НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СПЕЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. И. Розовский

(Днепропетровск)

1. Ю. Н. Работнов [1] построил новую спецфункцию

$$Э_\alpha(x, s) = s^{-\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu s^{\nu(1-\alpha)} [\Gamma(\nu - \nu\alpha - \alpha + 1)]^{-1} \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{1}$$

служащую ядром интегрального оператора $Э_\alpha{}^*$, и установил два фундаментальных свойства этого оператора, делающие принцип В. Вольтерра [1] наиболее эффективным средством решения задач линейной теории ползучести изотропных и однородных тел. Этот принцип может быть с успехом использован также при решении задач теории ползучести неоднородных и анизотропных тел, если предварительно установить соответствующие свойства агрегатов $Э_\alpha{}^*$-операторов.

Теорема 1. Если $x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_m$, то при $m > 1$ имеем

$$\prod_{k=1}^{m} Э_\alpha{}^*(x_k) = \sum_{k=1}^{m} \Big[\prod_{i=1}^{m} (x_k - x_i)\Big]^{-1} Э_\alpha{}^*(x_k) \qquad (k \neq i) \tag{2}$$

Доказательство. В справедливости формул (2) можно убедиться методом математической индукции. Действительно, при $m = 2$ соотношение (2) совпадает с формулой Ю. Н. Работнова [1]

$$Э_\alpha{}^*(x_1)\, Э_\alpha{}^*(x_2) = [Э_\alpha{}^*(x_1) - Э_\alpha{}^*(x_2)]\,(x_1 - x_2)^{-1} \tag{3}$$

Пусть

$$\prod_{k=1}^{m-1} Э_\alpha{}^*(x_k) = \sum_{k=1}^{m-1} \Big[\prod_{i=1}^{m} (x_k - x_i)\Big]^{-1} Э_\alpha{}^*(x_k)$$

Тогда

$$\prod_{k=1}^{m} Э_\alpha{}^*(x_k) = Э_\alpha{}^*(x_m) \prod_{k=1}^{m-1} Э_\alpha{}^*(x_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} \Big[\prod_{i=1}^{m} (x_k - x_i)\Big]^{-1} [Э_\alpha{}^*(x_k) - Э_\alpha{}^*(x_m)] = \sum_{k=1}^{m} \Big[\prod_{i=1}^{m} (x_k - x)\Big]^{-1} Э_\alpha{}^*(x_k).$$

ибо

$$\sum_{k=1}^{m-1} \Big[\prod_{i=1}^{m} (x_k - x_i)\Big]^{-1} = -\Big[\prod_{i=1}^{m-1} (x_m - x_i)\Big]^{-1}$$

Таким образом, справедливость (2) доказана.

Следствие. При $x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_m$ на основе (2) имеем

$$\sum_{k=1}^{m} M_k \prod_{n=1}^{k} Э_\alpha{}^*(x_n) = \sum_{k=1}^{m} \Big\{\Big[\prod_{i=1}^{k} (x_k - x_i)\Big]^{-1} \sum_{p=k}^{m} M_p\Big\} Э_\alpha{}^*(x_k) \tag{4}$$

Замечание. В случае равных значений x_k правые части равенств (2) и (4) становятся неопределенностями. Чтобы раскрыть эти неопределенности, удобнее предварительно представить (2) в следующем виде

$$\prod_{k=1}^{m} Э_\alpha^*(x_k) = [V_{(m)}(x_1, \ldots, x_m)]^{-1} \sum_{k=1}^{m} A_{k;\, m-1} Э_\alpha{}^*(x_k) \tag{5}$$

где $A_{k;\, m-1}$ — адьюнкта элемента x_k^{m-1} $(k = 1, \ldots, m)$ детерминанта Вандерманда $V_{(m)}(x_1, \ldots, x_m)$. Тогда при $x_1 = \ldots = x_{j+1}$, где $j + 1 \leqslant m$, из (5) следует

$$\prod_{k=1}^{m} Э_\alpha{}^*(x_k) = \frac{\left[\dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big[\cdots\Big[\dfrac{\partial}{\partial x_1} \sum\limits_{k=1}^{m} A_{k,\, m-1} Э_\alpha{}^*(x_k)\Big]_{x_1 = x_2}\Big]\right]_{x_j = x_{j+1}}}{\left[\dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big[\cdots\Big[\dfrac{\partial}{\partial x_1} V_{(m)}(x_1, \ldots, x_m)\Big]_{x_1 = x_2}\Big]\right]_{x_j = x_{j+1}}} \tag{6}$$

В (6) операция дифференцирования выполняется сначала по x_1, затем после подстановки x_2 вместо x_1 по x_2 и так далее до x_j.

При $x_1 = \ldots = x_{j+1}$ формула (4) преобразовывается аналогичным образом.

Теорема 2. Если $r_1 \neq r_2 \neq \ldots \neq r_m$, то

$$\left[1 - \sum_{k=1}^{m} M_k \prod_{n=1}^{k} \vartheta_\alpha^*(x_n)\right]^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{m} a_k \vartheta_\alpha^*(r_k) \tag{7}$$

где r_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ являются корнями уравнения

$$1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{x_k - r} = 0 \qquad \left(B_k = \left[\prod_{i=1}^{k}(x_k - x_i)\right]^{-1} \sum_{p=k}^{m} M_p\right) \tag{8}$$

а коэффициенты a_k определяются из системы m линейных уравнений

$$1 + \sum_{k=1}^{m} (B_n - r_k)^{-1} a_k = 0, \qquad B_n \neq r_k \qquad (n = 1, \ldots, m) \tag{9}$$

определитель которой не равен нулю.

Доказательство. Из (7) с учетом (4) следует

$$\sum_{k=1}^{m}\left[a_k \vartheta_\alpha^*(r_k) - B_k \vartheta_\alpha^*(x_k)\right] - \sum_{k=1}^{m} a_k \vartheta_\alpha^*(x_k) \sum_{k=1}^{m} B_k \vartheta_\alpha^*(x_k) = 0 \tag{10}$$

После 2m-кратного применения формулы (3) из (10) получим

$$\sum_{k=1}^{m}\left[a_k\left(1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{B_n}{x_k - r_k}\right)\vartheta_\alpha^*(r_k) - B_k\left(1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{B_k - r_n}\right)\vartheta_\alpha^*(x_k)\right] = 0 \tag{11}$$

Так как все a_k и B_k одновременно не равны нулю, то из (11) следует

$$1 + \sum_{k=1}^{m} B_k (x_k - r_n)^{-1} = 0, \qquad x_k \neq r_n \tag{12}$$

$$1 + \sum_{k=1}^{m} a_k (B_n - r_k)^{-1} = 0, \qquad B_n \neq r_k \qquad (n = 1, \ldots, m) \tag{13}$$

Из структуры m равенств (12) вытекает, что r_n являются корнями уравнения (5). Система уравнений (13) совпадает с (9) и служит для определения коэффициентов a_k, которые выражаются через уже известные величины r_k и B_n $(n, k = 1, \ldots, m)$.

Замечание. В случае кратных корней уравнения (8) в правой части (7) после раскрытия неопределенности появятся производные ϑ_α^*-оператора аналогично (6).

2. В качестве приложения рассмотрим задачу о кручении вала, составленного из m цилиндрических слоев, соединенных по поверхностям соприкосновения жестко путем спайки с учетом ползучести материала каждого слоя. Если каждый из слоев обладает цилиндрической анизотропией, совпадающей с осью вала, и имеются плоскости упруго-наследственной симметрии, то для применения принципа В. Вольтерра следует в формуле (44.13) книги С. Г. Лехницкого ([2]), определяющей напряжения $\tau_{\theta z}^{k}$ (индекс $k = 1, \ldots, m$), заменить упругие константы $G_{\theta z}^{k}$ операторами $\bar{G}_{\theta z}^{kt} = G_{\theta z}^{k0}[1 - \chi_k \vartheta_\alpha^*(-\beta_k)]$ $(\beta_k = \tau_k^{\alpha-1},\ \chi_k = \lambda_k \tau_k^{\alpha-1},\ \lambda_k = (G_{\theta z}^{k0} - G_{\theta z}^{k\infty}) / G_{\theta z}^{k0})$

где τ_k — время релаксации, $G_{\theta z}^{k0}$ и $G_{\theta z}^{k\infty}$ — мгновенный и установившийся модули сдвига материала k-го слоя. Так как $G_{\theta z}^{k0} > G_{\theta z}^{k\infty}$, то $0 < \lambda_k < 1$. В результате такой замены после некоторых преобразований получим

$$\tau_{\theta z}^{kt} = \tau_{\theta z}^{k0}[1 - \chi_k \vartheta_\alpha^*(-\beta_k^*)]\left[1 - \sum_{k=1}^{m} \chi_k q_k \vartheta_\alpha^*(-\beta_k)\right]^{-1} \tag{14}$$

где

$$q_k = G_{\theta z}^{k0}(b_k - b_{k-1})\left[\sum_{k=1}^{m}(b_k - b_{k-1})\, G\quad\right]^{-1} \tag{15}$$

Здесь b_k — расстояние от оси до границы между k-м и $(k+1)$-м слоем ($b_0 = a$, $b_m = b$, где a и b — внутренний и внешний радиусы сечения вала), $\tau_{\theta z}{}^{kt}$ и $\tau_{\theta z}{}^{k0}$ — эффективное и мгновенное напряжения. Вал деформируется скручивающими моментами M_0, постоянными во времени t, приложенными на его концах. В рассматриваемой задаче $x_k = -\beta_k$ и $B_k = q_k\chi_k$, где $\beta_k > 0$, $0 < q_k < 1$, $\chi_k < \beta_k$. Поэтому уравнение (8) преобразуется к следующему виду;

$$\sum_{k=0}^{m}\left[1 - \sum_{i=1}^{m} q_i(\beta_i + \delta_k)^{-1}\right]\eta_k r^k = 0 \tag{16}$$

Здесь

$$\delta_0 = 0, \quad \delta_m = 1, \quad \eta_0 = \prod_{i=1}^{m}\beta_i, \quad \eta_k = \sum_{i_1,\ldots,i_k}^{m}\beta_{i_1}\beta_{i_2}\ldots\beta_{i_k} \quad \begin{matrix}(k=1,\ldots,m-1)\\(i_1 \neq \ldots \neq i_k)\end{matrix}$$

$$\delta_k = \eta_k\eta_{k-1}^{-1}, \quad \eta_{k-1} = \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}}^{m}\beta_{i_1}\beta_{i_2}\ldots\beta_{i_{k-1}} \quad (i_1 \neq \ldots \neq i_{k-1} \neq \ldots \neq i)$$

Структура коэффициентов уравнения (16) такова, что неравенство

$$\lambda_1 q_1 + \cdots + \lambda_m q_m \leqslant 1 \tag{17}$$

является достаточным условием положительности всех коэффициентов уравнения (17). Необходимое условие фактического осуществления неравенства (17) выполняется всегда, ибо $0 < \lambda_i q_i < 1$. При $m = 1$ (случай однородного вала) имеем $\lambda_1 q_1 < 1$, что дает $r < 0$. При $m = 2$ неравенство (17) является достаточным условием отрицательности действительных частей корней уравнения (16); при $m > 2$ к условию (17) должны быть присоединены еще условия Гурвица, чтобы все корни уравнения (16) имели указанный характер.

Если r_k являются простыми корнями уравнения (16), то из (14) следует

$$\tau_{\theta z}{}^{kt} = \tau_{\theta z}{}^{k0}\left\{1 - \int_0^t \sum_{k=1}^{m}\left[\theta_1 \mathfrak{Э}_\alpha(-\beta_k, s) - \theta_2 \mathfrak{Э}_\alpha(r_k, s)\right] ds\right\} \tag{18}$$

где

$$\theta_1 = \chi_k\left[1 - a_k(\beta_k + r_k)^{-1}\right], \qquad \theta_2 = a_k\left[1 - \chi_k(\beta_k + r_k)^{-1}\right]$$

Здесь коэффициенты a_k определяются из (8) при $B_k = \chi_k q_k$. Выражение (18) представляет собой ряд, сходящийся при любом t, так как $Э_\alpha$-функция определяется равномерно сходящимся рядом (1). Так как ряд (18) сходится медленно, то целесообразно приближенно представить $\tau_{\theta z}{}^{kt}$ в следующем виде:

$$\tau_{\theta z}{}^{kt} \approx \tau_{\theta z}{}^{k0}\left\{1 - \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\theta_1}{\beta_k}\left(1 - \exp\left(-\gamma\beta_k t^{1-\alpha}\right)\right) + \frac{\theta_2}{r_k}\left(1 - \exp\left(\gamma r_k t^{1-\alpha}\right)\right)\right]\right\} \tag{19}$$

где $\gamma = (1-\alpha)^{1-\alpha}$. Приближенное равенство (19) обращается в точное при $\alpha = 0$.

Таким образом при одинаковых характеристиках ползучести всех слоев вала возможен лишь единственный вид изменения $\tau_{\theta z}{}^{kt}$ при $t \to \infty$, а именно, монотонное стремление $\tau_{\theta z}{}^{kt}$ к предельному значению, которое всегда конечно.

Если характеристики ползучести слоев вала различные, то стремление $\tau_{\theta z}{}^{kt}$ к установившемуся (предельному) состоянию при $t \to \infty$ может происходить путем монотонного, немонотонного и замедленного изменения $\tau_{\theta z}{}^{kt}$ во времени в зависимости от вида корней уравнения (16). Возможен также случай отсутствия конечного предельного значения $\tau_{\theta z}{}^{kt}$ при $t \to \infty$.

Поступила 20 V 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. ПММ, т. XII, вып. 1, 1948.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, М.— Л., 1950.