y > 0$ дадут решение задачи о напряжениях в упругом квадрante с заданными краевыми условиями.

Условие $u = 0$ при $y = 0$ с точностью до смещения тела как жесткого целого и с учетом того, что решение (3) удовлетворяет условию $v = 0$ при $y = 0$, равносильно условию $u_x + iv_x = 0$, которое с использованием представлений (1) можно записать в виде

$$\kappa\Phi(x) - \overline{\Phi(x)} - x\overline{\Phi'(x)} - \overline{\Psi'(x)} = 0 \quad (4)$$

¹ При выводе формул (2) была исправлена ошибка в одной из формул работы [5].

Подчиняя функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ условию (4), получим для $q(x)$ сингулярное интегральное уравнение

$$2\kappa \int_0^{\infty} \frac{q(t)}{t-x} dt - \int_0^{\infty} \left[\frac{1+\kappa^2}{t+x} + \frac{4t(x-t)}{(t+x)^3} \right] q(t) dt = \quad (5)$$

$$= (Q+iP)F(x, z_0) + (Q-iP)F(x, \bar{z}_0)$$

где

$$F(x, z_0) = \frac{\kappa}{x-z_0} + \frac{z_0-\bar{z}_0}{(x-z_0)^2} + \frac{\kappa}{x-\bar{z}_0} + \frac{1}{x+z_0} + \frac{\kappa(z_0+\bar{z}_0)}{(x+z_0)^2} -$$

$$- \frac{2(z_0-x)(z_0+\bar{z}_0)}{(x+z_0)^3} + \frac{\kappa^2}{x+\bar{z}_0} - \frac{2\kappa\bar{z}_0}{(x+\bar{z}_0)^2}$$

Проведем регуляризацию уравнения (5), полагая

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{q(t)}{t-x} dt = \frac{r(x)}{\sqrt{x}} \quad (6)$$

С учетом интегрируемости функции $q(x)$ имеем обращение [4]

$$q(x) = \frac{1}{\pi i \sqrt{x}} \int_0^{\infty} \frac{r(t)}{t-x} dt \quad (7)$$

Вводя в уравнение (5) выражения (6) и (7), изменив порядок интегрирования и учитывая, что

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t+x)(t_1-t)} = \frac{\pi}{\sqrt{x}(x+t_1)}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{t(x-t)dt}{\sqrt{t}(t_1-t)(t+x)^3} = -\frac{\pi\sqrt{x}}{4x(x+t_1)^3} (x^2 - 6xt_1 + t_1^2)$$

получим для функции $r(x)$ уравнение

$$r(x) + \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r(t)}{x+t} dt + \frac{4}{\kappa\pi} \int_0^{\infty} \frac{tx}{(t+x)^3} r(t) dt =$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2\kappa\pi i} [(Q+iP)F(x, z_0) + (Q-iP)F(x, \bar{z}_0)] \quad (8)$$

Полагая $t=e^\tau$, $x=e^\xi$, $r(x)=\psi(\xi)$, запишем уравнение (8) в виде

$$\psi(\xi) + \frac{\kappa}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\tau) d\tau}{1+e^{\xi-\tau}} + \frac{4}{\kappa\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\xi-\tau}}{(1+e^{\xi-\tau})^3} \psi(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{\sqrt{e^\xi}}{2\kappa\pi i} [(Q+iP)F(e^\xi, z_0) + (Q-iP)F(e^\xi, \bar{z}_0)] \quad (9)$$

Применяя к уравнению (9) двустороннее преобразование Лапласа и обозначив

$$R(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) e^{-p\xi} d\xi$$

получим

$$R(p) \left[1 + \frac{\kappa}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-p\theta} d\theta}{1+e^\theta} + \frac{4}{\kappa\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(1-p)\theta} d\theta}{(1+e^\theta)^3} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\kappa\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [(Q+iP)F(e^\xi, z_0) + (Q-iP)F(e^\xi, \bar{z}_0)] e^{(1/2-p)\xi} d\xi \quad (10)$$

Для интегралов левой и правой частей имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-p\theta}}{1+e^\theta} d\theta = -\frac{\pi}{\sin \pi p}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(1-p)\theta}}{(1+e^\theta)^3} d\theta = \frac{p(p+1)}{2} \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(1/2-p)\xi}}{e^\xi - z_0} d\xi = \frac{\pi i e^{i\pi p}}{\cos \pi p} z_0^{-p-1/2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(1/2-p)\xi}}{(e^\xi - z_0)^2} d\xi = -\frac{\pi i e^{i\pi p}}{2 \cos \pi p} (2p+1) z_0^{-p-3/2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(1/2-p)\xi}}{(e^\xi - z_0)^3} d\xi = \frac{\pi i e^{i\pi p}}{8 \cos \pi p} (2p+1)(2p+3) z_0^{-p-5/2}$$

Здесь $-1/2 < \operatorname{Re} p < 0$. Уравнение (10) можно теперь записать в виде

$$R(p) \left[1 - \frac{\kappa}{2 \sin \pi p} + \frac{2}{\kappa} \frac{p(p+1)}{\sin \pi p} \right] =$$

$$= \frac{e^{\pi i p}}{2\kappa \cos \pi p} \{ (Q + iP) F_1(p, z_0) + (Q - iP) F_1(p, \bar{z}_0) \} \quad (11)$$

Здесь

$$F_1(p, z_0) = \kappa z_0^{-p-1/2} - (z_0 - \bar{z}_0) \left(p + \frac{1}{2} \right) z_0^{-p-3/2} + \kappa \bar{z}_0^{-p-1/2} + (-z_0)^{-p-1/2} -$$

$$- \kappa (z_0 + \bar{z}_0) \left(p + \frac{1}{2} \right) (-z_0)^{-p-3/2} + 2(z_0 + \bar{z}_0) \left(p + \frac{1}{2} \right)^2 (-z_0)^{-p-5/2} + \kappa^2 (-\bar{z}_0)^{-p-1/2} +$$

$$+ 2\kappa \bar{z}_0 \left(p + \frac{1}{2} \right) (-\bar{z}_0)^{-p-3/2}.$$

Вводя $z_0 = R_0 e^{i\alpha}$ ($0 < \alpha < 1/2 \pi$), из уравнения (11) получим

$$R(p) = \frac{2i \operatorname{tg} \pi p T(p)}{2\kappa \sin \pi p - \kappa^2 + 4p(p+1)} R_0^{-p-1/2} \quad (12)$$

где

$$T(p) = 2Q\kappa \sin \left[\pi p - \alpha \left(p + \frac{1}{2} \right) \right] +$$

$$+ Q \left\{ -2 \left(p + \frac{1}{2} \right) \sin \alpha \sin \left[\pi p - \alpha \left(p + \frac{3}{2} \right) \right] - \cos \left(p + \frac{1}{2} \right) \alpha + \right.$$

$$+ 2 \left(p + \frac{1}{2} \right) \left[2 \left(p + \frac{1}{2} \right) - \kappa \right] \cos \alpha \cos \left(p + \frac{3}{2} \right) \alpha + \kappa \left[2 \left(p + \frac{1}{2} \right) - \kappa \right] \cos \left(p + \frac{1}{2} \right) \alpha \left. \right\} +$$

$$+ P \left\{ 2 \left(p + \frac{1}{2} \right) \sin \alpha \sin \left[\pi p - \alpha \left(p + \frac{3}{2} \right) \right] - \sin \left(p + \frac{1}{2} \right) \alpha + \right.$$

$$+ 2 \left(p + \frac{1}{2} \right) \left[2 \left(p + \frac{1}{2} \right) - \kappa \right] \cos \alpha \sin \left(p + \frac{3}{2} \right) \alpha - \kappa \left[2 \left(p + \frac{1}{2} \right) - \kappa \right] \sin \left(p + \frac{1}{2} \right) \alpha \left. \right\}$$

Применяя обратное преобразование, найдем

$$\psi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2i \operatorname{tg} \pi p T(p)}{2\kappa \sin \pi p - \kappa^2 + 4p(p+1)} R_0^{-p-1/2} e^{p\xi} dp \quad \left(-\frac{1}{2} < \sigma < 0 \right) \quad (13)$$

Вводя $x = e^\xi$, $r_1(x) = \psi(\xi)$, обращаясь к формуле (7) и учитывая, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^p}{t-x} dt = -\frac{x^p}{\operatorname{tg} \pi p}$$

получим

$$q(x) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{R_0^{-p-1/2} x^{p-1/2} T(p)}{2\kappa \sin \pi p - \kappa^2 + 4p(p+1)} dp$$

Удобно ввести в качестве переменной интегрирования величину $s = p + 1/2$. Тогда окончательно будем иметь

$$q(x) = -\frac{1}{\pi i x} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{S(s)}{4s^2 - 2\kappa \cos \pi s - (1 + \kappa^2)} \left(\frac{x}{R_0}\right)^s ds \quad \left(0 < \gamma < \frac{1}{2}\right) \quad (14)$$

где

$$S(s) = -2Q\kappa \cos(\pi - \alpha)s + Q\{-2s \sin \alpha \sin[\pi s - \alpha(s+1)] - \cos \alpha s + \\ + 2s(2s - \kappa) \cos \alpha \cos(s+1)\alpha + \kappa(2s - \kappa) \cos \alpha s\} + \\ + P\{-2s \sin \alpha \cos[\pi s - \alpha(s+1)] - \sin \alpha s + \\ + 2s(2s - \kappa) \cos \alpha \sin(s+1)\alpha - \kappa(2s - \kappa) \sin \alpha s\}$$

При вычислении интегралов при $x < R_0$ вычеты берутся справа, а при $x > R_0$ слева от прямой γ . В частности, при $x < R_0$ имеем

$$q(x) = \frac{1}{x} \sum_k \left(\frac{x}{R_0}\right)^{\rho_k} \left[\operatorname{Re} \Omega_k \cos\left(\theta_k \ln \frac{x}{R}\right) - \operatorname{Im} \Omega_k \sin\left(\theta_k \ln \frac{x}{R}\right) \right] \quad (15)$$

где

$$\Omega_k = \frac{S(s_k)}{\kappa \pi \sin \pi s_k + 4s_k}, \quad s_k = \rho_k + i\theta_k \quad \left(\rho_k > 0, 0 < \theta_k < \frac{1}{2}\pi\right)$$

а S_k — корни уравнения

$$4s^2 - 2\kappa \cos \pi s - (1 + \kappa^2) = 0 \quad (16)$$

Так как уравнение (16) всегда имеет корень, для которого $\rho < 1$, то можно сделать вывод о том, что при приближении к углу упругого квадранта напряжения $Xy = 1/2 q(x)$, бесконечно возрастая по абсолютной величине, одновременно бесконечное число раз меняет свой знак.

Если положить $s = 2\lambda + 1$, то уравнение (16) совпадает с уравнением, полученным в работе [1] для оценки порядка возрастания напряжений вблизи угла.

Автор признателен А. Я. Александрову за ряд ценных советов при выполнении этой работы.

Поступила 24 IV 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M. L. Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension. J.—I. Appl. Mech., vol. 20. No. 4, 1952.
2. Huth J. H. The Complex-Variable Approach to Stress Singularities. J.—I. Appl. Mech., vol. 20, No. 4, 1953.
3. Williams M. L. The Complex-Variable Approach to Stress Singularities. J.—I. Appl. Mech., vol. 23, No 3, 1956.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1946.
5. Melan E. Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Innern beanspruchten Halbscheibe. Zt — für angew. Math., und Mech., H. 6, 1932.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В БЕСКОНЕЧНЫХ ПЛИТАХ

М. В. Дубинкин

(Москва)

В работе Я. С. Уфлянда [1] среди других задач рассмотрено действие сосредоточенной силы на бесконечную плиту. Решается уравнение, учитывающее инерцию вращения элементов пластины и влияние перерезающих сил, но граничные условия поставлены согласно элементарной теории. В настоящей работе рассматривается действие кольцевого давления на бесконечную плиту с учетом инерции вращения и сдвига. Приводится сравнение перерезающих сил, вычисленных по элементарной теории, при постановке задачи в работе [1] и по задаче, поставленной ниже.