ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В СЛУЧАЕ ДВУХ НУЛЕВЫХ КОРНЕЙ

С. В. Калинин

(Москва)

Г. В. Каменков в своей монографии [1] рассмотрел устойчивость установившихся движений в случае с двумя нулевыми корнями. В данной работе показано, что метод Г. В. Каменкова можно распространить при некоторых условиях на исследования устойчивости периодических движений тоже в случае с двумя нулевыми корнями.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $(n+2)$-го порядка, причем характеристическое уравнение ее имеет два нулевых корня и n корней с отрицательными вещественными частями. Системы дифференциальных уравнений в этом предположении подразделяются на два класса:

1) случаи, когда нулевым корням отвечает одна группа решений; система приводится к виду

$$\frac{dx}{dt}=y+X(x,\ y,\ x_s),\qquad \frac{dy}{dt}=Y(x,\ y,\ x_s)$$

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n+X_s(x,\ y,\ x_s)\qquad (s=1,\ldots,n)\tag{1.1}$$

2) случаи, когда нулевым корням отвечают две группы решений; система приводится к виду

$$\frac{dx}{dt}=X(x,\ y,\ x_s),\qquad \frac{dy}{dt}=Y(x,\ y,\ x_s)$$

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n+X_s(x,\ y,\ x_s)\qquad (s=1,\ldots,n)\tag{1.2}$$

Будем предполагать, что в уравнениях (1.1) и (1.2) коэффициенты p_{sr} являются ограниченными периодическими функциями t с периодом ω и определяются выражениями

$$p_{sr}=c_{sr}+\varepsilon f_{sr}(t)\qquad \left(c_{sr}=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega p_{sr}(t)\,dt\right)\tag{1.3}$$

где c_{sr} — постоянные, f_{sr} — периодические функции t с периодом ω, а ε — некоторый параметр.

Функции X, Y, X_s являются голоморфными функциями x, y, x_s в области $x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant A$ для $t\geqslant t_0$, и их разложение начинается по крайней мере с членов второй степени, причем коэффициенты разложения этих функций являются также ограниченными периодическими функциями t такого же периода и вида, как коэффициенты p_{sr}.

2. Рассмотрим сначала задачу об устойчивости, когда она приводится к исследованию системы уравнений (1.1). В этой системе члены Y и X_s имеют следующее разложение: (2.1)

$$Y=(a^{(0)}+\varepsilon A^{(0)})\,x^{\alpha_0}+\ldots+(a^{(1)}+\varepsilon A^{(1)})\,x^{\alpha_1}+\ldots+\sum_k Q^{(k,\,0)}x^k+y\sum_k Q^{(k,\,1)}x^k+\ldots$$

$$X_s=(a_s^{(0)}+\varepsilon A_s^{(0)})\,x^{\beta_0}+\ldots+(a_s^{(1)}+\varepsilon A_s^{(1)})\,x^{\beta_1}+\ldots+X_s^*(x,\ y,\ x_s)\quad (s=1,\ldots,n)$$

Путем преобразований можно получить, что степень α_k критического переменного x в преобразовании Y будет не выше степени β_k того же переменного в соответствующих членах разложения X_s, т. е. всегда $\alpha_k\leqslant\beta_k$. В разложениях $a^{(r)}$ и $a_s^{(r)}$ — постоянные величины, $A^{(r)}$ и $A_s^{(r)}$ — ограниченные периодические функции t с периодом ω, а $Q^{(k,\,i)}$ — голоморфные функции переменных x_s. Заменим в системе (1.1) и в членах разложений уравнений периодические коэффициенты осредненными за один период постоянными коэффициентами.

После этого система (1.1) примет вид, исследованный Г. В. Каменковым:

$$\frac{dx}{dt} = y + \overline{X}, \qquad \frac{dy}{dt} = \overline{Y}, \qquad \frac{dx_s}{dt} = c_{s1}x_1 + \ldots + c_{sn}x_n + \overline{X}_s \tag{2.2}$$

Разложения (2.1) примут такие же выражения, какими они даны Г. В. Каменковым в его работе [1].

Первое уравнение системы (2.2) преобразуем к виду

$$\frac{dx}{dt} = y^* \tag{2.3}$$

Будем также считать, что функции $x_s(x, y)$ являются решением уравнений

$$c_{s1}x_1 + \ldots + c_{sn}x_n + \overline{X}(x, y, x_s) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Исследование устойчивости или неустойчивости движения, описываемого системой (2.2), определяется при помощи функции Ляпунова или Четаева. Рассмотрим, например, функцию Четаева, отвечающую системе (2.2):

$$V = xy + W(x_1, \ldots, x_n) \tag{2.4}$$

где функция W определяется из уравнения

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_s}(c_{s1}x_1 + \ldots + c_{sn}x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

Так как все корни определяющего уравнения имеют лишь отрицательные вещественные части, то функция W будет знакоопределенной формой переменных $x_1, \ldots, x_n$, а функция V — определенно-положительной.

Полная производная V' от функции Четаева (2.4) в силу исходных уравнений (1.1) будет иметь вид:

$$V' = y^2 + a^{(0)}yx^{\alpha_0+1} + a^{(1)}yx^{\alpha_1+1} + x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \tag{2.5}$$
$$+ \varepsilon H\left(A^{(0)}yx^{\alpha_0+1}, A^{(1)}yx^{\alpha_1+1}, \ldots, A_s^{(0)}x^{\beta_0}y, \ldots\right) + [R]$$

В области $x > 0$ и $y > 0$, где имеет место неравенство $V' > 0$, члены $a^{(0)}yx^{\alpha_0+1}$ и $a^{(1)}yx^{\alpha_1+1}$ будут положительными, если $a^{(0)} > 0$ и $a^{(1)} > 0$. Через H обозначена некоторая функция от периодических частей коэффициентов; она обращается в нуль вместе с ε.

Функция $[R]$ содержит переменные высшего порядка.

Так как функция V' зависит от времени, то для ее знакоопределенности достаточно найти такую, не зависящую от t определенно-положительную функцию $W°$, чтобы одно из двух выражений $(V' - W°)$ или $(-V' - W°)$ представляло функцию положительную.

Положим

$$W° = \mu(y^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2) \tag{2.6}$$

и составим выражение $V' - \mu(y^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)$, где μ — некоторое положительное число, меньшее единицы.

Для квадратичной части выражения (2.5) напишем определитель $D(\mu)$, который в краткой записи имеет вид:

$$D(\mu) = \begin{vmatrix} 1-\mu+w_{00} & w_{01}\ldots & w_{0n} \\ w_{10} & 1-\mu+w_{11}\ldots & w_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{n0} & w_{n1}\ldots & 1-\mu+w_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.7}$$

Главные диагональные миноры порядка q от определителя $D(\mu)$ являются полиномами ε со свободным членом $(1-\mu)^q$ и с частью, зависящей от ε и уничтожающейся вместе с ε.

Потребуем, чтобы главные диагональные миноры определителя (2.7) были положительными, тогда функция V' будет определенно-положительной, если ε не будет превосходить величины, определяемой из условия Сильвестра. В этом случае установившееся движение будет неустойчиво.

Ряд случаев устойчивости движения, описываемого системой (1.1), исследуется при помощи функции Ляпунова, причем анализ проводится так же, как указано выше.

3. Рассмотрим теперь задачу об устойчивости, когда система имеет две группы решений и приводится к виду (1.2). Перепишем систему уравнений (1.2) в развернутом виде:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y) + \sum Q^{(k_1, k_2)} x^{k_1} y^{k_2}, \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y) + \sum P^{(k_1, k_2)} x^{k_1} y^{k_2}$$

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n + \overline{X}_s(x, y) + \sum P_s^{(n_1, n_2)} x^{n_1} y^{n_2} \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (3.1)$$

Здесь все суммы распространены на все целые положительные числа k_1, k_2, n_1 и n_2, функции $Q^{(k_1, k_2)}$, $P^{(k_1, k_2)}$ и $P_s^{(n_1, n_2)}$ — голоморфные, причем их разложение начинается с членов не ниже второго порядка.

Величины $X(x, y)$, $Y(x, y)$ и $X_s(x, y)$ в уравнениях (3.1) суть голоморфные функции переменных x, y, не содержащие в своих разложениях членов первого порядка; они начинаются с членов порядка m, и разложение оканчивается на членах порядка N. Они имеют следующий вид:

$$X(x, y) = (a^{(0)} + \varepsilon A^{(0)}) x^m + (a^{(1)} + \varepsilon A^{(1)}) x^{m-1} y + \ldots + X^{(m+N)}(x, y) + \ldots$$

$$Y(x, y) = (b^{(0)} + \varepsilon B^{(0)}) y^m + (b^{(1)} + \varepsilon B^{(1)}) y^{m-1} x + \ldots + Y^{(m+N)}(x, y) + \ldots$$

$$X_s(x, y) = X_s^{(m+N+1)}(x, y) + X_s^{(m+N+2)}(x, y) + \ldots \qquad (3.2)$$

$$(k_1 + k_2 > m + N, \ s = 1, \ldots, n)$$

В системе (3.1) все коэффициенты p_{sr} и коэффициенты разложений функций X, Y, X_s являются ограниченными периодическими функциями t такого же периода и вида, как это было дано ранее выражением (1.3); в разложениях (3.2) величины $a^{(r)}$ и $b^{(r)}$ — постоянные, $A^{(r)}$ и $B^{(r)}$ — периодические функции t с периодом ω, ε — некоторый параметр, N — некоторое целое положительное число.

Заменим в системе (3.1) и в разложениях (3.2) периодические коэффициенты осредненными за один период постоянными коэффициентами, тогда система (3.1) и разложения членов этой системы примут такие же выражения, какими они были даны Г. В. Каменковым в его работе [1].

Исследование системы проводится согласно методу, разработанному Г. В. Каменковым [1] при помощи функции Ляпунова или Четаева.

Во всех случаях после составления функций Четаева или Ляпунова находится полная производная по времени t в силу исходных уравнений с периодическими коэффициентами (3.1). Для знакоопределенности V' находится не зависящая от t определенно-положительная функция $\overline{W}$ типа (2.6); составляется выражение $(V' - \overline{W})$ или $(-V' - \overline{W})$. Для квадратичной части

$$V' - \mu(x^2 + y^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2) \qquad (0 < \mu < 1)$$

составляется определитель $D(\mu)$ типа (2.7). Для знакоопределенности функции V' необходимо, чтобы все диагональные миноры определителя были положительными; таким образом, накладывают необходимые ограничения на параметр ε. Пока ε не будет превосходить величины, определяемой из условий Сильвестра, при исследовании устойчивости периодических движений в случае двух нулевых корней теоремы Г. В. Каменкова остаются в силе.

Поступила 24 V 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Каменков Г. В. Об устойчивости движения. Тр. Казанского авиационного ин-та. № 9, 1939.