ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОТРЫВНОМ ОБТЕКАНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА

С. С. Григорян

(Москва)

Если каверна, возникающая при отрывном обтекании осесимметричного тонкого тела, имеет пологий меридиан, т. е. она «тонкая», то задача о таком обтекании может быть решена приближенно при помощи теории «тонких тел». [1].

Безразмерный потенциал скоростей при движении тела без угла атаки можно представить в виде

$$\varphi(x, r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g\left(\xi, t - M\sqrt{(x-\xi)^2 + r^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + r^2}} d\xi \tag{1}$$

Здесь g — неизвестная функция, которую следует определить из граничных условий на поверхности тела и каверны, x, r — безразмерные координаты в плоскости меридиана, t — безразмерное время, M — отношение характерной скорости тела к скорости звука в невозмущенной жидкости.

Функция (1) является решением волнового уравнения, описывающего поле возмущений в жидкости с учетом сжимаемости в линейном приближении. Легко показать [1], что вблизи оси $r = 0$ имеет место асимптотическое представление [2]

$$\varphi(x, r, t) = -2g(x, t)\ln r + 0(1) \tag{2}$$

Отсюда видно, что главный член этого представления не зависит от сжимаемости жидкости. Уравнение поверхности тела берем в виде

$$r_1 = \varepsilon f_1(x, t) = \varepsilon f_1[F(t) - x] \tag{3}$$

Здесь индексом 1 обозначаем величины, относящиеся к поверхности тела, $\varepsilon \ll 1$ — малое количество, параметр «тонкости», $x = F(t)$ — закон движения носика тела. На смоченной поверхности тела должно удовлетворяться условие обтекания

$$\varphi_r - \varepsilon(f_1)_x\varphi_x - \varepsilon(f_1)_t = 0 \tag{4}$$

Это условие для функции $g(x, t)$ на участке оси тела, соответствующей смоченной части поверхности тела, дает приближенно [2]

$$g_1(x, t) = -\frac{1}{2}\varepsilon^2\check{F}(t) f_1'[\dot{F}(t) - x] f_1[F(t) - x] \tag{5}$$

Чтобы найти функцию $g(x, t)$ на участке оси симметрии x, находящемся внутри каверны, нужно удовлетворить на этом участке следующим двум соотношениям:

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x{}^2 + \varphi_r{}^2) = \frac{1}{2}\sigma, \qquad \varphi_r - (f_2)_x\varphi_x - (f_2)_t = 0 \tag{6}$$

Здесь неизвестная функция

$$r = f_2(x, t) \tag{7}$$

представляет собой уравнение меридиана каверны; σ — число кавитации; в дальнейшем индекс 2 означает величину, относящуюся к поверхности каверны.

Пользуясь асимптотикой (2), можно заменить сложные интегро-дифференциальные уравнения (6) для функций $g_2(x, t)$ и $f_2(x, t)$ приближенными соотношениями

$$\begin{gathered}-2(g_2)_t\ln f_2 + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2g_2}{f_2}\right)^2 + [2(g_2)_x\ln f_2]^2\right\} = \frac{1}{2}\sigma \\ -\frac{2g_2}{f_2} + 2(g_2)_x(f_2)_x\ln f_2 - (f_2)_t = 0\end{gathered} \tag{8}$$

Для смоченного участка поверхности тела имеем (см. (3) и (5))

$$f_1 = O(\varepsilon), \qquad g_1 = O(\varepsilon^2) \tag{9}$$

---

[1] После написания данной работы автору стали известны результаты Г. В. Логвиновича, полученные им для стационарного случая и нулевого числа кавитации. Уравнение каверны, выведенное им из других соображений, совпадает с выведенной ниже формулой для этого специального случая.

[2] Диссертация автора. Некоторые задачи гидродинамики тонких тел. МГУ, 1956; ссылки в дальнейшем [*].

и функции f_1, g_1 должны переходить в f_2, g_2, поэтому для функций f_2 и g_2 оценки (9) также справедливы. Это показывает,что в соотношениях (8) можно опустить члены с производными по x и тогда они перейдут в (индексы опускаем)

$$g_t \ln f - \frac{g^2}{f^2} + \frac{1}{4}\sigma = 0, \qquad f_t + 2\frac{g}{f} = 0 \tag{10}$$

Из первого равенства (10) видно, что приближенное описание, которое здесь проводится, возможно только при условии, что число кавитации σ — малая величина, имеющая порядок

$$\sigma = O(\varepsilon^2, \ \varepsilon^2 \ln \varepsilon) \tag{11}$$

Система обыкновенных уравнений (10) легко интегрируется в общем виде

$$(u')^2 \ln u = 4\sigma (u - u_0), \qquad u = f^2, \qquad g = -\frac{1}{4} u' \tag{12}$$

$$\Phi(u, u_0) \equiv \int \frac{\sqrt{-\ln u}}{\sqrt{u_0 - u}} du = \pm 2 \sqrt{\sigma}\, [t + c(x)] \tag{13}$$

где $u_0 = u_0(x)$ и $c(x)$ — постоянные интегрирования.

Заметим, что при фиксированном x кривая (13) на плоскости ut имеет ось симметрии, параллельную оси u. Расстояние между точками пересечения этой кривой с осью t есть

$$T = \frac{a(u_0)}{2\sqrt{\sigma}} \tag{14}$$

поэтому при фиксированном $u_0 \ll 1$ это расстояние стремится к бесконечности с уменьшением числа кавитации до нуля.

Функции $u_0(x)$, $c(x)$ должны быть найдены из дополнительных условий, связанных с переходом со смоченной поверхности тела на поверхность каверны. Этими условиями являются непрерывность величины давления, наклона касательной к меридиану и радиуса меридиана в сечении перехода, причем положение самого сечения также должно быть найдено.

В случае постоянной скорости тела имеем $u_0(x) = \text{const}$, $c(x) = -x + \text{const}$, так как в системе координат, движущейся вместе с телом, движение будет установившимся и, в частности, должно быть

$$u = u(t - x) = u(\xi)$$

Из изложенного выше следует, что каверна в этом случае будет симметричной относительно своего миделя. При $\sigma > 0$ каверна будет иметь конечные размеры, т. е. будет смыкаться на конечном расстоянии за телом.

Далее из (14) следует, что при $\sigma \to 0$ и $u_0 = \text{const}$ длина каверны неограниченно возрастает. Все это находится в соответствии с тем, что вытекает из решения задачи при точной ее постановке в тех случаях, когда задача в такой постановке решается точно (точные решения известны только для плоской задачи).

Рассмотрение асимптотики $u(\xi)$ при $u \to 0$ показывает, что каверна в точке смыкания на оси является гладкой поверхностью, т. е. $f'(\xi) \to \infty$ при $f \to 0$. Очевидно, что в окрестности этой точки предлагаемое приближенное решение теряет силу.

Условия в переходном сечении с неизвестной координатой ξ_1 таковы:

$$\left[(\ln u_1) u_1'' + \frac{1}{2u_1}(u_1')^2\right]_{\xi=\xi_1} = \left[(\ln u_2) u_2'' + \frac{1}{2u_2}(u_2')^2\right]_{\xi=\xi_1} = 2\sigma \tag{15}$$

$$u_1(\xi_1) = u_k(\xi_1 + c, u_0), \quad u_1'(\xi_1) = u_2'(\xi_1 + c, u_0)$$

Из этих трех соотношений находятся три неопределенных параметра ξ_1, u_0, c. В случае, когда каверна срывается с излома меридиана тела, в точке срыва давление, вообще говоря, терпит разрыв.

Найденное здесь общее решение позволяет в принципе решать задачу отрывного обтекания при малых положительных числах кавитации при произвольном неустановившемся движении тела. Кроме того, это решение позволяет решать задачу о проникании тонкого тела в полупространство, заполненное покоящейся жидкостью, при условиях, когда за проникающим телом образуется свободная поверхность (для случая, когда отрыва потока от тела не происходит, задача решена в [*]). Здесь закон движения тела также может быть произвольным (но без угла атаки);

произвольным может быть также угол, образованный осью тела и свободной поверхностью. Все это следует из свойств решения задачи теории «тонких тел» [*]).

В случае проникания, очевидно, следует положить $\sigma = 0$. Решения уравнения (12) при $\sigma = 0$ стремятся к $u = 1$ при конечном t, причем на прямой $u = 1$ плоскости u, t интегральные кривые имеют точку возврата. Таким образом, при $\sigma = 0$ эти решения становятся при увеличении t непригодными, ибо для этих решений перестает выполняться исходная предпосылка теории, требующая малости $u\,(u \ll 1)$; вдоль этих решений u делается величиной порядка единицы. Вместе с тем поведение каверны вблизи тела для случаев $\sigma > 0$ и $\sigma = 0$ одинаково, так как одинаковы асимптотики $u(t)$ при $u \to 0$ [см. (12)].

Автор приносит признательность Г. В. Логвиновичу за полученную от него информацию.

Поступила 13 VII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И., Карпович Е. А. Газодинамика тонких тел. М.— Л., 1948.

ОДИН КЛАСС ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАГНИТОГАЗОДИНАМИКИ

Д. В. Шарикадзе (Тбилиси)

Уравнения, характеризующие нестационарные течения газа, находящегося в магнитном поле и обладающего бесконечно большой проводимостью и центральной симметрией, имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left(p + \frac{h^2}{2}\right) + \frac{mh^2}{\rho r} = 0 \quad \left(h = \frac{H}{\sqrt{4\pi}}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \ln \rho}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{Nu}{r} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \ln p}{\partial t} + u\frac{\partial \ln p}{\partial r} + k\frac{\partial u}{\partial r} + kN\frac{u}{r} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial t} + u\frac{\partial \ln h}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} + (N - m)\frac{u}{r} = 0 \tag{4}$$

где u — скорость газа, ρ — плотность, p — давление, H — напряженность магнитного поля, всегда перпендикулярная скорости движения газа, k — коэффициент адиабатичности, $N = 0$, $m = 0$ — для одномерного течения, $N = 1$, $m = 0$ — для цилиндрически-симметричного течения, когда $H = H_z(r, t)$, и $N = 1$, $m = 1$ для цилиндрически-симметричного течения, когда $H = H_\varphi(r, t)$.

Пусть давление зависит только от времени $p = p(t)$, а напряженность поля

$$H = \sqrt{4\pi}\, r^{-m} f(t) \quad \text{или} \quad h = r^{-m} f(t) \tag{5}$$

Подставляя эти значения p и h в уравнение (1), получим

$$r = ut + F(u) \tag{6}$$

Вводя новые независимые переменные t, u вместо t, r и учитывая (6), получим

$$\rho = \varphi_1(u)\, r^{-N}(t + F')^{-1}, \qquad p = \varphi_2(u)\, r^{-kN}(t + F')^{-k}, \qquad h = \varphi_3(u)\, r^{-(N+m)}(t + F')^{-1}$$

Для того, чтобы выполнялось требование $p = p(t)$ и $h = r^{-m} f(t)$, необходимо допустить, что

$$F(u) = -ut_0, \qquad \varphi_2 = Au^{kN}, \qquad \varphi_3 = Bu^N$$

Тогда решение основной системы будет иметь вид:

$$\rho = \varphi_1(u)(t - t_0)^{-(N+1)}, \qquad p = A(t - t_0)^{-k(N+1)}, \qquad h = Br^{-m}(t - t_0)^{-(N+1)}$$

где A и B — постоянные.

Поступила 19 VI 1959