К ЗАДАЧЕ О ПЛОСКОМ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ГРУНТОВЫХ ВОД

В. Г. Пряжинская

(Томск)

Рассматривается плоская задача о растекании жидкости под действием сил тяжести, если жидкость занимает в пористой среде некоторую полубесконечную область $G(t)$, ограниченную кривой $\Gamma(t)$ без кратных точек, уходящей обоими концами в бесконечность. С течением времени область $G(t)$ изменяется; вид области $G(0)$ в начальный момент времени предполагается известным. При этом предполагается, что граница $\Gamma(0)$ области имеет ось x асимптотой; естественно полагать, что в данных условиях при растекании жидкости под действием сил тяжести это свойство границы будет сохраняться для любого момента времени t.

Предполагается, что давление p на контуре $\Gamma(t)$ постоянно во все время движения и равно нулю; движение жидкости мы считаем подчиняющимся закону Дарси.

Л. А. Галин [1] эту задачу свел к нелинейной граничной задаче теории аналитических функций, для решения которой автор применял метод последовательных приближений.

Ниже дается иной, чем в работе [1], вывод граничного условия; задача сводится к некоторому интегро-дифференциальному уравнению, а затем к системе нелинейных интегральных уравнений. При определенных условиях установлено существование решения этой системы методом, аналогичным приведенному в работе П. П. Куфарева и Ю. П. Виноградова [2] для другой задачи.

Пусть функция $z = z(w, t)$, которую мы нормируем условием

$$\lim\,[z(w, t) - w] = 0 \qquad \text{при } w \to \infty, \qquad \operatorname{Im} w \leqslant 0$$

конформно отображает на область $G(t)$ нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w \leqslant 0$; будем предполагать, что $z(w, t)$ может быть представлена в виде

$$z(w, t) = w + \Psi(w, t)$$

где $\Psi(w, t)$ — функция, голоморфная в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} w \leqslant 0$ и удовлетворяющая при достаточно больших $|w|$, $\operatorname{Im} w \leqslant 0$ условиям

$$|\Psi(w, t)| \leqslant \frac{1}{|w|^{\mu}}, \qquad |\Psi_t'| \leqslant \frac{1}{|w|^{\mu}}, \qquad |\Psi_w'| \leqslant \frac{1}{|w|^{\mu}} \qquad (0 < \mu < 1) \tag{1}$$

Функцию $z_0(w) = z(w, 0)$ считаем заданной, поскольку $G(0)$ известна.

По закону Дарси давление связано с комплексным потенциалом течения $X^*(z, t)$ следующей зависимостью:

$$X^*(z, t) = -\frac{k}{\rho g} X_1^*(z, t) + ikz \qquad (X_1^* = p + iq)$$

(см. [3], гл. XV), где k — коэффициент фильтрации, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, p — давление жидкости, q — сопряженная p гармоническая функция. По условию задачи

$$p = \operatorname{Re} X_1^*(z, t) = 0 \qquad \text{на } \Gamma(t)$$

Вводя обозначение

$$X^*(z(w, t), t) = X(w, t), \qquad X_1^*(z(w, t), t) = X_1(x, t)$$

выразим комплексный потенциал течения в переменной w в виде [1]

$$X(w, t) = -kiw + kiz(w, t) \tag{2}$$

Обращаясь к выводу граничных условий для функции $z(w, t)$ сравним два выражения скорости частицы жидкости в точке z (ср. с [2]):

$$v = \frac{1}{m}\overline{\frac{\partial X^*}{\partial z}} = \frac{ik}{m}\overline{\frac{\partial w}{\partial z}} - \frac{ik}{m}$$

где m — пористость грунта.

С другой стороны, скорость частицы жидкости выражается в виде

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dt}$$

Приравнивая полученные выражения скорости, умноженные на $\overline{\dfrac{\partial z}{\partial w}}$, находим

$$\frac{ik}{m} - \frac{ik}{m}\overline{\frac{\partial z}{\partial w}} = \frac{\partial z}{\partial t}\overline{\frac{\partial z}{\partial w}} + \left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|^2 \frac{dw}{dt}$$

Отсюда получаем после умножения на i

$$\mathrm{Re}\left[\frac{k}{m}\frac{\partial z}{\partial w} + i\,\overline{\frac{\partial z}{\partial t}}\frac{\partial z}{\partial w}\right] = \frac{k}{m}$$

или

$$\mathrm{Re}\left[i\frac{\partial Z}{\partial w}\overline{\frac{\partial Z}{\partial t}}\right] = \pm 1 \text{ при } \eta = 0 \qquad \left(Z = z(w, t) + kit\,,\ w = \xi + i\eta\right) \tag{3}$$

Поделив обе части уравнения (3) на $|Z_w|^2$, имеем

$$\mathrm{Re}\left[i\frac{Z_t}{Z_w}\right] = -|\nu|^2 \qquad \left(\nu = \frac{1}{Z_w}\right) \tag{4}$$

В дальнейшем предполагается, что функция $\nu(w, t)$ удовлетворяет условию Гельдера на вещественной прямой (см. [4]).

По граничному условию (4) аналитическая в полуплоскости $\mathrm{Im}\, w \leqslant 0$ функция iZ_t / Z_w с учетом условий (1) может быть представлена через интеграл Шварца для полуплоскости формулой (см. [3], гл. VI)

$$i\frac{Z_t}{Z_w} = P, \qquad P(w, t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\nu(w, t)|^2 \frac{d\omega}{\omega - w} \tag{5}$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения. Записывая (5) в виде

$$Z_t + iZ_w P = 0 \tag{6}$$

и дифференцируя по w, получаем интегро-дифференциальное уравнение для $\nu(w, t)$:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = i\left[\nu\frac{\partial P}{\partial w} - P\frac{\partial \nu}{\partial w}\right] \tag{7}$$

где P выражается через граничные значения функции $\nu(w, t)$ формулой (5).

Если $\nu(w, t)$ — решение уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию $\nu(w, 0) = \nu_0(w)$, то искомая функция $Z(w, t)$ определяется формулой

$$Z(w, t) = \int\limits_0^w \frac{d\omega}{\nu(\omega, t)} + K(t) \qquad \left(K(t) = -i\int\limits_0^t \frac{P(0, t)}{\nu(0, t)}dt + Z_0(0)\right) \tag{8}$$

Делая замену

$$\nu(w, t) = 1 + u(w, t) \qquad \left(|u(w, t)| \leqslant \frac{1}{|w|^\mu}\,,\quad 0 < \mu < 1\right) \tag{9}$$

(при достаточно больших $|w|$) в уравнении (7), получим уравнение $u(w, t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\left[u\frac{\partial Q}{\partial w} - Q\frac{\partial u}{\partial w} + 2\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial Q}{\partial w}\right], \qquad \left(Q(w, t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(\omega, t)|^2 \frac{d\omega}{\omega - w}\right) \tag{10}$$

Решение уравнения (10) будем разыскивать в виде интеграла типа Коши по прямой C_w ($\mathrm{Im}\, w = \delta$, $\delta > 0$):

$$u(w, t) = \int\limits_{C_\xi} \frac{X(\xi, t)\, d\xi}{w - x(\xi, t)} \tag{11}$$

Функции $x(\xi, t)$, $X(\xi, t)$ в этом выражении предполагаются определенными в области D_{t_0} ($|t| \leqslant t_0$, $t_0 > 0$, $\xi \in C_\xi$) и удовлетворяющими следующим условиям.

1. Функция $x(\xi, t) - \xi$ и ее производные до второго порядка включительно голоморфны относительно t и равномерно ограничены:

$$|x(\xi, t) - \xi| \leqslant C, \qquad \left|\frac{\partial^{k+l} x(\xi, t)}{\partial \xi^k \partial t^l}\right| \leqslant B \qquad (k, l = 0, 1, 2,\ 1 \leqslant k + l \leqslant 2) \tag{12}$$

При достаточно больших $|\xi|$

$$|x(\xi, t)-\xi| \leqslant \frac{C}{|\xi|} \tag{13}$$

2. Функция $X(\xi, t)$ голоморфна относительно t и удовлетворяет условиям:

$$|X(\xi_1, t)-X(\xi_2, t)| \leqslant H|\xi_1-\xi_2|^{\mu}, \quad \left|\frac{\partial^k X(\xi, t)}{\partial t^k}\right| \leqslant H \qquad (k=0, 1, 2) \tag{14}$$

а при достаточно большом $|\xi|$ условию

$$\left|\frac{\partial^k X}{\partial t^k}\right| \leqslant \frac{H}{|\xi|^{\mu}} \tag{15}$$

Пользуясь выражением (11), из (10) имеем

$$Q(w, t)=\int_{C_\zeta}\int_{C_\eta}\frac{2X\overline{Y}d\eta d\zeta}{(x-\overline{y})(x-w)} \qquad \begin{pmatrix} X=X(\xi, t), \ x=x(\xi, t) \\ Y=X(\eta, t), \ y=x(\eta, t) \end{pmatrix} \tag{16}$$

Уравнение (10) для $u(w, t)$ принимает тогда вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=i\left[\int_{C_\xi}\int_{C_\eta}\int_{C_\zeta}\frac{2X\overline{Y}Zd\zeta d\eta d\xi}{(w-x)^2(x-\overline{y})(z-\overline{y})}+\int_{C_\xi}\int_{C_\eta}\int_{C_\zeta}\frac{4X\overline{Y}Zd\zeta d\eta d\xi}{(w-x)(z-x)(x-\overline{y})(z-\overline{y})}+\right.$$

$$\left.+\int_{C_\eta}\int_{C_\zeta}\frac{2X\overline{Y}d\xi d\eta}{(x-\overline{y})(x-w)^2}-\int_{C_\zeta}\frac{2Xd\xi}{(w-x)^2}\right] \qquad \begin{pmatrix} Z=X(\zeta, t) \\ z=x(\zeta, t) \end{pmatrix} \tag{17}$$

С другой стороны, дифференцируя (11) по t, находим

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\int_{C_\xi}\frac{1}{w-x}\frac{\partial X}{\partial t}d\xi+\int_{C_\xi}\frac{X}{(w-x)^2}\frac{\partial X}{\partial t}d\xi \tag{18}$$

Сравнивая указанные выражения $\partial u/\partial t$, получаем, что уравнение (10) для $u(w, t)$ удовлетворяется, если x и X являются решением системы уравнений (19)

$$\frac{\partial x}{\partial t}=2i\int_{C_\eta}\int_{C_\xi}\frac{\overline{Y}Zd\zeta d\eta}{(x-\overline{y})(z-\overline{y})}+2i\int_{C_\eta}\frac{\overline{Y}d\eta}{x-\overline{y}}-2i, \quad \frac{dX}{dt}=4iX\int_{C_\eta}\int_{C_\zeta}\frac{\overline{Y}Zd\zeta d\eta}{(z-x)(x-\overline{y})(z-\overline{y})}$$

интеграл по ζ в выражении $X(\xi, t)$ понимается в смысле главного значения.

Теорема 1. Пусть $\delta>0$ и $X_0(\xi)$ — функция, определенная на C_ξ и удовлетворящая на C_ξ условиям

$$|X_0(\xi)| \leqslant H_0, \qquad H_0 \leqslant H, \qquad |X_0(\xi_1)-X_0(\xi_2)| \leqslant H_0|\xi_1-\xi_2|^{\mu} \tag{20}$$

а при достаточно больших $|\xi|$ условию

$$|X_0(\xi)| \leqslant \frac{H_0}{|\xi|^{\mu}} \tag{21}$$

Тогда при достаточно малом t_0 система (19) имеет в D_{t_0} единственное правильное[1] решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(\xi, 0)=\xi, \qquad X(\xi, 0)=X_0(\xi)$$

Основное затруднение при доказательстве существования решения системы (19) возникает за счет второго уравнения, подынтегральная функция которого имеет особенность при $z=x$. При доказательстве (19) заменяется системой вида

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\int_{C_\eta}\int_{C_\zeta}f(x, \overline{y}, z, \overline{Y}, Z)\,d\zeta d\mu, \qquad \frac{\partial X}{\partial t}\int_{C_\eta}\int_{C_\zeta}\frac{\varphi(x, \overline{y}, z, \overline{Y}, Z)\,d\zeta d\eta}{z-x} \tag{22}$$

где f и φ — функции, голоморфные в области $\delta_1 \leqslant \operatorname{Im} x(\zeta, t) \leqslant \delta_2$, $0<\delta_1<\delta<\delta_2$, $\delta_1 \leqslant \operatorname{Im} y(\eta, t) \leqslant \delta_2$, $\delta_1 \leqslant \operatorname{Im} z(\zeta, t) \leqslant \delta_2$, $|Y| \leqslant H$, $|Z| \leqslant H$, а при достаточно больших $|\eta|$, $|\zeta|$

$$|Y| \leqslant \frac{H}{|\eta|^{\mu}}, \qquad |Z| \leqslant \frac{H}{|\zeta|^{\mu}}$$

[1] Правильным решением системы будет называть функции x, X, удовлетворяющие системе (19) и обладающие свойствами (13) — (15).

Условия, достаточные для существования решения системы (22), будут, очевидно, достаточными и для существования решения системы (19). Далее, так как интегрирование по η в (22) не может ухудшить сходимости последовательных приближений, которые используются при доказательстве, то для сокращения рассуждений теорема существования и единственности доказывается для следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \int\limits_{C_\zeta} f(x, z, Z)\, d\zeta, \qquad \frac{\partial X}{\partial t} = \int\limits_{C_\zeta} \frac{\varphi(x, z, Z)\, d\zeta}{z - x} \tag{23}$$

где f и φ — функции, голоморфные в области

$$\delta_1 \leqslant \operatorname{Im} x(\zeta, t) \leqslant \delta_2, \qquad \delta_1 \leqslant \operatorname{Im} z(\zeta, t) \leqslant \delta_2, \qquad |Z| \leqslant H, \qquad |Z| \leqslant \frac{H}{|\zeta|^\mu}, \quad 0 < \mu < 1$$

при достаточно больших $|\zeta|$. Поведение функций f и φ при больших $|\xi|$, $|\zeta|$ характеризуется неравенствами вида

$$|f| \leqslant \frac{M}{|\xi|} \text{ при больших } |\xi|, \qquad |f| \leqslant \frac{M}{|\zeta|^{\mu+1}} \text{ при больших } |\zeta|$$

Если же ξ и ζ одновременно достаточно велики по модулю, то выполняется условие вида

$$|f| \leqslant \frac{M}{|\xi|\,|\zeta|^{\mu+1}}$$

Система (23) в общем аналогична системе уравнений, исследованных в [2]. Существенным различием, значительно усложняющим доказательство, является у нас интегрирование по бесконечной прямой, что приводит к постановке дополнительных условий относительно достаточно быстрого убывания соответствующих функций при $w \to \infty$ и к необходимости проверки выполнения этих условий для приближений.

Теорема 2. Пусть функция $z_0(w)$ голоморфна и однолистна в полуплоскости $\operatorname{Im} w \leqslant 0$ и удовлетворяет условиям

$$|z_0(w) - w| \leqslant \frac{1}{|w|^\mu}, \quad |z_0'(w) - 1| \leqslant \frac{1}{|w|^\mu}, \quad u_0(w) = \frac{1}{z_0'(w)} - 1, \quad X_0(\xi) = \frac{u_0(\xi)}{2\pi i}$$

Пусть далее $x(\xi, t)$, $X(\xi, t)$ — правильное в области D_{t_0} решение системы (21), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(\xi, 0) = \xi, \qquad X(\xi, 0) = X_0(\zeta)$$

Тогда функция $Z(w, t)$, определяемая формулой (8), является единственным голоморфным в D_{t_0} решением граничной задачи (3).

Теорема 3. Пусть $Z_0(w)$ — функция, голоморфная и однолистная в области $\operatorname{Im} w < 0$. Тогда если функция $Z(w, t)$, голоморфная в области D_T, $0 < t < T$, $\operatorname{Im} w < 0$, является решением уравнения $Z_t + iZ_w P = 0$, удовлетворяющим начальному условию $Z(w, 0) = Z_0(w)$, то она однолистна в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} w < 0$.

При помощи замены $z = z_0(z^*)$ доказательство теоремы сводится к случаю, когда $z_0(w) = w$. Тогда $Z(w, t) = \omega(0, w, t)$, где $\omega(\tau, w, t)$ — решение уравнения $d\omega / d\tau = iP$, удовлетворяющее начальному условию $\omega(t, w, t) = w$. Так как $P = i\, Z_t / Z_w$, то с учетом (4) получаем

$$\frac{d \operatorname{Im} \omega}{d\tau} = \operatorname{Im}(iP) < 0$$

Из этого неравенства следует, что при изменении $0 < \tau < t$ значения ω не выходят из области голоморфности функции $P(w, t)$. Отсюда по известным теоремам теории дифференциальных уравнений вытекают голоморфность и однолистность функции $Z(w, t)$.

Поступила 16 III 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. ПММ, т. XV, вып. 6, 1951.
2. Куфарев П. П. и Виноградов Ю. П. ПММ, т. XII, вып. 2, 1948.
3. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. Гостехиздат, 1949.