К ТЕОРИИ КАЧЕСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Чжан Сы-ин

(Москва — Шеньян)

Рассмотренная здесь система принадлежит к одному широко распространенному классу регулируемых систем, движение которой описывается дифференциальными уравнениями вида [1]

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{m} b_{k\alpha}\eta_\alpha + n_k\mu \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

$$v^2\ddot{\mu} + w\dot{\mu} + s\mu = f^*(\sigma), \qquad \sigma = \sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha\eta_\alpha - r\mu \tag{1}$$

Здесь η_k — обобщенные координаты объекта регулирования, $b_{k\alpha}$ — постоянные параметры объекта регулирования, μ — координата регулирующего органа, n_k — постоянные параметры регулирующего органа, v, w, s —, вообще говоря, известные функции переменных μ, $\dot{\mu}$, σ, в частных случаях s, v могут быть постоянными или нулями, σ — общий (суммарный) управляющий импульс-сигнал, p_α, r — постоянные регулятора, $f^*(\sigma)$ — нелинейная характеристика сервомотора.

Пусть

$$\frac{1}{w} f^*(\sigma) = f(\sigma) \tag{2}$$

В большинстве регулируемых систем $f(\sigma)$ принадлежит к одному из следующих двух классов функций

$$f(\sigma) = 0 \quad \text{при } |\sigma| \leqslant \sigma_*, \qquad \sigma f(\sigma) > 0 \quad \text{при } |\sigma| > \sigma_* \tag{3}$$

где σ_* — некоторое фиксированное, неотрицательное число, характеризующее зону нечувствительности регулятора. Иногда $f(\tau)$ удовлетворяет условиям:

$$\sigma_* = 0, \quad \left[\frac{df(\sigma)}{d\sigma}\right]_{\sigma=0} \geqslant h > 0, \quad \varphi(\sigma) = f(\sigma) - h(\sigma), \quad \sigma\varphi(\sigma) > 0 \text{ при } \sigma \neq 0 \tag{4}$$

где h — заданная постоянная. В частном случае

$$f(\sigma) = +Q \quad \text{при } \sigma > 0, \qquad f(\sigma) = 0 \quad \text{при } \sigma = 0, \qquad f(\sigma) = -Q \quad \text{при } \sigma < 0 \tag{5}$$

Для простоты ограничимся случаем, когда $v^2 = 0$. Кроме того, обозначим

$$\rho_{m+1} = \frac{s}{w} \tag{6}$$

Система (1) примет вид:

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{m} b_{k\alpha}\eta_\alpha + n_k\mu \ (k = 1, \ldots, m), \quad \dot{\mu} = -\rho_{m+1}\mu + f(\sigma), \quad \sigma = \sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha\eta_\alpha - r\mu \tag{7}$$

Систему (7), исключая μ при помощи $\sigma = \Sigma p_\alpha\eta_\alpha - r\mu$ $(r \neq 0)$ и обозначая

$$b_{k\alpha}^\circ = b_{k\alpha} + \frac{n_k p_\alpha}{r} \qquad (\alpha, k = 1, \ldots, m)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha b_{\alpha\beta}^\circ + \rho_{m+1} p_\beta = p_\beta^\circ, \qquad \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{p_\alpha\eta_\alpha}{r} + \rho_{m+1} = \rho^\circ \tag{8}$$

можно привести к виду

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{m} b_{k\alpha}^\circ\eta_\alpha - \frac{n_k}{r}\sigma \quad (k = 1, \ldots, m), \qquad \dot{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha^\circ\eta_\alpha - \rho^\circ\sigma - rf(\sigma) \tag{9}$$

Введем линейное неособое преобразование

$$\chi_s = \sum_{\alpha=1}^{m} C_\alpha^{(s)}\eta_\alpha \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

и выберем коэффициенты $C_\alpha^{(s)}$ так, чтобы

$$-r_s C_\beta^{(s)} = \sum_{\alpha=1}^{m} C_\alpha^{(s)} b_{\alpha\beta}^\circ \quad (\beta,\ s = 1, \ldots, m), \qquad -r = \sum_{\alpha=1}^{m} C_\alpha^{(s)} n_\alpha \tag{11}$$

где r_s — корни уравнения

$$D^\circ(r) = \begin{Vmatrix} b_{11}^\circ + r & b_{21}^\circ \ldots b_{m1}^\circ \\ b_{1m}^\circ & b_{2m}^\circ \ldots b^\circ_{mm} + r \end{Vmatrix} = 0 \tag{12}$$

Тогда приведем систему (9) к канонической форме:

$$\dot{\chi}_k = -r_k \chi_k + \sigma \quad (k = 1, \ldots, m), \qquad \dot{\sigma} = \sum_{k=1}^{m} \beta_k^\circ \chi_k - \rho^\circ \sigma - r f(\sigma) \tag{13}$$

Здесь

$$\beta_k^\circ = \sum_{\alpha=1}^{m} D_k^{\circ(\alpha)} p_\alpha^\circ \qquad \left(\eta_k = \sum_{\alpha=1}^{m} D_k^{\circ(k)} \chi_\alpha\right) \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{14}$$

Согласно (8) и (12) параметры регулирующего органа n_k, p_α, r можно выбрать так, чтобы для каждого r_s имело место

$$\operatorname{Re} r_s > 0 \qquad (s = 1, \ldots, m) \tag{15}$$

В дальнейшем рассмотрим случай, когда $D^\circ(r) = 0$ имеет только простые корни. Если все корни вещественные, то для решения вопроса качества будем пользоваться уравнением вида (13). Если $D(r) = 0$ имеет s вещественных корней r_i $(i = 1, \ldots, s)$ и $2k$ комплексных корней $\lambda_j \pm i\mu_j$ $(j = s+1, \ldots, m-k)$, то вместо (13) будем пользоваться уравнениями вида

$$\begin{gathered} \dot{\chi}_i = -r_i \chi_i + \sigma \quad (i = 1, \ldots, s), \qquad \dot{\chi}_j = -\lambda_j \chi_j + \mu_j \chi_{j+k} + 2\sigma \\ \dot{\chi}_{j+k} = -\lambda_j \chi_{j+k} - \mu_j \chi_j \qquad (j = s+1, \ldots, m-k) \\ \dot{\sigma} = \sum_{i=1}^{s} \beta_i^\circ \chi_i + \sum_{j=s+1}^{m-k} (\beta_j^{\circ\circ} \chi_j + \beta_{j+k}^{\circ\circ} \chi_{j+k}) - \rho^\circ \sigma - r f(\sigma) \end{gathered} \tag{16}$$

Здесь $\beta_j^{\circ\circ}$, $\beta_{j+k}^{\circ\circ}$ — вещественные числа.

Для исследования переходного процесса рассмотрим в фазовом пространстве переменных χ_k $(k = 1, \ldots, m)$, σ сферу

$$R^2 = \chi_1^2 + \ldots + \chi_m^2 + \sigma^2 \tag{17}$$

радиус которой при $t_0 = 0$ равняется $R(0)$. Пусть все параметры систем заданы, требуется найти время t^*, в течение которого радиус $R(t)$ уменьшится в e^a раз, где a — заданное положительное число, т. е.

$$\frac{R^2(t^*)}{R^2(0)} = e^{-2a} \tag{18}$$

Обратная задача: требуется найти условия для параметров систем, чтобы t^* не превосходило некоторой заданной границы t^*. Рассмотрим функцию [2]

$$V = e^{\alpha t} (\chi_1^2 + \ldots + \chi_m^2 + \sigma^2) \tag{19}$$

Здесь α — постоянное число — пока не определено.

Пусть все корни $D^\circ(r) = 0$ — простые и вещественные. В силу (13) имеем

$$\begin{gathered} \frac{dV}{dt} = \alpha e^{\alpha t} (\chi_1^2 + \ldots + \chi_m^2 + \sigma^2) + e^{\alpha t} \left[2\chi_1 \frac{d\chi_1}{dt} + \ldots + 2\chi_m \frac{d\chi_m}{dt} + 2\sigma \frac{d\sigma}{dt}\right] = \\ = e^{\alpha t} \left[(\alpha - 2r_1) \chi_1^2 + \ldots + (\alpha - 2r_m) \chi_m^2 + (\alpha - 2\rho^\circ) \sigma^2 + 2\sigma \sum_{k=1}^{m} (1 + \beta_k^\circ) \chi_k\right] + \\ + e^{\alpha t} [-2r\sigma f(\sigma)] \end{gathered} \tag{20}$$

Напомним, что функция $f(\sigma)$ имеет вид (3) или (4). Предполагая (4), получим

$$\frac{dV}{dt} = e^{\alpha t}\Big[(\alpha - 2r_1)\chi_1^2 + \ldots + (\alpha - 2r_m)\chi_m^2 + (\alpha - 2\rho^\circ - 2hr)\sigma^2 + + 2\sigma\sum_{k=1}^{m}(1+\beta_k)\chi_k\Big] + e^{\alpha t}[-2r\sigma\varphi(\sigma)] \quad (21)$$

Выберем α так, чтобы имело место

$$dV / dt \leqslant 0 \quad (22)$$

Заметим, что $\sigma\varphi(\sigma) > 0$, а число r вообще положительно. Поэтому, если квадратичная форма

$$H = (\alpha - 2r_1)\chi_1^2 + \ldots + (\alpha - 2r_m)\chi_m^2 + (\alpha - 2\rho^\circ - 2hr)\sigma^2 + 2\sigma\sum_{k=1}^{m}(1+\beta_k)\chi_k \quad (23)$$

не положительна, то будем иметь условие (22); условия неотрицательности формы H являются следующими:

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} 2r_1 - \alpha & 0 & \ldots & 0 & -(1+\beta_1^\circ) \\ 0 & 2r_2 - \alpha & \ldots & 0 & -(1+\beta_2^\circ) \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 0 & 0 & & 2r_m - \alpha & -(1+\beta_m^\circ) \\ -(1+\beta_1^\circ) & -(1+\beta_2^\circ) & \ldots & -(1+\beta_m^\circ) & 2(\rho^\circ + hr) - \alpha \end{vmatrix} \quad (24)$$

все его миноры должны быть неотрицательны, т. е.

$$A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_p \\ i_1 i_2 \ldots i_p \end{pmatrix} \geqslant 0, \qquad \begin{pmatrix} 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant m \\ p = 1, \ldots, m \end{pmatrix} \quad (25)$$

Обозначим через α^* такое значение α, при котором условия (25) выполняются. Тогда на основании (22) имеем

$$e^{\alpha^* t}(\chi_1^2 + \ldots + \chi_m^2 + \sigma^2) \leqslant e^{\alpha^* t_0}(\chi_{10}^2 + \ldots + \chi_{m0}^2 + \sigma_0^2) \quad (26)$$

Из этого соотношения, используя (18), найдем t^* (предполагая $t_0 = 0$):

$$e^{\alpha^* t^*} \leqslant e^{2a}, \quad \text{или} \quad t^* \leqslant \frac{2a}{\alpha^*} \quad (27)$$

Если вместо (25) возьмем более узкие условия

$$\Delta_1 > 0, \qquad \Delta_2 > 0, \ldots, \qquad \Delta_m = \Delta > 0 \quad (28)$$

то $-H$ будет положительно. В этом случае $dV / dt < 0$ и, следовательно,

$$t^* < \frac{2a}{\alpha^{**}} \quad (29)$$

Здесь α^{**} — число, которым выполняются условия (28). Это число можно выбрать следующим образом. Не нарушая общности, предположим, что

$$r_1 < r_2 < \ldots < r_m < \rho^\circ + hr \quad (30)$$

(конечно, $\rho^\circ + hr$ может занимать любое промежуточное положение среди величин $r_1, r_2, \ldots$). Видно, что согласно Сильвестру все корни уравнения $\Delta(\alpha) = 0$ (24) вещественные. Кроме того, А. М. Летов доказал [1], что наименьший корень уравнений $\Delta(\alpha) = 0$ меньше или равняется $2r_1$, т. е. $\alpha_{\min} \leqslant 2r_1$. Из (24) и (28) видим, что это значение будет предельным для условий (28). Поэтому в силу (29) имеем

$$t^* < \frac{2a}{2r_1} = \frac{a}{r_1} \quad (31)$$

В случае, когда $D(r) = 0$ имеет комплексные корни, исследование производится аналогично.

Пример. Рассмотрим задачу Б. В. Булгакова [3]. Движение системы описывается уравнениями

$$T^2\ddot{\psi} + U\dot{\psi} + K\psi + \mu = 0, \quad \dot{\mu} = f^*(\sigma), \qquad \sigma = a\psi + E\dot{\psi} + G\ddot{\psi} - \frac{1}{l}\mu \quad (32)$$

Введем обозначения

$$\psi = \eta_1, \quad \dot\psi = \sqrt{r}\,\eta_2, \quad \mu = i\xi, \quad t = \frac{\tau}{\sqrt{r}}, \quad p = \frac{U}{T^2}, \quad q = \frac{K}{T^2},$$

$$r = \frac{i}{T^2}, \quad n_2 = -1, \quad i = \frac{lT^2}{T^2 + lG^2}, \quad f(\sigma) = \frac{1}{i\sqrt{r}} f^*(\sigma), \quad b_{21} = -\frac{q}{r} \qquad (33)$$

$$b_{22} = -\frac{p}{\sqrt{r}}, \quad p_1 = a - qG^2, \quad p_2 = (E - pG^2)\sqrt{r}, \quad p_3 = -1$$

Тогда (32) примет вид:

$$\dot\eta_1 = \eta_2, \quad \dot\eta_2 = b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2 + n_2\xi, \quad \dot\xi = f(\sigma), \quad \sigma = p_1 n_1 + p_2\eta_2 - \xi \qquad (34)$$

Точка здесь обозначает производную по безразмерному времени τ. После исключения ξ получим

$$\dot\eta_1 = \eta_2, \quad \dot\eta_2 = b_{21}^\circ\eta_1 + b_{22}^\circ\eta_2 + \sigma,$$
$$\dot\sigma = p_1^\circ\eta_1 + p_2^\circ\eta_2 - \rho^\circ\sigma - f(\sigma)$$

где

$$b_{21}^\circ = b_{21} - p_1, \quad b_{22}^\circ = b_{22} - p_2, \quad p_1^\circ = b_{21}^\circ p_2, \quad p_2^\circ = p_1 + b_{22}^\circ p_2, \quad p^\circ = -p_2$$

В рассматриваемом случае имеем

$$D(r) = \begin{vmatrix} r & b_{21}^\circ \\ 1 & r + b^\circ_{22} \end{vmatrix} = 0$$

корни которого будут

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}\frac{U + lE}{\sqrt{l(T^2 + lG^2)}} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{(U + lE)^2}{l(T^2 + lG^2)} - \frac{K + al}{l}}$$

Здесь

$$\frac{1}{4}\frac{(U + lE)^2}{l(T^2 + lG^2)} < \frac{K + al}{l}$$

поэтому корни r_1, r_2 — сопряженные комплексные. Напишем

$$r_1 = \lambda + i\mu, \qquad r_2 = \lambda - i\mu.$$

Линейным преобразованием можно привести (34) к канонической форме:

$$\dot\chi_1 = -\lambda\chi_1 + \mu\chi_2 + 2\sigma, \qquad \dot\chi_2 = -\lambda\chi_2 - \mu\chi_1$$

$$\dot\sigma = p^\circ{}_2\chi_1 - \frac{1}{\mu}(p_1^\circ - \lambda p_2^\circ)\chi_2 - \rho^\circ\sigma - f(\sigma)$$

Рассмотрим функцию $V = e^{\alpha t}(\chi_1^2 + \chi_2^2 + \sigma^2)$. В этом случае имеем

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} 2\lambda - \alpha & 0 & -(2 + \beta_1^*) \\ 0 & 2\lambda - \alpha & -\beta_2^* \\ -(2 + \beta_1^*) & -\beta_2^* & 2(\rho^\circ + h) - \alpha \end{vmatrix}$$

где

$$p_2^\circ = \beta_1^*, \qquad -\frac{1}{\mu}(p_1^\circ - \lambda p_2^\circ) = \beta_2^*$$

Если $\lambda < (\rho^\circ + h)$, то наименьший корень $\Delta(\alpha) = 0$ будет $\alpha_{\min} \leqslant 2\lambda$.

Согласно (31) найдем время:

$$\tau^* < \frac{a}{\lambda} = \frac{2a\sqrt{l(T^2 + lG^2)}}{U + lE}$$

Но из (33) $\tau = t\sqrt{r}$, поэтому

$$t^* < \frac{2a\sqrt{l(T^2 + lG^2)}}{(U + lE)\sqrt{r}} = \frac{2a(T^2 + lG^2)}{U + l\varepsilon}$$

Этот результат совпадает с результатом А. М. Летова в том же случае.

Поступила 12 II 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Летов А. М. Граничные значения наименьшего характеристичного числа одного класса регулируемых систем. ПММ, т. XV, вып. 5, 1951.
2. Чжан Сы-ин. Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, т. XXII, вып. 2, 1959.
3. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. ГИТТЛ, 1955.