О ТЕПЛОВОМ ЭФФЕКТЕ ПРИ ТЕЧЕНИИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

С. А. Регирер

(Воркута)

В заметке изучается течение вязкой электропроводной жидкости в плоской трубе при наличии магнитного поля и теплообмена. Учитываются выделение тепла от внутреннего трения, джоулево тепло и зависимость вязкости от температуры. Аналогичная задача об изотермическом течении была решена Гартманом [1]; для непроводящей жидкости она ранее также рассматривалась в работах [2-4].

§ 1. Рассмотрим установившееся течение несжимаемой жидкости в направлении оси x между бесконечными параллельными стенками $z = \pm a$, когда по нормали к ним приложено однородное магнитное поле H_0. Общие уравнения магнитной гидродинамики допускают тогда подобно изотермическому случаю [1] решение вида:

$$H_x = H_x(z), \qquad H_y = 0, \qquad H_z = H_0 = \text{const} \quad \text{(для составляющих магнитного поля)}$$

$$v_x = v(z), \qquad v_y = v_z = 0 \quad \text{(для составляющих скорости)}$$

$$T = T(z), \qquad p = p(x, z) \quad \text{(для температуры и давления)}$$

Искомые функции удовлетворяют системе

$$\frac{d}{dz}\left(\eta \frac{dv}{dz}\right) + \frac{\mu H_0}{4\pi} \frac{dH_x}{dz} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p + \frac{\mu H^2}{8\pi}\right) \tag{1.1}$$

$$H_0 \frac{dv}{dz} + \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \frac{d^2 H_x}{dz^2} = 0 \tag{1.2}$$

$$k \frac{d^2 T}{dz^2} + \eta \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + \frac{c^2}{16\pi^2\sigma}\left(\frac{dH_x}{dz}\right)^2 = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(p + \frac{\mu H^2}{8\pi}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(p + \frac{\mu H^2}{8\pi}\right) = 0 \tag{1.4}$$

Здесь c — скорость света, $\eta = \eta(T)$, $k = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ — соответственно вязкость, теплопроводность, электропроводность и магнитная проницаемость жидкости. Ограничимся изучением задачи с простейшими граничными условиями вида

$$v(\pm a) = H_x(\pm a) = T(\pm a) = 0$$

Из уравнений (1.4) следует, что $p + \mu H^2 / 8\pi = f(x)$, а из (1.1), поскольку его левая часть зависит только от z, что

$$\frac{d}{dx}\left(p + \frac{\mu H^2}{8\pi}\right) = \text{const} = p^*$$

Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{z}{a}, \qquad u = \frac{\eta_0}{p^* a^2} v, \qquad h = \frac{H_x}{H_0}, \qquad \theta = \frac{k\eta_0}{p^{*2} a^4} T, \qquad \psi = \frac{\eta_0}{\eta} \tag{1.5}$$

где $\eta_0 = \eta_{T=0}$, и параметры

$$A = \mu H_0^2 / 4\pi a p^*, \qquad B = c^2 \eta_0 / 4\pi\sigma\mu a^3 p^*$$

В новых переменных система (1.1)—(1.3) может быть записана в виде

$$\left(\frac{u'}{\psi}\right)' + Ah' = 1, \qquad u' + Bh'' = 0, \qquad \theta'' + \frac{1}{\psi} u'^2 + ABh'^2 = 0 \tag{1.6}$$

причем $u(\pm 1) = h(\pm 1) = \theta(\pm 1) = 0, \qquad \psi(\pm 1) = 1.$

Первые два уравнения системы интегрируются непосредственно:

$$\frac{u'}{\psi} + Ah = \xi + C_1, \qquad u + Bh' = C_2 \tag{1.7}$$

Из условий симметрии $C_1 = 0$; умножая первое равенство (1.7) на u', второе на Ah', получим

$$\frac{u'^2}{\psi} = \xi u' - Ahu'; \qquad ABh'^2 = (C_2 - u) Ah'$$

Вводя величину $\tau = \xi - Ah$, при помощи второго равенства (1.6) преобразуем эти уравнения к виду

$$\frac{u'^2}{\psi} = \frac{B}{A}\tau\tau'', \qquad ABh'^2 = \frac{B}{A}(1-\tau')^2 \tag{1.8}$$

Следовательно, вместо третьего равенства (1.6) имеем

$$\theta'' + \frac{B}{A}(\tau\tau'' + 1 - 2\tau' + \tau'^2) = 0 \tag{1.9}$$

Интегрируя и снова в силу симметрии полагая постоянную равной нулю, придем к уравнению относительно $\theta(\xi)$, $\tau(\xi)$:

$$\theta' + \frac{B}{A}(\xi - 2\tau + \tau\tau') = 0 \tag{1.10}$$

Второе уравнение получается исключением u из уравнений (1.7)

$$\psi(\theta) = \frac{B\tau''}{A\tau} \tag{1.11}$$

Граничные условия для переменной $\tau(\xi)$ при этом $\tau(\pm 1) = \pm 1$.

Поскольку функция $\psi(\theta)$ обычно представима в виде ряда по степеням θ, сходящегося в достаточно широком интервале, то для системы (1.10), (1.11) может быть применено разложение искомых функций в степенные ряды.

§ 2. Решение уравнений (1.10), (1.11) в замкнутой форме получается лишь в случае постоянной вязкости, когда $\psi(\theta) \equiv 1$. Из (1.11) и граничных условий для τ находим (ср. [1])

$$\tau = \frac{\operatorname{sh}\lambda\xi}{\operatorname{sh}\lambda}, \qquad \lambda = \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\mu H_0 a}{c}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta_0}} \tag{2.1}$$

После этого уравнение (1.10) принимает вид

$$\theta' + \frac{1}{\lambda^2}\left(\xi - 2\frac{\operatorname{sh}\lambda\xi}{\operatorname{sh}\lambda} + \frac{\lambda}{2\operatorname{sh}^2\lambda}\operatorname{sh}^2\lambda\xi\right) = 0 \tag{2.2}$$

и легко интегрируется; его интеграл, удовлетворяющий граничным условиям, есть

$$\theta = \frac{1}{2\lambda^2}(1-\xi^2) - \frac{2}{\lambda^3\operatorname{sh}\lambda}(\operatorname{ch}\lambda - \operatorname{ch}\lambda\xi) + \frac{1}{4\lambda^2\operatorname{sh}^2\lambda}(\operatorname{ch}2\lambda - \operatorname{ch}2\lambda\xi) \tag{2.3}$$

Наибольшее значение температуры достигается при $\xi = 0$:

$$\theta_m = \theta(0) = \frac{1}{\lambda^2}\left(1 - \frac{\operatorname{th}\lambda/2}{\lambda/2}\right) \tag{2.4}$$

Исходя из соответствующих неполных уравнений энергии (1.3), нетрудно построить также решения для θ, учитывающие лишь один из тепловых эффектов: джоулево тепло $\theta^{(1)}$ или тепло трения ($\theta^{(2)}$).

$$\theta^{(1)} = \left(\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{4\operatorname{sh}^2\lambda}\right)(1-\xi^2) - \frac{2}{\lambda^3\operatorname{sh}\lambda}(\operatorname{ch}\lambda - \operatorname{ch}\lambda\xi) + \frac{1}{8\lambda^2\operatorname{sh}^2\lambda}(\operatorname{ch}2\lambda - \operatorname{ch}2\lambda\xi) \tag{2.5}$$

$$\theta^{(2)} = -\frac{1}{4\operatorname{sh}^2\lambda}(1-\xi^2) + \frac{1}{8\lambda^2\operatorname{sh}^2\lambda}(\operatorname{ch}2\lambda - \operatorname{ch}2\lambda\xi) \tag{2.6}$$

Зависимость максимальных температур $\theta^{(1)}$ и $\theta^{(2)}$ от параметра λ имеют вид

$$\theta_m^{(1)} = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{3}{4} - \frac{\operatorname{th}\lambda/2}{\lambda/2}\right) + \frac{1}{4\operatorname{sh}^2\lambda}, \qquad \theta_m^{(2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2\lambda}\right) \tag{2.7}$$

Отсюда можно получить следующие предельные соотношения:

$$\lim\theta_m^{(1)} = 0, \quad \lim\theta_m^{(2)} = \frac{1}{12} \quad \text{при } \lambda \to 0, \qquad \lim\theta_m^{(1)} = \lim\theta_m^{(2)} = 0 \quad \text{при } \lambda \to \infty$$

Сравнение формул (2.7) показывает, что при малых λ главную роль играет повышение температуры от внутреннего трения, а при достаточно больших λ наблюдается обратная картина.

§ 3. Рассмотрим теперь случай, когда вязкость связана с температурой гиперболической зависимостью

$$\eta = \eta_0\frac{1}{1+\alpha^2 T}, \qquad \text{или} \qquad \psi(\theta) = 1 + \frac{p^{*2}a^4\alpha^2}{k\eta_0}\theta = 1 + \beta^2\theta \tag{3.1}$$

Уравнения (1.10), (1.11) записываются тогда в виде

$$\tau'' - \lambda^2\psi\tau = 0, \qquad \psi' + \frac{\beta^2}{\lambda^2}(\xi - 2\tau + \tau\tau') = 0 \tag{3.2}$$

Соображения симметрии и форма этих уравнений приводят к выводу, что $\tau(\xi)$ — нечетная функция, а $\psi(\xi)$ — четная. Поэтому будем искать их в виде рядов:

$$\tau = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i+1}\xi^{2i+1}; \qquad \psi = \sum_{i=0}^{\infty} b_{2i}\xi^{2i} \tag{3.3}$$

Подставляя ряды (3.3) в уравнения (3.2), получим рекуррентные соотношения

$$(2i+3)(2i+2)a_{2i+3} - \lambda^2 \sum_{m=0}^{m=i} a_{2m+1}b_{2(i-m)} = 0, \quad (i \geqslant 0) \tag{3.4}$$

$$(2i+2)b_{2i+2} - \frac{\beta^2}{\lambda^2}\left(2a_{2i+1} - (i+1)\sum_{m=0}^{m=i} a_{2m+1}a_{2(i-m)+1}\right) = 0, (i > 0) \tag{3.5}$$

дающие возможность вычислить коэффициенты разложений (3.3) как функции от a_1, b_0, b_2. При этом a_1 и b_0 определяются из граничных условий для τ и ψ, имеющих в данном случае вид:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{2i+1} = 1, \qquad \sum_{i=0}^{\infty} b_{2i} = 1, \qquad b_2 = \frac{(1-a_1)^2\beta^2}{\lambda^2} \tag{3.6}$$

Комбинируя уравнения (3.4), (3.5) и формулу для b_2, можно получить соотношение, содержащее только a_{2s+1}:

$$a_{2i+3} = \frac{\beta^2}{(2i+3)(2i+2)}\left[\frac{\lambda^2 b_0}{\beta^2}a_{2i+1} - a_{2i-1} - \sum_{m=0}^{m=i-1} a_{2m+1} \times \right. \tag{3.7}$$

$$\left. \times \left(\frac{a_{2(i-m)-1}}{i-m} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{n=i-m-1} a_{2n+1}a_{2(i-m-n)-1}\right)\right] \qquad (i > 0)$$

Вопрос сходимости рядов (3.3) с трудом поддается решению в полной мере. Однако для достаточно малых λ и β можно доказать, что ряды (3.3) равномерно сходятся в промежутке $[-\rho, +\rho]$, где ρ — некоторое число, большее единицы. В самом деле, если при $2 \leqslant i \leqslant n$ справедливо неравенство $|a_{2i+1}| < M\varepsilon^i$, где $0 < \varepsilon < 1$ и $M > b_0$, $M > a_1$, то из формулы (3.7) легко получается для достаточно малых λ и β оценка $|a_{2n+3}| < M\varepsilon^{n+1}$. Если вместе с тем малость λ и β обеспечивает еще выполнение неравенства $|a_5| < M\varepsilon^2$, то по индукции $|a_{2i+1}| < M\varepsilon^i$ для всех $i \geqslant 2$. Тогда радиус сходимости первого из рядов

$$\rho = \lim_{n\to\infty}(a_{2n+1})^{-1/n} \geqslant \frac{1}{\varepsilon} > 1 \tag{3.8}$$

Сходимость второго ряда исследуется при помощи тех же оценок, исходя из (3.5).

Аналогичным путем можно построить в виде равномерно сходящихся рядов решения поставленной задачи учитывающие, как в § 2, только один из тепловых эффектов.

Поступила 25 XI 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, 1957.
2. Schlichting H. Einige exakte Lösungen für die Temperaturverteilung in einer laminaren Strömung. ZAMM, b. 31, S. 71, 1951.
3. Hausenblas H. Die nicht isotherme Strömung einer zähen Flüssigkeit durch enge Spalten und Kapillarröhren. Ingr-Arch., b. 18, S. 151, 1950.
4. Регирер С. А. Некоторые термогидродинамические задачи об установившемся одномерном течении вязкой капельной жидкости, ПММ. т. 21, № 3, 1957.