ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В КАНАЛЕ, ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЕ В СТЕНКЕ

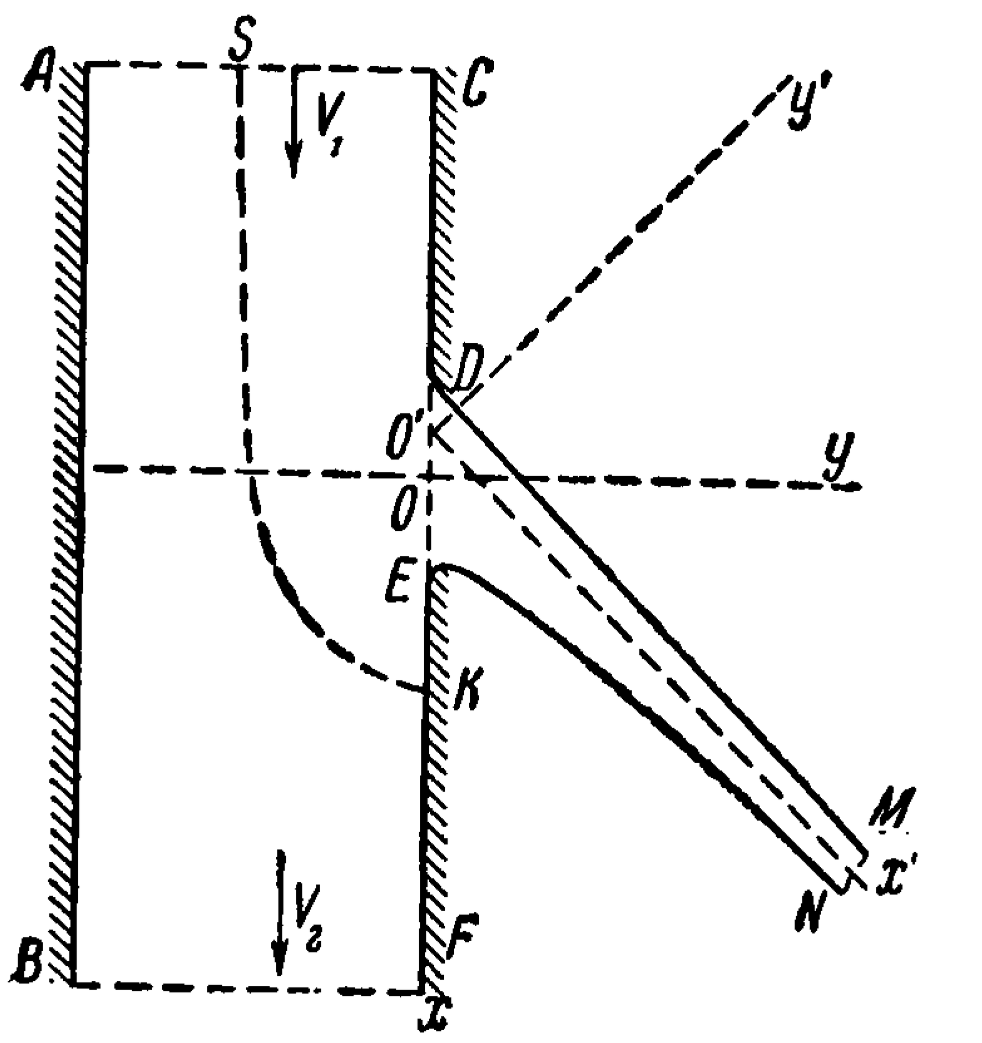
В. И. Трошин

(Москва)

Дается решение задачи об истечении газа, движущегося в канале с параллельными стенками через отверстие в одной из стенок. Из найденного решения в качестве предельного случая следует решение задачи об истечении газа, движущегося параллельно плоскости, через отверстие в этой плоскости.

При решении автор использует предложение С. В. Фальковича [1], позволяющее распространить метод Чаплыгина решения задачи о газовых струях [2] на струйные задачи с несколькими характерными скоростями. Задача, разбираемая ниже, содержит три характерные скорости.

§ 1. Пусть AB и CF — стенки канала, DE — отверстие в стенке, DM и EN — свободные поверхности струи (фиг. 1), на которых скорость равна V_0. Пусть $2D$ — ширина канала, $2d$ — ширина отверстия, $2h$ — ширина вытекающей струйки на бесконечности, v_1 и v_2 — скорости газа в бесконечно удаленных сечениях канала AC и BF соответственно. Начало координат O выберем в середине отверстия DE в стенке, ось x направим по стенке канала по направлению течения, ось y направим в область истечения струи. Примем, что на линии тока SK, которая разветвляется в точке K, функция тока $\psi = 0$. Если обозначить расход газа в струе через q, расход газа в сечении канала BF через Q, то $\psi = q$ на линии тока CDM, $\psi = -Q$ на линии тока AB. Угол наклона струи в бесконечности к оси x обозначим через m. Скорости газа всюду считаем дозвуковыми.



Фиг. 1

Обозначим $\tau = v^2 / v_{\max}^2$, где v — скорость, $v_{\max}$ — максимальная скорость истечения, θ — угол наклона скорости к оси x, тогда в плоскости годографа $\tau\theta$ область течения представится полукругом (фиг. 2)

Граничные условия будут следующие:

$$\begin{aligned}
&\psi = 0 && \text{при } \theta = 0, && 0 < \tau < \tau_2 \\
&\psi = -Q && \text{при } \theta = 0, && \tau_2 < \tau < \tau_1 \\
&\psi = q && \text{при } \theta = 0, && \tau_1 < \tau < \tau_0 \\
&\psi = 0 && \text{при } \theta = \pi, && 0 < \tau < \tau_0 \\
&\psi = q && \text{при } \tau = \tau_0, && 0 < \theta < m
\end{aligned} \qquad (1.1)$$

$$\psi = 0 \qquad \text{при } \tau = \tau_0, \quad m < \theta < \pi \qquad (1.2)$$

Решение ищем в следующем виде:

$$\psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z_{n/2}(\tau) \sin n\theta \qquad (0 < \tau < \tau_2) \qquad (1.3)$$

$$\psi_1 = -Q\frac{\pi - \theta}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n Z_{n/2}(\tau) + B_n \zeta_{n/2}(\tau)\} \sin \theta \qquad (\tau_2 < \tau < \tau_1) \qquad (1.4)$$

$$\psi_0 = q\frac{\pi - \theta}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \{C_n Z_{n/2}(\tau) + D_n \zeta_{n/2}(\tau)\} \sin n\theta \qquad (\tau_1 < \tau < \tau_0) \qquad (1.5)$$

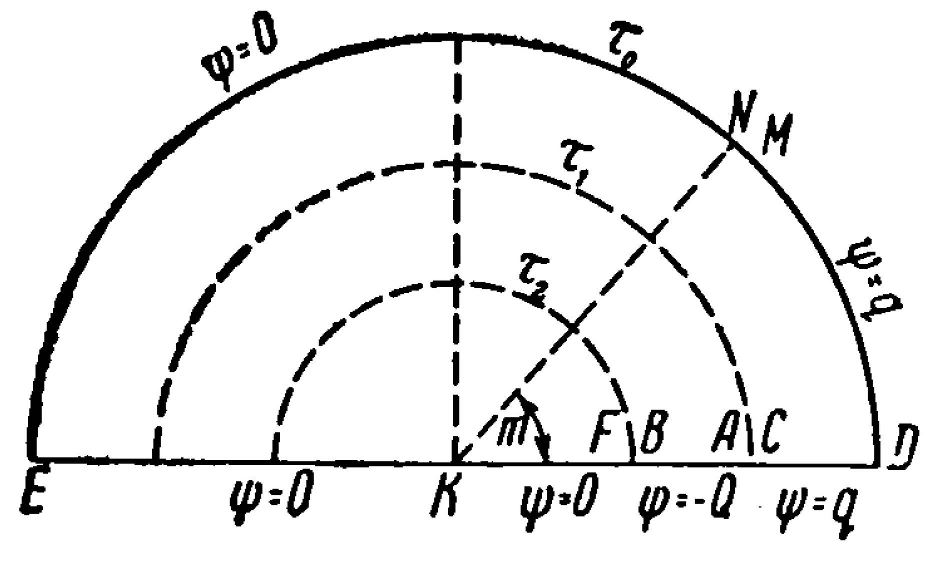
Здесь $Z_{n/2}(\tau)$ — регулярный при $\tau = 0$ интеграл [2] уравнения Чаплыгина, $\zeta_{n/2}(\tau)$ — другой, линейно независимый по отношению к $Z_{n/2}$ интеграл этого же уравнения [3,1]. Существенно, что вронскиан этих интегралов

$$W(Z_{n/2}, \zeta_{n/2}) = \begin{vmatrix} Z'_{n/2} & \zeta'_{n/2} \\ Z'_{n/2} & \zeta_{n/2} \end{vmatrix} = \frac{n}{2\tau}(1-\tau)^{\beta} \qquad \left(\beta = \frac{1}{\gamma - 1}\right) \qquad (1.6)$$

Здесь γ — показатель политропы. Функция тока, определенная равенствами (1.3), (1.4), (1.5), удовлетворяет граничным условиям (1.1). Потребуем теперь, чтобы удовлетворялось граничное условие (1.2), а также чтобы ψ_1 была аналитическим продолжением ψ_2 из области $0 < \tau < \tau_2$ в область $\tau_2 < \tau < \tau_1$ и ψ_0 была аналитическим продолжением ψ_1 из области $\tau_1 < \tau < \tau_2$ в область $\tau_1 < \tau < \tau_0$, т. е. потребуем, чтобы выполнялись следущие равенства:

$$\psi_0(\tau_0) = q \quad (0 < \theta < m), \qquad \psi_0(\tau_0) = 0 \quad (0 < \theta < \pi) \tag{1.7}$$

$$\psi_0 = \psi_1, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial \tau} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} \quad \text{при } \tau = \tau_1; \qquad \psi_1 = \psi_2, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} \quad \text{при } \tau = \tau_2 \qquad (0 < \theta < \pi) \tag{1.8}$$



Фиг. 2

Подставляя в (1.7) и (1.8) функцию тока ψ, определенную равенствами (1.3), (1.4), (1.5), и приравнивая коэффициенты при $\sin n\theta$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&C_n Z_{n/2}(\tau_0) + D_n \zeta_{n/2}(\tau_0) = -(2q/\pi n)\cos mn \\
&(C_n - A_n) Z_{n/2}(\tau_1) + (D_n - B_n)\zeta_{n/2}(\tau_1) = -2(q+Q)/\pi n \\
&(C_n - A_r) Z'_{n/2}(\tau_1) + (D_n - B_n)\zeta'_{n/2}(\tau_1) = 0 \\
&(A_n - a_n) Z_{n/2}(\tau_2) + B_n \zeta_{n/2}(\tau_2) = 2Q/\pi n \\
&(A_n - a_n) Z'_{n/2}(\tau_2) + B_n \zeta'_{n/2}(\tau_2) = 0
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Разрешая систему уравнений (1.9) и используя зависимость (1.6), определим коэффициенты a_n, A_n. B_n, C_n, D_n.

Тем самым и определится функция тока ψ. В дальнейшем потребуется только функция ψ в области $\tau_1 < \tau < \tau_0$, т. е. ψ_0, которую будем обозначать просто через ψ. Подставляя коэффициенты C_n и D_n в (1.5), найдем

$$\frac{\pi\psi}{2q} = \frac{\pi - \theta}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_n(\tau)\sin n\theta \tag{1.10}$$

где

$$f_n(\tau) = \cos mn \frac{Z_{n/2}(\tau)}{Z_{n/2}(\tau_0)} - \left\{(1+k)\frac{2\tau_1}{(1-\tau_1)^\beta n}\frac{Z'_{n/2}(\tau_1)}{Z_{n/2}(\tau_0)} - k\frac{2\tau_2}{(1-\tau_2)^\beta n}\frac{Z'_{n/2}(\tau_2)}{Z_{n/2}(\tau_0)}\right\}[\zeta_{n/2}(\tau_0) Z_{n/2}(\tau) - Z_{n/2}(\tau_0)\zeta_{n/2}(\tau)] \quad \left(k = \frac{Q}{q}\right) \tag{1.11}$$

Легко убедиться, что

$$f_n(\tau_0) = \cos mn \tag{1.12}$$

$$f_n'(\tau_0) = \cos mn \frac{Z'_{n/2}(\tau_0)}{Z_{n/2}(\tau_0)} + k\frac{\tau_2}{\tau_0}\left(\frac{1-\tau_0}{1-\tau_2}\right)^\beta \frac{Z'_{n/2}(\tau_2)}{Z_{n/2}(\tau_0)} - (1+k)\frac{\tau_1}{\tau_0}\left(\frac{1-\tau_0}{1-\tau_1}\right)^\beta \frac{Z'_{n/2}(\tau_1)}{Z_{n/2}(\tau_0)}$$

Последнее равенство получим, если продифференцируем (1.11) и воспользуемся (1.6).

§ 2. Введем новую систему координат x', y'. За ось x' примем прямую, к которой стремятся обе свободные поверхности струи (фиг. 1). Эта прямая пересекает ось x в точке O' с координатами $x=a$, $y=0$. Точку O' примем за начало новой системы координат. В новой системе координат будем иметь

$$\frac{\partial y'}{\partial\theta'}=\frac{1}{v(1-\tau)^{\beta}}\left[2\tau\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\sin\theta'+\frac{\partial\psi}{\partial\theta'}\cos\theta'\right] \tag{2.1}$$

Здесь $\theta'=\theta-m$. Интегрируя (2.1), найдем

$$\frac{\pi}{2q}y'=\frac{1}{v(1-\tau)^{\beta}}\left\{-2\tau\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}f_n'(\tau)\int_0^{\theta'}\sin n(\theta'+m)\sin\theta'\,d\theta'-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int_0^{\theta'}\cos\theta' d\theta'-\sum_{n=1}^{\infty}f_n(\tau)\int_0^{\theta'}\cos n(\theta'+m)\cos\theta' d\theta'\right\} \tag{2.2}$$

Полагая $\theta'=-m$ и $\tau=\tau_0$ в (2.2), получим координату $y'=(d+a)\sin m$ точки D. Полагая $\theta'=\pi-m$ и $\tau=\tau_0$, получим координату $y'=(a-d)\sin m$ точки E. Вычитая из первого полученного таким образом соотношения второе, найдем

$$\frac{\pi}{2}\frac{d}{h}\sin m=\frac{1}{2}\int_{-m}^{\pi-m}\cos\theta' d\theta'+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(\tau_0)\int_{-m}^{\pi-m}\cos n(\theta'+m)\cos\theta' d\theta'+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\tau_0 f_n'(\tau_0)\int_{-m}^{\pi-m}\sin n(\theta'+m)\sin\theta' d\theta' \tag{2.3}$$

Здесь было принято во внимание, что

$$q=2hv_0(1-\tau_0)^{\beta} \tag{2.4}$$

Если выполнить квадратуры и принять во внимание (1.10), то получим

$$\frac{\pi}{2}\frac{d}{h}=\pi\operatorname{ctg}m+1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2mn}{4n^2-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{4n^2-1}\frac{\tau_2}{n}\left[\cos 2mn\frac{Z_n'(\tau_0)}{Z_n(\tau_0)}+\right.$$
$$\left.+k\frac{\tau_2}{\tau_0}\left(\frac{1-\tau_0}{1-\tau_2}\right)^{\beta}\frac{Z_n'(\tau_2)}{Z_n(\tau_0)}-(1+k)\frac{\tau_1}{\tau_0}\left(\frac{1-\tau_0}{1-\tau_1}\right)^{\beta}\frac{Z_n'(\tau_1)}{Z_n(\tau_0)}\right] \tag{2.5}$$

Заметим, что остались только функции Z_n с целым значком, так как при функциях вида $Z_{(2k+1)/2}$ коэффициенты обратились в нуль.

Если ввести функции Чаплыгина

$$x_n(\tau)=\frac{n}{\tau}\frac{Z_n'(\tau)}{Z_n(\tau)}$$

и принять во внимание, что

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2mn}{4n^2-1}=1-\frac{\pi\sin m}{2}$$

то из (2.5) получим

$$\frac{\pi}{2}\frac{d}{h}=\pi\operatorname{ctg}m+\frac{\pi}{2}\sin m- \tag{2.6}$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{4n^2-1}\left\{\cos 2mnx_n(\tau_0)+k\left(\frac{1-\tau_0}{1-\tau_2}\right)^{\beta}\frac{Z_n(\tau_2)}{Z_n(\tau_0)}x_n(\tau_2)-\right.$$
$$\left.-(1+k)\left(\frac{1-\tau_0}{1-\tau_1}\right)^{\beta}\frac{Z_n(\tau_1)}{Z_n(\tau_0)}x_n(\tau_1)\right\}$$

К этому соотношению нужно присоединить еще уравнение неразрывности

$$Dv_1(1-\tau_1)^\beta = Dv_2(1-\tau_2)^\beta + hv_0(1-\tau_0)^\beta \tag{2.7}$$

Кроме того,

$$k = Q\,/\,q = \frac{v_2(1-\tau_2)^\beta D}{v_0(1-\tau_0)^\beta h} \tag{2.8}$$

Еще одно уравнение получим из теоремы о количестве движения:

$$2D(p_1-p_2) = qv_0\cos m + Qv_2 - 2Dv_1(1-\tau_1)^\beta v_1 \tag{2.9}$$

Здесь p_1 и p_2 — давления на входе и выходе из канала. Учитывая, что

$$p = p_0(1-\tau)^{\beta+1}, \qquad p_0 = \frac{v_{\max}^2}{2(\beta+1)} \qquad (\rho_0 = 1)$$

из (2.9) найдем

$$\cos m = \frac{1+(2\beta+1)\tau_1}{2(\beta+1)\sqrt{\tau_1\tau_0}}\,\frac{1-\dfrac{1+(2\beta+1)\tau_2}{1+(2\beta+1)\tau_1}\left(\dfrac{1-\tau_2}{1-\tau_1}\right)^\beta}{1-\left(\dfrac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{1/2}\left(\dfrac{1-\tau_2}{1-\tau_1}\right)^\beta} \tag{2.10}$$

Из соотношений (2.6), (2.7), (2.10) определятся h, m, v_2 как функции от v_1, v_0, D, d. Из (2.4) найдем расход q через отверстие.

§ 3. Если канал бесконечно широкий, то $v_1 = v_2$. Из (2.10) и (2.6) найдем

$$\cos m = \left(\frac{\tau_1}{\tau_0}\right)^{1/2} = \frac{v_1}{v_0} \tag{3.1}$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{d}{h} = \pi\operatorname{ctg} m + \frac{\pi}{2}\sin m - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{4n^2-1}\cos 2mnx_n(\tau_0) -$$

$$-\left(\frac{1-\tau_0}{1-\tau_1}\right)^\beta\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{4n^2-1}\frac{Z_n(\tau_1)}{Z_n(\tau_0)}x_n(\tau_1) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}\frac{Z_n(\tau_1)}{Z_n(\tau_0)}\right] \tag{3.2}$$

Положив в (3.1) и (3.2) $v_1 = 0$, придем к случаю истечения газа из бесконечного осуда и получим формулу Чаплыгин [2]

$$\frac{\pi}{2}\frac{d}{h} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4n}{4n^2-1}x_n(\tau_0) \tag{3.3}$$

Если в (2.6), (2.7), (2.10) заменить τ через $v^2/v^2_{\max}$ и перейти к пределу при $v_{\max}\to\infty$, то получим соответствующие формулы для истечения из канала несжимаемой жидкости. Ряды в этом случае легко суммируются, и результат записывается в элементарных функциях.

Поступила 23 V 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф а л ь к о в и ч С. В. К теории газовых струй. ПММ, XXI, вып. 4, стр. 459—464, 1957.
2. Ч а п л ы г и н С. А. О газовых струях. ГИТТЛ. 1949.
3. C h e r r y T. M. Asymptotic Expansions for the Hypergeometric Functions Occuring in Gas-Flow Theory. Proceedings of the Royal Society of London, ser. A, vol. 202, 1950.