ДВИЖЕНИЕ СТАБИЛИЗИРОВАННЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ

В. С. Новоселов

(Ленинград)

Дается обоснование известного метода прикладной теории гироскопов [1-6].

1. Будем рассматривать общий случай движения стабилизированной гироскопической системы, допуская произвольную зависимость движения основания и масс гироскопической системы от времени, а также нестационарность собственных вращений гироскопов.

Кинетическая энергия гироскопической системы с r гироскопами и s позиционными координатами q_i имеет вид:

$$T = T_2' + T_1' + T_0' + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r} C_k\Big(\dot{\varphi}_k + \sum_{j=1}^{s} a_j^k \dot{q}_j + a_0^k\Big)^2 \tag{1.1}$$

Здесь T_2', T_1' и T_0' — соответственно квадратичная, линейная и нулевая формы позиционных скоростей $\dot{q}_i$, φ_k — циклические координаты, являющиеся углами собственных вращений гироскопов, C_k — осевой момент инерции k-го гироскопа, a_j^k — косинус угла между вектором угловой скорости $\dot{q}_j$ и осью k-го гироскопа, a_0^k — проекция на ось k-го гироскопа угловой скорости основания.

Коэффициенты a_j^k и a_0^k зависят от позиционных координат и времени.

Пусть обобщенные обычные и реактивные [7] силы, отвечающие циклическим координатам, будут явными функциями времени. Составляя уравнения Лагранжа 2-го рода для циклических координат φ_k, будем иметь

$$\dot{\varphi}_k + \sum_{j=1}^{s} a_j^k \dot{q}_j + a_0^k = H + h_k \tag{1.2}$$

где H — постоянная, которую будем считать достаточно большой, $H \gg h_k$, h_k — функции времени, содержащие $r-1$ постоянную.

Вводя функцию Рауса

$$R(\dot{q}_i, q_i, t) = T^* - \sum_{k=1}^{r} C_k (H + h_k)\, \dot{\varphi}_k, \qquad T^* = T\,(\dot{q}_i q_i,\ \dot{\varphi}_k\,(\dot{q}_i, q_i, H, t))$$

уравнения Лагранжа второго рода для позиционных координат запишем в виде

$$\frac{Д}{Дt}\frac{DR}{D\dot{q}_i} - \frac{DR}{Dq_i} = Q_i + \Psi_i \tag{1.3}$$

Здесь приняты обозначения производных механики переменных масс [7], при вычислении которых закрепляются массы, Ψ_i — обобщенные реактивные силы.

Функция Рауса в силу (1.1) и (1.2) имеет вид:

$$R = T_2' + T_1' + T_0' + \sum_{k=1}^{r} C_k (H + h_k)\Big(\sum_{j=1}^{s} a_j^k \dot{q}_j + a_0^k\Big) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r} C_k (H + h_k)^2 \tag{1.4}$$

причем последний член является явной функцией времени и при составлении уравнений (1.3) может быть опущен. Для стабилизированной гироскопической системы правомерно рассмотрение линеаризованных уравнений.

Поэтому, ограничиваясь членами первого порядка малости относительно q_i и $\dot{q}$ в уравнениях (1.3), приходим к уравнениям вида

$$a_{ij}\ddot{q}_j + (b_{ij} + Hg_{ij})\,\dot{q}_j + (c_{ij} + Hd_{ij})\,q_j = f_i + HF_i \tag{1.5}$$

Здесь $\|a_{ij}\|$ — матрица положительно-определенной квадратичной формы; коэффициенты уравнений (1.5) будут явными функциями времени, не зависящими от параметра H.

Здесь, как и ниже, наличие двух одинаковых индексов у сомножителей обозначает суммирование. Для случая стабилизированной гироскопической системы собственные движения системы, определяемые общим решением однородной системы для уравнений (1.5), являются ограниченными и не могут иметь порядок по H больше нуля.

При исследовании гироскопических систем обычно [1—6] исходят из метода прикладной теории гироскопов. Уравнения движения, составленные по указанному методу, не учитывают кинетические моменты элементов подвеса гироскопической системы и кожухов ее гироскопов, а также экваториальные составляющие кинетических моментов самих роторов и кинетические моменты двигателей. Поэтому по методу прикладной теории гироскопов кинетическая энергия и функция Рауса должны быть записаны соответственно в виде (1.1) и (1.4), где положено

$$T_2' = T_1' = T_0' = 0$$

уравнения (1.2) и обобщенные силы $Q_i + \Psi_i$ имеют тот же самый вид. Уравнения (1.5) записываются в виде

$$(b_{ij}^* + Hg_{ij})\,\dot{g}_j + (c_{ij}^* + Hd_{ij})\,g_j = f_i^* + HF_i \tag{1.6}$$

Здесь значок * обозначает, что указанные коэффициенты отличаются от ранее написанных. Для удобства позиционные координаты в этом случае обозначены через q_j.

Замечания. а) В реальных гироскопических системах коэффициенты d_{ij} и F_i могут иметь порядок угловой скорости вращения Земли, которая будет достаточно малой величиной, коэффициенты c_{ij} могут иметь порядок маятникового момента, который в некоторых гироскопических устройствах близок к величине H. Поэтому при рассмотрении конкретной системы следует учитывать ее особенности.

б) Если обобщенные обычные и реактивные силы не являются явными функциями времени, то мы приходим к уравнениям вида (1.5) и (1.6) лишь в том случае, когда из рассмотрения уравнений Лагранжа 2-го рода для циклических координат можно определить функции $\dot{\varphi}_k = \dot{\varphi}_k(q_i, \dot{q}_i, t)$.

2. Будем предполагать определитель матрицы гироскопических членов $\|g_{ij}\|$ отличным от нуля и рассмотрим решение уравнений (1.6) с произвольными начальными данными $g_i^\circ = q_i^\circ$. Переменные g_i имеют порядок начальных данных, т. е. нулевой относительно H. Порядок $\dot{q}_i$ не больше нулевого. Пусть $\ddot{g}_i$ имеют некоторый порядок O' относительно параметра H. Рассмотрим решение уравнений

$$(b_{ij} + Hg_{ij})\,\dot{q}_{j1} + (c_{ij} + Hd_{ij})\,q_{j1} = f_i + HF_i \tag{2.1}$$

с начальными данными $q_{j1}^\circ = q_j^\circ$.

В силу уравнений (1.6) и (2.1) для определения переменных $x_i = q_{i1} - g_i$ получаем уравнения

$$(H^{-1}b_{ij} + g_{ij})\,\dot{x}_j + (H^{-1}c_{ij} + d_{ij})\,x_j = H^{-1}\,[(b_{ij}^* - b_{ij})\,\dot{g}_j + (c_{ij}^* - c_{ij})\,g_j + f_i - f_i^*]$$

из рассмотрения которых следует, что

$$\{q_{i1} - g_i,\ \dot{q}_{i1} - \dot{q}_i,\ \ddot{q}_{i1} - \ddot{g}_i\} = O(H^{-1}) \tag{2.2}$$

Обозначим через $q_i^{(1)}$ движение гироскопической системы (1.5) с начальными данными

$$q_j^{(1)\circ} = q_j^\circ,\ [b_{ij}(0) + Hg_{ij}(0)]\,\dot{q}_j^{(1)\circ} + [c_{ij}(0) + Hd_{ij}(0)]\,q_j^\circ = f_i(0) + HF_i(0) \tag{2.3}$$

На основании формул (1.5), (2.1) и (2.3) $y_i = q_i^{(1)} - q_{i1}$ являются частным решением с нулевыми начальными данными следующей системы уравнений:

$$a_{ij}\ddot{y}_j + (b_{ij} + Hg_{ij})\,\dot{y}_j + (c_{ij} + Hd_{ij})\,y_j = -\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\ddot{q}_{j1} \tag{2.4}$$

В силу (2.2) и (2.4) следует, что переменные y_j и $\dot{y}_j$ имеют порядок O'', равный наибольшей из величин O' и H^{-1}.

Решение уравнений (1.5) с произвольными начальными данными q_i°, $\dot{q}_i^\circ$ будет равно $q_i = q_i^{(1)} + q_i^{(2)}$, где $q_i^{(2)}$ является решением однородных уравнений для системы (1.5) и имеет начальные данные

$$q_i^{(2)\circ} = 0, \qquad \dot{q}_i^{(2)\circ} = \dot{q}_i^\circ - \dot{q}_i^{(1)\circ} \tag{2.5}$$

Полагая $\tau = Ht$ и обозначая штрихами производные по τ, получим

$$a_{ij} q_j^{(2)''} + (H^{-1} b_{ij} + g_{ij}) q_j^{(2)'} + H^{-2} (c_{ij} + H d_{ij}) q_j^{(2)} = 0$$

Рассмотрим решение с начальными данными (2.5) для следующей системы уравнений:

$$a_{ij} q_{j2}'' + (H^{-1} b_{ij} + g_{ij}) q_{j2}' = 0 \tag{2.6}$$

Переменные q_{j2}' имеют тот же порядок по H, что и начальные данные, т. е. H^{-1}. Величины $z_j = q_j^{(2)} - q_{j2}$ определяются как частные решения с нулевыми начальными данными следующих уравнений:

$$a_{ij} z_j'' + (H^{-1} b_{ij} + g_{ij}) z_j' + H^{-2} (c_{ij} + H d_{ij}) z_j = -H^{-2} (c_{ij} + H d_{ij}) q_{j2} \tag{2.7}$$

Разрешая уравнения (2.6) относительно q_{j2}' и интегрируя по τ, получим [8] для q_{j2} порядок H^{-1}. При вычислении частного решения уравнений (2.7) с нулевыми начальными данными приходится проводить интегрирование по τ от 0 до Ht, поэтому получим $\{z_j', z_j\} = o(H^{-1})$

Мы, следовательно, получили оценки

$$q_i = g_i + o'', \qquad \dot{q}_i = \dot{g}_i + \dot{q}_i^{(2)} + O''$$

которые служат обоснованием прикладной теории гироскопов. Следует при этом подчеркнуть, что $\dot{z}_j$ имеет нулевой порядок по H и в рассматриваемом случае $\dot{q}_i^{(2)}$ не могут быть заменены скоростями $\dot{q}_{i2}$. Нельзя также утверждать, что порядок $\dot{q}_{i1}$ равен H^{-1}, как имеет место для гироскопических систем на неподвижном основании [8].

Полученный выше результат непосредственно [8] распространяется на случай автоматически регулируемой гироскопической системы с k дополнительными уравнениями

$$\begin{gathered} a_{ij}\ddot{q}_j + (b_{ij} + H g_{ij}) \dot{q}_j + (c_{ij} + H d_{ij}) q_j + e_{i\nu} \dot{q}_\nu + f_{i\nu} q_\nu = f_i + H F_i \\ A_{\mu\nu} \ddot{q}_\nu + B_{\mu\nu} \dot{q}_\nu + C_{\mu\nu} q_\nu + D_{\mu j} \dot{q}_j + E_{\mu j} q_j = f_\mu + H F_\mu \end{gathered} \tag{2.8}$$

Здесь индексы μ и ν изменяются от $s+1$ до $s+k$ и соответствуют дополнительным уравнениям автоматического затухания. И в этом случае переход к упрощенным уравнениям, связанным с опусканием членов $a_{ij}\ddot{q}_j$ в первых s уравнениях системы (2.8), приводит к неучету членов порядка наибольшего из H^{-1} и порядка ускорений $\ddot{q}_j$ упрощенных уравнений.

3. В качестве иллюстрации рассмотрим пример судового гирокомпаса Сперри «марка II» [3]. Если предполагать постоянной величину скорости движения корабля и пренебречь восточной составляющей скорости по сравнению с окружной скростью вращения Земли, достигающей на экваторе 1670 *км/час*, то уравнения движения будут иметь [3] вид:

$$\begin{gathered} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + H\Omega\cos\varphi\,\alpha = H\frac{v_N}{R} \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + (lP + H\Omega\cos\varphi)\,\beta = H\Omega\sin\varphi \end{gathered} \tag{3.1}$$

где α и β — углы наклона оси гирокомпаса, A и B — моменты инерции, lP — маятниковый момент, v_N — проекция скорости корабля на направление «север», $R = 6370$ *км* — радиус Земли, $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5}$ сек$^{-1}$ — угловая скорость вращения Земли, параметр $H = 2.76 \cdot 10^9$ *г см²/сек*.

Вынужденное решение системы (3.1) имеет вид:

$$\alpha^* = \frac{v_N}{R\Omega\cos\varphi}, \qquad \beta^* = \frac{H\Omega\sin\varphi}{H\,\Omega\cos\varphi + lP}$$

Чтобы иметь β^* малой, выбирают маятниковый момент lP много больше $H\Omega$. В компасе Сперри $lP = 7.23\cdot10^7$ *дн см*^{2}, т. е. имеет порядок, близкий к H, далее $H\Omega = 2.01\cdot10^5$ *г см*^{2} / *сек*^{2}.

Опуская вторые производные в системе (3.1), приходим к уравнениям вида (2.1)

$$-H\dot{\alpha}_1 + (lP + H\Omega\cos\varphi)\,\beta_1 = H\Omega\sin\varphi, \qquad H\dot{\beta}_1 + H\Omega\cos\varphi\alpha_1 = H\,\frac{v_N}{R} \tag{3.2}$$

При выводе уравнений (3.1) не учитываются кинетические моменты элементов подвеса и кожухов гироскопов, а также кинетические моменты двигателей, поэтому уравнения (1.6) в рассматриваемом случае имеют вид (3.2).

Дифференцируя уравнения (3.2), получаем

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha}_1 &= H^{-1}(lP + H\Omega\cos\varphi)\left(\frac{v_N}{R} - \Omega\alpha_1\cos\varphi\right)\\ \ddot{\beta}_1 &= \Omega^2\sin\varphi\cos\varphi - H^{-1}\Omega\cos\varphi\,(lP + H\Omega\cos\varphi)\,\beta_1\end{aligned} \tag{3.3}$$

Так как

$$v_N R^{-1} < \Omega < lPH^{-1},$$

то порядок O' для компаса Сперри равен порядку величины $lP\Omega H^{-1}$. Мы имеем $lP\Omega H^{-1} = 2\cdot10^{-6}$ сек$^{-2}$. Поэтому порядок O' близок к $H^{-1/2}$ и с точностью до членов такого порядка переменные α_1 и β_1 заменяют переменные α и β.

Примером дополнительного уравнения автоматического затухания будет служить уравнение перетекания демпфирующей жидкости в гирокомпасе Аншютца [3]

$$\dot{\theta} = -F(\beta + \theta)$$

где $F = \mathrm{const}$ — фактор перетекания, θ — угол наклона демпфирующей жидкости. Если пренебречь членом $H\Omega\cos\varphi$ по сравнению с lP, то упрощенные уравнения принимают вид известных уравнений Геккелера — Крылова для случая равномерного движения корабля:

$$-H\dot{\alpha}_1 + lP\beta_1 + c\theta_1 = H\Omega\sin\varphi,$$

$$\dot{\beta}_1 + \Omega\cos\varphi\alpha_1 = \frac{v_N}{R}, \qquad \dot{\theta}_1 = -F(\beta_1 + \dot{\theta}_1)$$

Поэтому движение в координатах, получаемое из этих уравнений, определяет действительное движение гироскопической системы с точностью до членов порядка наибольшей из величин H^{-1}, $lP\Omega H^{-1}$ и $H\Omega l^{-1}P^{-1}\cos\varphi$.

Поступила 13 IV 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. К теории гироскопа Аншютца, изложенной профессором Геккелером. Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 4, 1940.
2. Ройтенберг Я. Н. Многогироскопная вертикаль. ПММ, т. X, вып. 1, 1946.
3. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГИТТЛ, М., 1958.
4. Ишлинский А. И. К теории гирогоризонткомпаса, ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.
5. Ишлинский А. И. Теория двухгироскопной вертикали. ПММ, т. XXI, вып. 2, 1957.
6. Ишлинский А. И. К теории сложных систем гироскопической стабилизации. ПММ, т. XXII, вып. 3, 1958.
7. Новоселов В. С. Некоторые вопросы механики переменных масс с учетом внутреннего движения частиц. Вест. Ленинград. ун-та, № 19, 1956; № 1, 1957.
8. Новоселов В. С. Движение гироскопических систем. ПММ, т. XXIII, вып. 1, 1959.