ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

А. А. Богоявленский

(Москва)

Движение симметричного тяжелого гироскопа в кардановом подвесе, когда ось внешнего кольца вертикальна, исследовано Н. Г. Четаевым [1]. В. Н. Скимель [2], К. Магнус [3] и В. В. Румянцев [4] рассмотрели устойчивость движения для некоторых частных решений.

Для случая тяжелого гироскопа в кардановом подвесе, когда ось внешнего кольца горизонтальна, были рассмотрены вопросы устойчивости некоторых частных движений [5]. При добавлении определенного момента внешних сил относительно оси собственного вращения гироскопа получен первый интеграл [5].

Ниже рассматривается частное решение задачи о движении тяжелого гироскопа в кардановом подвесе, если ось вращения внешнего кольца горизонтальна.

1. Рассмотрим симметричный гироскоп в кардановом подвесе в случае, если ось вращения внешнего кольца карданова подвеса горизонтальна и центр тяжести гироскопа и кожуха (внутреннего кольца) расположен на оси симметрии гироскопа.

Введем две прямоугольные системы осей координат с началом в неподвижной точке O гироскопа (см. фигуру).

Неподвижная система координат $Ox_1y_1z_1$ неизменно связана с осью вращения внешнего кольца карданова подвеса. Ось x_1 направлена вертикально вверх, ось z_1 — по оси вращения внешнего кольца. Подвижная система координат $Oxyz$ неизменно связана с кожухом. Ось x направлена по оси вращения кожуха, ось z — по оси симметрии гироскопа.

Движение гироскопа по отношению к системе осей $x_1y_1z_1$ определяют следующие углы: ψ — угол поворота внешнего кольца карданова подвеса, θ — угол поворота кожуха, φ — угол поворота гироскопа в кожухе (угол собственного вращения гироскопа относительно системы координат xyz).

Проекции мгновенной угловой скорости вращения кожуха на оси координат системы $Oxyz$ равны

$$p^\circ = \theta', \qquad q^\circ = \psi' \sin\theta, \qquad r^\circ = \psi' \cos\theta$$

Проекции мгновенной угловой скорости гироскопа на те же оси выражаются соотношениями

$$p = \theta', \qquad q = \psi' \sin\theta, \qquad r = \varphi' + \psi' \cos\theta$$

Пусть оси x, y, z являются главными осями эллипсоида инерции кожуха относительно неподвижной точки O.

Обозначим посредством ζ расстояние от начала O до центра тяжести гироскопа и кожуха, I — момент инерции внешнего кольца карданова подвеса относительно оси z_1, A°, B°, C° — главные моменты инерции кожуха относительно осей x, y, z, A, $B = A$, C — моменты инерции гироскопа относительно тех же осей.

Предположим, что эллипсоид инерции гироскопа относительно точки O есть эллипсоид вращения вокруг оси Oz. Выражения удвоенных живых сил для внешнего кольца карданова подвеса, кожуха и гироскопа равны соответственно

$$I\psi'^2, \qquad A^\circ p^{\circ 2} + B^\circ q^{\circ 2} + C^\circ r^{\circ 2}, \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

Общая живая сила системы

$$2T = (A + A^\circ)\,\theta'^2 + [I + C^\circ + (A + B^\circ - C^\circ)\sin^2\theta]\,\psi'^2 + C\,(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2$$

Предположим, что трения в подшипниках нет и активные силы, действующие на систему, суть силы тяжести. Пусть m — масса гироскопа и кожуха. Тогда силовая функция имеет вид

$$U = -mg\zeta \sin\theta \sin\psi$$

2. Пусть распределение масс рассматриваемой системы таково, что выполняются условия

$$A + A^\circ = I + C^\circ, \qquad A + B^\circ = C^\circ$$

Введем обозначение $I_1 = A + A^\circ$. Тогда уравнения движения системы можно записать в виде уравнений Лагранжа для независимых определяющих (голономных) переменных θ, ψ, φ

$$
\begin{aligned}
&I_1\theta'' + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)\sin\theta\,\psi' = -mg\zeta\cos\theta\sin\psi \\
&\frac{d}{dt}\{I_1\psi' + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)\cos\theta\} = -mg\zeta\sin\theta\cos\psi \\
&\frac{d}{dt}C(\varphi' + \psi'\cos\theta) = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Действительные перемещения системы находятся среди возможных и силы допускают силовую функцию. Отсюда следует выражение интеграла живых сил

$$
I_1(\theta'^2 + \psi'^2) + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2 = -2mg\zeta\sin\theta\sin\psi + 2h \tag{2}
$$

Циклической координате φ соответствует первый интеграл

$$
\varphi' + \psi'\cos\theta = r_0 \tag{3}
$$

Здесь h, r_0 — постоянные указанных первых интегралов.

При частном значении, равном нулю, постоянной интеграла (3), т. е. в случае

$$
\varphi' + \psi'\cos\theta = 0 \tag{4}
$$

существует еще один первый интеграл

$$
I_1\theta'\psi' = mg\zeta\cos\theta\cos\psi + l \qquad (l = \mathrm{const}) \tag{5}
$$

3. Введем переменные α, β, связанные с углами θ, ψ

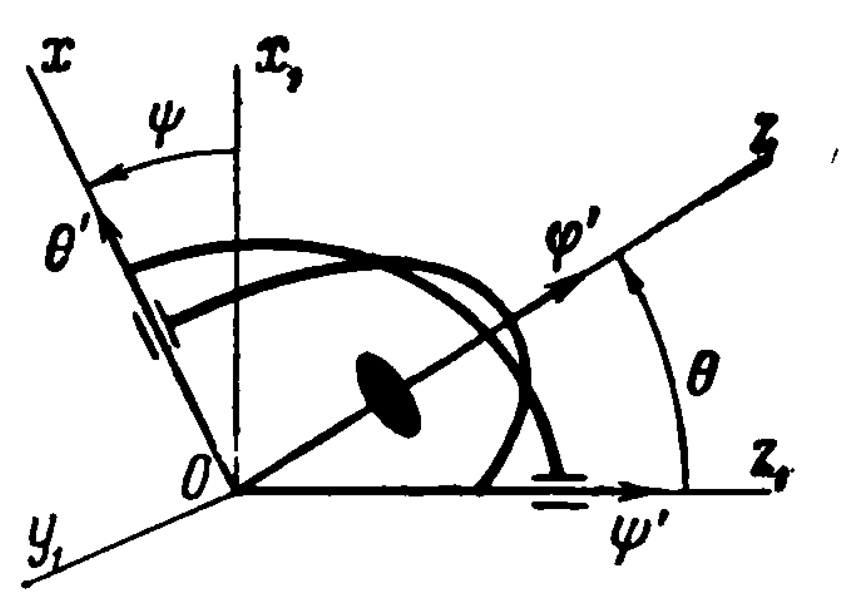
$$
\alpha = \theta + \psi, \qquad \beta = \theta - \psi \tag{6}
$$

Эта замена приводит к разделению переменных. Тогда уравнения движения рассматриваемой системы при существовании частного интеграла (4) могут быть написаны в виде

$$
I_1\alpha'' = -mg\zeta\sin\alpha, \qquad I_1\beta'' = mg\zeta\sin\beta \tag{7}
$$

Эти дифференциальные уравнения допускают первые интегралы

$$
\begin{aligned}
&I_1(\alpha'^2 + \beta'^2) = 2mg\zeta(\cos\alpha - \cos\beta) + 4h \\
&I_1(\alpha'^2 - \beta'^2) = 2mg\zeta(\cos\alpha + \cos\beta) + 4l
\end{aligned}
\tag{8}
$$



Фиг. 1

которые можно получить и из интегралов (2) и (5).

Примем следующие обозначения постоянных:

$$
a = \frac{h+l}{3I_1}, \qquad b = \frac{h-l}{3I_1}, \qquad c = \frac{mg\zeta}{I_1}
$$

Из интегралов (8) следует

$$
\alpha'^2 = 2(c\cos\alpha + 3a), \qquad \beta'^2 = -2(c\cos\beta - 3b) \tag{9}
$$

Введем новые переменные u, v формулами

$$
-2u = c\cos\alpha + a, \qquad 2v = c\cos\beta - b \tag{10}
$$

Уравнения (9) в этих переменных запишутся

$$
\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 4u^3 - (3a^2 + c^2)u - a(a^2 - c^2), \qquad \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 4v^3 - (3b^2 + c^2)v - b(b^2 - c^2) \tag{11}
$$

Построим функции Вейерштрасса $\wp_1(\tau)$ с инвариантами

$$
g_2' = 3a^2 + c^2, \qquad g_3' = a(a^2 - c^2)
$$

и $\wp_2(\tau)$ с инвариантами

$$
g_2'' = 3b^2 + c^2, \qquad g_3'' = b(b^2 - c^2)
$$

Эти функции удовлетворяют уравнению

$$
\wp'^2(\tau) = 4\wp^3(\tau) - g_2\wp(\tau) - g_3
$$

Если положить

$$u = \wp_1(\tau), \qquad -2\wp_1(\tau) = c\cos\alpha + a$$
$$v = \wp_2(\tau), \qquad 2\wp_2(\tau) = c\cos\beta - b \tag{12}$$

где τ — функция времени t, то уравнения (11) дают

$$\wp_1'^2(\tau)\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 4\wp_1^3(\tau) - g_2'\wp_1(\tau) - g_3', \qquad \wp_2'^2(\tau)\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 4\wp_2^3(\tau) - g_2''\wp_2(\tau) - g_3''$$

Откуда

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1, \qquad \frac{d\tau}{dt} = \pm 1$$

Взяв знак плюс, получим

$$\tau = t + t_0 \qquad (t_0 = \mathrm{const})$$

Согласно формулам (6), (12) будем иметь

$$\theta = \frac{1}{2}\left\{\arccos\left[-\frac{2I_1}{mg\zeta}\wp_1(t+t_0) - \frac{h+l}{3mg\zeta}\right] + \arccos\left[\frac{2I_1}{mg\zeta}\wp_2(t+t_0) + \frac{h-l}{3mg\zeta}\right]\right\} + \lambda$$
$$\psi = \frac{1}{2}\left\{\arccos\left[-\frac{2I_1}{mg\zeta}\wp_1(t+t_0) - \frac{h+l}{3mg\zeta}\right] - \arccos\left[\frac{2I_1}{mg\zeta}\wp_2(t+t_0) + \frac{h-l}{3mg\zeta}\right]\right\} + \mu \tag{13}$$

где λ, μ — постоянные, значения которых определяются найденным решением и областью изменения θ, ψ.

Угол φ вычисляется квадратурой из соотношения (4).

4. Переменные u, v определены соотношениями (10) и удовлетворяют уравнениям (11). Обозначим правые части этих уравнений — полиномы третьей степени — через $f(\xi)$

$$f(\xi) = 4\xi^3 - (3\varkappa^2 + c^2)\xi - \varkappa(\varkappa^2 - c^2) \tag{14}$$

где $\varkappa = a$ при $\xi = u$ и $\varkappa = b$ при $\xi = v$.

Полином (14) имеет три вещественных корня

$$e_1 = -\frac{c+\varkappa}{2}, \qquad e_2 = \frac{c-\varkappa}{2}, \qquad e_3 = \varkappa$$

Пусть $c > 0$. Из соотношений (10) следует, что переменные u, v, определенные посредством ξ, изменяются в пределах

$$e_1 \leqslant \xi \leqslant e_2$$

Действительные механические движения будут иметь место при $e_3 > e_1$.

Это условие для переменной u дает неравенство

$$h + l + mg\zeta > 0$$

для переменной v — неравенство

$$h - l + mg\zeta > 0$$

Таким же образом можно показать, что при $c < 0$ действительные механические движения будут иметь место при выполнении неравенств

$$h + l - mg\zeta > 0, \qquad h - l - mg\zeta > 0$$

Рассмотрение устойчивости частных решений системы (1) не дает существенно нового по сравнению с найденными ранее условиями [2,4].

Поступила 28 IV 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. О гироскопе в кардановом подвесе. ПММ, т. XXII, вып. 3, стр. 379—381, 1958.
2. Скимель В. Н. Некоторые задачи движения и устойчивости тяжелого гироскопа. Труды КАИ, XXXVIII, стр. 103—129, 1958.
3. Магнус К. Об устойчивости движения тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, т. XXII, вып. 2, стр. 173—178, 1958.
4. 5. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, т. XXII, вып. 3, стр. 374—378, 1958; ПММ, т. XXII, вып. 4, стр. 499—503, 1958.