ОБ УСКОРЕННОМ ПРИВЕДЕНИИ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО КОМПАСА В МЕРИДИАН

Я. Н. Ройтенберг
(Москва)

Гироскопический компас представляет собой прибор с большим периодом собственных колебаний, порядка полутора часов. Для погашения собственных колебаний, которые могут возникнуть вследствие того, что гирокомпас при пуске в ход не находился в меридиане, требуется значительное время, равное трем-четырем периодам собственных колебаний. Представляет поэтому интерес изучение методов ускоренного приведения гирокомпаса в меридиан. Последнее обычно выполняется приложением к гирокомпасу добавочных внешних сил. Ниже рассматривается задача о выборе закона управления этими силами.

1. Уравнения движения гироскопического компаса, снабженного для погашения собственных колебаний гидравлическим успокоителем, имеют следующий вид [1]:

$$A\alpha^{\cdot\cdot} + H\beta^{\cdot} + HU\cos\varphi\alpha = 0$$

$$B\beta^{\cdot\cdot} - H\alpha^{\cdot} + lP\beta + lP(1-\rho)\vartheta = HU\sin\varphi + Q(t) \tag{1.1}$$

$$\vartheta^{\cdot} + F\vartheta + F\beta = 0$$

Здесь α — угол поворота гирокомпаса в азимуте, β — угол подъема северного диаметра гиросферы над горизонтальной плоскостью, ϑ — угол наклона зеркала жидкости в гидравлическом успокоителе над плоскостью экватора гиросферы. Через H обозначен результирующий кинетический момент гироскопов, установленных в гиросфере, lP — статический момент гиросферы, A и B — моменты инерции гиросферы относительно соответствующих осей, U — угловая скорость суточного вращения земного шара, φ — широта места наблюдения.

Через $Q(t)$ обозначена добавочная обобщенная внешняя сила, представляющая собой момент относительно восточного диаметра гиросферы, накладываемый для ускоренного приведения гирокомпаса в меридиан. Закон изменения во времени этой внешней силы подлежит определению.

Ограничиваясь изучением прецессионного движения гирокомпаса, отбросим в уравнениях (1.1) инерционные члены $A\alpha^{\cdot\cdot}$ и $B\beta^{\cdot\cdot}$. При этом уравнения (1.1) приводятся к следующему виду;

$$\dot{y}_1 - \frac{k^2}{U\cos\varphi}y_2 - \frac{k^2}{U\cos\varphi}(1-\rho)y_3 = q_1(t) \tag{1.2}$$

$$\dot{y}_2 + U\cos\varphi y_1 = 0, \qquad \dot{y}_3 + Fy_3 + Fy_2 = 0 \tag{1.3}$$

где

$$y_1 = \alpha, \quad y_2 = \beta - \frac{HU\sin\varphi}{\rho lP}, \quad y_3 = \vartheta + \frac{HU\sin\varphi}{\rho lP}, \quad k^2 = \frac{lPU\cos\varphi}{H}, \quad q_1(t) = -\frac{Q(t)}{H}$$

Характеристический определитель системы уравнений (1.2) имеет вид

$$\Delta(D) = D^3 + FD^2 + k^2D + \rho k^2F \tag{1.4}$$

Условие устойчивости гирокомпаса, как видно из (1.4), будет следующим:

$$0 < \rho < 1 \tag{1.5}$$

Параметры гирокомпаса, обычно выбираются так, что характеристическое уравнение

$$\Delta(D) = 0 \tag{1.6}$$

имеет действительный корень D_1 и два комплексных сопряженных корня D_2, D_3. Обозначая эти корни

$$D_1 = \varkappa, \qquad D_2, D_3 = \varepsilon \pm i\omega \tag{1.7}$$

будем иметь

$$\Delta(D) = (D-\varkappa)(D-\varepsilon-i\omega)(D-\varepsilon+i\omega) \tag{1.8}$$

Решение уравнений (1.2) имеет следующий вид;

$$y_i(t) = A_ie^{\varkappa t} + B_ie^{\varepsilon t}\cos\omega t - C_ie^{\varepsilon t}\sin\omega t + \int_0^t N_{i1}(t-u)\,q_1(u)\,du \qquad (i = 1,2,3) \tag{1.9}$$

Здесь
$$A_i = a_{i1}y_1(0) + a_{i2}y_2(0) + a_{i3}y_3(0)$$
$$B_i = b_{i1}y_1(0) + b_{i2}y_2(0) + b_{i3}y_3(0) \qquad (1.10)$$
$$C_i = c_{i1}y_1(0) + c_{i2}y_2(0) + c_{i3}y_3(0)$$

$$N_{i1}(t-u) = a_{i1}e^{\varkappa(t-u)} + b_{i1}e^{\varepsilon(t-u)}\cos\omega(t-u) - c_{i1}e^{\varepsilon(t-u)}\sin\omega(t-u) \qquad (1.11)$$

а коэффициенты a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} определены выражениями

$$a_{11} = \mu\varkappa(\varkappa + F), \qquad a_{21} = -\mu(\varkappa + F)U\cos\varphi, \qquad a_{31} = \mu FU\cos\varphi \quad (1.12)$$

$$a_{12} = \mu\frac{k^2}{U\cos\varphi}(\varkappa + \rho F), \qquad a_{22} = \mu\varkappa(\varkappa + F), \qquad a_{32} = -\mu\varkappa F$$

$$a_{13} = \mu\frac{k^2}{U\cos\varphi}(1-\rho)\varkappa, \qquad a_{23} = -\mu k^2(1-\rho), \qquad a_{33} = \mu(\varkappa^2 + k^2)$$

$$b_{11} = \mu[\varepsilon^2 + \omega^2 - \varkappa(F + 2\varepsilon)], \quad b_{21} = \mu(\varkappa + F)U\cos\varphi, \qquad b_{31} = -\mu FU\cos\varphi$$

$$b_{12} = -\mu\frac{k^2}{U\cos\varphi}(\varkappa + \rho F), \qquad b_{22} = \mu[\varepsilon^2 + \omega^2 - \varkappa(F + 2\varepsilon)], \; b_{32} = \mu\varkappa F$$

$$b_{13} = -\mu\varkappa\frac{k^2}{U\cos\varphi}(1-\rho), \qquad b_{23} = \mu k^2(1-\rho), \qquad b_{33} = \mu(\varepsilon^2 + \omega^2 - k^2 - 2\varepsilon\varkappa)$$

$$c_{11} = -\frac{\mu}{\omega}[\varepsilon^3 + (F-\varkappa)\varepsilon^2 + (\omega^2 - \varkappa F)\varepsilon + \omega^2(\varkappa + F)]$$

$$c_{12} = -\frac{\mu}{\omega}\frac{k^2}{U\cos\varphi}[(\varepsilon - \varkappa)(\varepsilon + \rho F) + \omega^2], \qquad c_{23} = \frac{\mu}{\omega}k^2(1-\rho)(\varepsilon - \varkappa)$$

$$c_{13} = -\frac{\mu}{\omega}\frac{k^2}{U\cos\varphi}(1-\rho)[\varepsilon(\varepsilon - \varkappa) + \omega^2], \qquad c_{31} = -\frac{\mu}{\omega}(\varepsilon - \varkappa)FU\cos\varphi$$

$$c_{21} = \frac{\mu}{\omega}U\cos\varphi[(\varepsilon - \varkappa)(\varepsilon + F) + \omega^2], \qquad c_{32} = \frac{\mu}{\omega}[\varepsilon F(\varepsilon - \varkappa) + \omega^2 F]$$

$$c_{22} = -\frac{\mu}{\omega}[\varepsilon^3 + (F - \varkappa)\varepsilon^2 + (\omega^2 - \varkappa F)\varepsilon + \omega^2(\varkappa + F)],$$

$$c_{33} = \frac{\mu}{\omega}[-\varepsilon^3 + \varkappa\varepsilon^2 - (k^2 + \omega^2)\varepsilon + \varkappa(k^2 - \omega^2)] \qquad \left(\mu = \frac{1}{(\varkappa - \varepsilon)^2 + \omega^2}\right)$$

2. Перейдем теперь к выбору закона изменения во времени функции $q_1(t)$, исходя из требования, чтобы к моменту времени $t = T$ гирокомпас был приведен в меридиан [2]. Как следует из (1.9), для этого необходимо, чтобы

$$\int_0^T N_{i1}(T-u)\,q_1(u)\,du = R_i(T) \qquad (i=1,2,3) \qquad (2.1)$$

где

$$R_i(T) = -A_i e^{\varkappa T} - B_i e^{\varepsilon T}\cos\omega T + C_i e^{\varepsilon T}\sin\omega T \qquad (2.2)$$

Интервал времени $(0, T)$ разобьем на три равных интервала $(0, t_1)$, (t_1, t_2), $(t_2, T$ и примем $q_1(t)$ ступенчатой функцией, сохраняющей неизменными свои значения) на этих интервалах времени. Эти значения обозначим через $q_1(0)$, $q_1(t_1)$ и $q_1(t_2)$, соответственно. Соотношения (2.1) примут теперь вид

$$c_i^{(0)}q_1(0) + c_i^{(1)}q_1(t_1) + c_i^{(2)}q_1(t_2) = R_i(T) \qquad (i = 1,2,3) \qquad (2.3)$$

где

$$c_i^{(0)} = \int_0^{t_1} N_{i1}(T-u)\,du, \qquad c_i^{(1)} = \int_{t_1}^{t_2} N_{i1}(T-u)\,du, \qquad c_i^{(2)} = \int_{t_2}^{T} N_{i1}(T-u)\,du \qquad (2.4)$$

Подставляя в (2.4) выражения (1.11), которыми определены функции $N_{i1}(T-u)$, и выполняя интегрирование, можно представить $c_i^{(0)}$, $c_i^{(1)}$, $c_i^{(2)}$ в таком виде

$$c_i^{(0)} = \xi_i m_1 + \eta_i n_1 + \zeta_i p_1, \quad c_i^{(1)} = \xi_i m_2 + \eta_i n_2 + \zeta_i p_2, \quad c_i^{(2)} = \xi_i m_3 + \eta_i n_3 + \zeta_i p_3 \qquad (2.5)$$

где

$$\xi_i = a_{i1}e^{\varkappa T}, \quad \eta_i = e^{\varepsilon T}(b_{i1}\cos\omega T - c_{i1}\sin\omega T), \qquad \zeta_i = e^{\varepsilon T}(b_{i1}\sin\omega T + c_{i1}\cos\omega T),$$

$$m_1 = \frac{1}{\varkappa}(1 - e^{-\varkappa t_1}), \quad m_2 = \frac{1}{\varkappa}(e^{-\varkappa t_1} - e^{-\varkappa t_2}), \quad m_3 = \frac{1}{\varkappa}(e^{-\varkappa t_2} - e^{-\varkappa T})$$

$$n_1 = \frac{-\varepsilon\cos\omega t_1 + \omega\sin\omega t_1}{\varepsilon^2+\omega^2}e^{-\varepsilon t_1} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\omega^2}$$

$$n_2 = \frac{-\varepsilon\cos\omega t_2 + \omega\sin\omega t_2}{\varepsilon^2+\omega^2}e^{-\varepsilon t_2} - \frac{-\varepsilon\cos\omega t_1 + \omega\sin\omega t_1}{\varepsilon^2+\omega^2}e^{-\varepsilon t_1}$$

$$n_3 = \frac{-\varepsilon\cos\omega T + \omega\sin\omega T}{\varepsilon^2+\omega^2}e^{-\varepsilon T} - \frac{-\varepsilon\cos\omega t_2 + \omega\sin\omega t_2}{\varepsilon^2+\omega^2}e^{-\varepsilon t_2} \tag{2.6}$$

$$p_1 = \frac{-\varepsilon\sin\omega t_1 - \omega\cos\omega t_1}{\varepsilon^2+\omega^2}e^{-\varepsilon t_1} + \frac{\omega}{\varepsilon^2+\omega^2}$$

$$p_2 = \frac{-\varepsilon\sin\omega t_2 - \omega\cos\omega t_2}{\varepsilon^2+\omega^2}e^{-\varepsilon t_2} + \frac{\varepsilon\sin\omega t_1 + \omega\cos\omega t_1}{\varepsilon^2+\omega^2}e^{-\varepsilon t_1}$$

$$p_3 = \frac{-\varepsilon\sin\omega T - \omega\cos\omega T}{\varepsilon^2+\omega^2}e^{-\varepsilon T} + \frac{\varepsilon\sin\omega t_2 + \omega\cos\omega t_2}{\varepsilon^2+\omega^2}e^{-\varepsilon t_2}$$

Из уравнений (2.3) получим

$$q_1(0) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad q_1(t_1) = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad q_1(t_2) = \frac{\Delta_3}{\Delta} \tag{2.7}$$

где

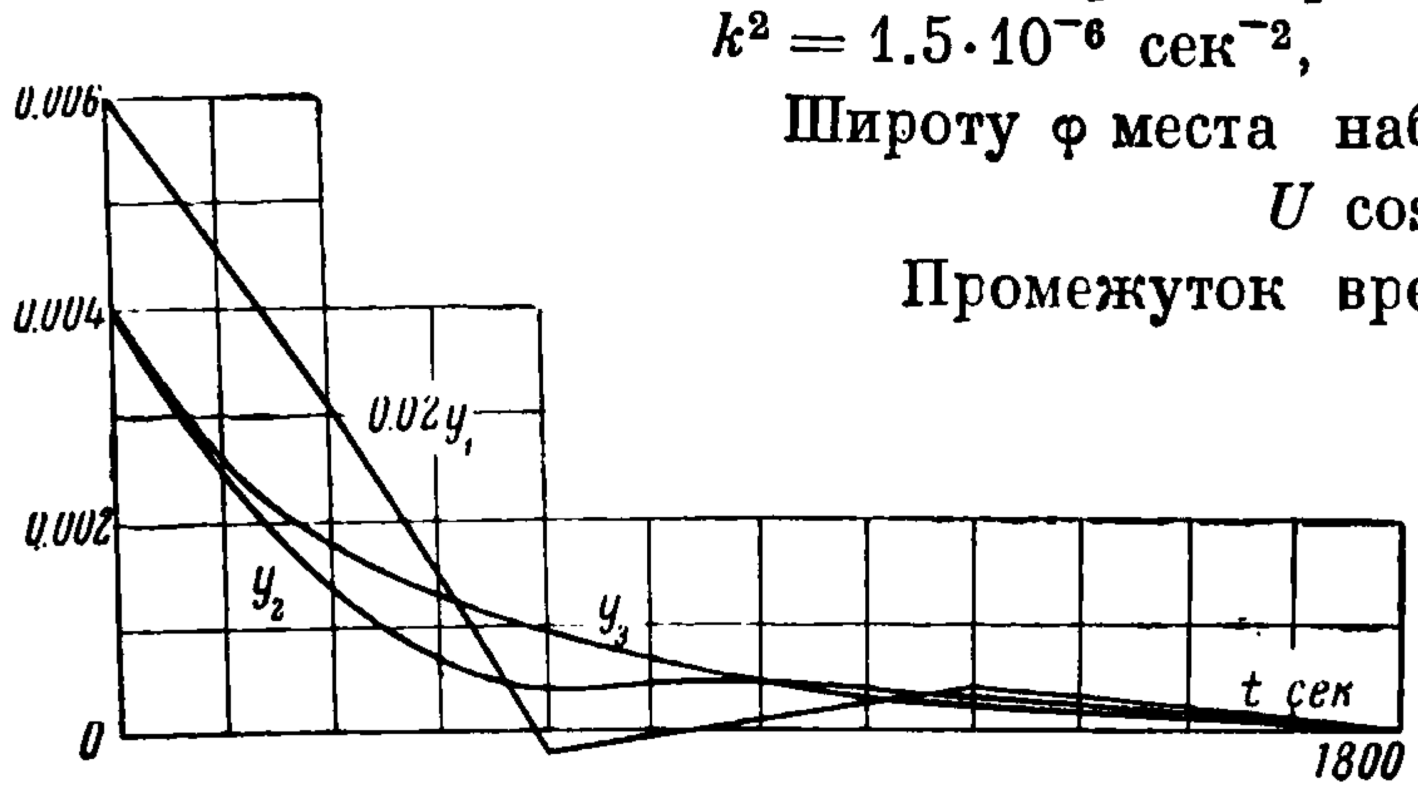
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} R_1(T) & c_1^{(1)} & c_1^{(2)} \\ R_2(T) & c_2^{(1)} & c_2^{(2)} \\ R_3(T) & c_3^{(1)} & c_3^{(2)} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1^{(0)} & R_1(T) & c_1^{(2)} \\ c_2^{(0)} & R_2(T) & c_2^{(2)} \\ c_3^{(0)} & R_3(T) & c_3^{(2)} \end{vmatrix} \tag{2.8}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_1^{(0)} & c_1^{(1)} & R_1(T) \\ c_2^{(0)} & c_2^{(1)} & R_2(T) \\ c_3^{(0)} & c_3^{(1)} & R_3(T) \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} c_1^{(0)} & c_1^{(1)} & c_1^{(2)} \\ c_2^{(0)} & c_2^{(1)} & c_2^{(2)} \\ c_3^{(0)} & c_3^{(1)} & c_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

Выражения (2.7) и определяют собой закон, по которому надо изменять $q_1(t)$ для того, чтобы к моменту времени $t = T$ гирокомпас был приведен в меридиан.

3. В качестве примера рассмотрим гирокомпас со следующими параметрами [1]:

$$k^2 = 1.5\cdot 10^{-6}\ \text{сек}^{-2}, \qquad \rho = 0.4, \qquad F = 1.5\cdot 10^{-3}\ \text{сек}^{-1}$$



Широту φ места наблюдения примем равной 60°, так что

$$U\cos\varphi = 3.646\cdot 10^{-5}\ \text{сек}^{-1}.$$

Промежуток времени, течение которого гирокомпас должен быть приведен в меридиан, $T = 1800$ сек. Начальные отклонения $y_1(0) = 0{,}3$, $y_2(0) = y_3(0) = 0.004$.

При этих данных значения $q_1(0)$, $q_1(t_1)$, $q_1(t_2)$ оказываются следующими:

$$q_1(0) = -0.612\cdot 10^{-3}, \qquad q_1(t_1) = 0.0159\cdot 10^{-3}, \qquad q_1(t_2) = -0.0412\cdot 10^{-3}\ [\text{сек}^{-1}]$$

При значении результирующего кинетического момента $H = 155000$ *г* см сек* добавочная обобщенная внешняя сила $Q(t) = -Hq_1(t)$ будет иметь на интервалах времени $(0, t_1)$, (t_1, t_2), (t_2, T) соответственно значения:

$$Q(0) = 94.86, \qquad Q(t_1) = -2.46, \qquad Q(t_2) = 6.38\ [г^*\ см]$$

Процесс приведения гирокомпаса в меридиан представлен графиками функций $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ на фигуре.

Поступила 21 V 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГОНТИ, 1939.
2. Ройтенберг Я. Н. Некоторые задачи теории динамического программирования. ПММ, т. XXIII, вып. 4, 1959.