О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ПОЛИТРОПНОГО ГАЗА С ВЫРОЖДЕННЫМ ГОДОГРАФОМ

А. Ф. Сидоров

(Челябинск)

Рассмотрим нестационарное потенциальное течение газа, причем будем предполагать политропное уравнение состояния. В этом случае составляющие вектора скорости u_2, u_2, u_3 в декартовых прямоугольных координатах x_1, x_2, x_3 и квадрат скорости звука θ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \varkappa \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \qquad \left(\text{уравнения Эйлера}\right) \tag{1}$$

$$\varkappa \frac{\partial \theta}{\partial t} + \theta \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \varkappa \sum_k u_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = 0 \qquad \left(\text{уравнение неразрывности}\right)$$

$\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ (условие потенциальности).

Здесь $\varkappa = 1 / (\gamma - 1)$, а γ — показатель адиабаты. Бегущей волной ранга r называется решение системы (1), если ранг матрицы A

$$A = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial u_1}{\partial t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \theta}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \theta}{\partial x_3} & \dfrac{\partial \theta}{\partial t} \end{vmatrix} \tag{2}$$

равен r для данного решения [1]. А. А. Никольский при помощи введенной им «функции размещения» ∇ рассмотрел волны второго ранга

$$\nabla(u_1, u_2) = \sum_k u_k x_k - \varphi \tag{3}$$

где φ — потенциал скоростей, в случае потенциальных стационарных течений и получил дифференциальные уравнения для функций ∇ и ψ в предположении, что $u_3 = \psi(u_1, u_2)$. В работе О. С. Рыжова [2] рассмотрены двойные волны в случае потенциальных нестационарных течений. В работе [1] изучены двумерные двойные волны без предположения потенциальности течения.

В предлагаемой заметке рассматриваются тройные волны (волны ранга 3) в случае трехмерного потенциального нестационарного движения путем введения видоизмененной «функции размещения» $\nabla(u_1, u_2, u_3, t)$.

Рассмотрим вначале общий случай, когда имеет место зависимость $\theta = \theta(u_1, u_2, u_3)$ и u_1, u_2, u_3 функционально независимы; случай зависимости $u_3 = \psi(u_1, u_2)$ рассмотрен позднее.

В силу потенциальности движения имеет место интеграл Коши

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + \varkappa\theta = F(t) \tag{4}$$

где $F(t)$ — произвольная функция времени,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = u_i \qquad (i=1, 2, 3) \tag{5}$$

Введем далее функцию ∇ по формуле

$$\nabla = \sum_k x_k u_k - \varkappa t \theta - \varphi \tag{6}$$

и подсчитаем ее полный дифференциал

$$d\nabla = \sum_k (x_k - \varkappa t \theta_k)\, du_k - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varkappa\theta\right) dt, \qquad \theta_k = \frac{\partial \theta}{\partial u_k} \tag{7}$$

Таким образом, ∇ является функцией u_1, u_2, u_3, t и ее частные производные таковы:

$$\frac{\partial\nabla}{\partial u_i} = x_i - \varkappa t\theta_i, \qquad \frac{\partial\nabla}{\partial t} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varkappa\theta \tag{8}$$

Пользуясь формулой (4), второе равенство (8) можно записать в виде

$$\frac{\partial\nabla}{\partial t} = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - F(t) \tag{9}$$

Интегрируя (9) по t, получим

$$\nabla = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)\,t + \Phi(u_1, u_2, u_3) + F^\circ(t), \quad F^\circ(t) = -\int F(t)\,dt \tag{10}$$

где $\Phi(u_1, u_2, u_3)$ — некоторая, пока неопределенная функция.

Представим функцию $\Phi(u_1, u_2, u_3)$ в виде

$$\Phi(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + \varkappa\Pi(u_1, u_2, u_3) \tag{11}$$

и продифференцируем (10) по u_i; тогда первое равенство (8) можно представить в виде

$$x_i = \varkappa\Pi_i + u_i + t(\varkappa\theta_i + u_i), \qquad \Pi_i = \frac{\partial\Pi}{\partial u_i} \tag{12}$$

Уравнения движения Эйлера будут выполнены, если имеет место интеграл Коши и необходимо удовлетворить лишь уравнению неразрывности. Используя формулы

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \sum_k \theta_k \frac{\partial u_k}{\partial t}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial x_i} = \sum_k \theta_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \tag{13}$$

и подставляя $\dfrac{\partial u_k}{\partial t}$ из уравнений Эйлера, уравнение неразрывности приведем к виду

$$\sum_{ik} A_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0 \qquad (A_{ik} = \delta_{ik}\theta - \varkappa^2\theta_i\theta_k) \qquad (i, k=1, 2, 3) \tag{14}$$

Пусть в некоторой области изменения величин x_1, x_2, x_3, t

$$\Delta = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} \neq 0 \tag{15}$$

Тогда, выполняя преобразование годографа для троек переменных u_1, u_2, u_3 и x_1, x_2, x_3 соответственно, в уравнении (14) при фиксированном значении t будем иметь

$$\sum_{ik} A_{ik}L_{ik} = 0 \quad (i, k=1, 2, 3), \qquad L_{ik} = (-1)^{i+k}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_m}{\partial u_p} & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_p} \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_q} & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_q} \end{vmatrix} \begin{matrix} (m, n \neq k,\ m<n) \\ \\ (p, q \neq i,\ p<q) \end{matrix} \tag{16}$$

Из (12) находим

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_k} = \varkappa\Pi_{ik} + \delta_{ik} + t(\varkappa\theta_{ik} + \delta_{ik}), \; \Pi_{ik} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial u_i\,\partial u_k}, \quad \theta_{ik} = \frac{\partial^2\theta}{\partial u_i\,\partial u_k} \tag{17}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера.

В силу (17) уравнение (16) можно привести к виду

$$\Gamma_0 + \Gamma_1 t + \Gamma_2 t^2 = 0 \tag{18}$$

где $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ — функции лишь u_1, u_2, u_3.

Так как равенство (18) имеет место для произвольных значений t, заключаем

$$\Gamma_i = 0 \qquad (i=0, 1, 2) \tag{19}$$

причем выражения для Γ_i следующие:

$$\Gamma_j = \sum_{ik} A_{ik}L_{ik}^{\,j} \qquad (j=0, 1, 2)$$

где

$$L_{ik}{}^0 = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} \varkappa\Pi_{mp} + \delta_{mp} & \varkappa\Pi_{np} + \delta_{np} \\ \varkappa\Pi_{mq} + \delta_{mq} & \varkappa\Pi_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix}$$

$$L_{ik}{}^1 = (-1)^{i+k} \left\{ \begin{vmatrix} \varkappa\Pi_{mp} + \delta_{mp} & \varkappa\Pi_{np} + \delta_{np} \\ \varkappa\theta_{mq} + \delta_{mq} & \varkappa\theta_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varkappa\theta_{mp} + \delta_{np} & \varkappa\theta_{np} + \delta_{np} \\ \varkappa\Pi_{mq} + \delta_{mq} & \varkappa\Pi_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix} \right\}$$

$$L_{ik}{}^2 = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} \varkappa\theta_{mp} + \delta_{mp} & \varkappa\theta_{np} + \delta_{np} \\ \varkappa\theta_{mq} + \delta_{mq} & \varkappa\theta_{nq} + \delta_{nq} \end{vmatrix}$$

и во всех формулах $m,\ n \neq k,\ m < n;\ p,\ g \neq i,\ p < q$.

Уравнение $\Gamma_2 = 0$ представляет нелинейное уравнение в частных производных второго порядка для функции θ. Для него можно ставить задачу Коши или аналогично задаче, поставленной в [1], задачу Гурса с двумя произвольными функциями от двух переменных.

Не ставя конкретных газодинамических задач и не рассматривая в данной заметке вопросов единственности решений, отметим, что после нахождения функции θ система уравнений $\Gamma_0 = 0$ и $\Gamma_1 = 0$, в которую входит функция Π, всегда совместна и обладает, например, решением

$$\Pi = \theta + \sum_k c_k u_k + C \qquad (c_k = \text{const},\ C = \text{const}) \tag{20}$$

При решении конкретных газодинамических задач необходимо после определения функции θ найти функцию Π, удовлетворяющую обоим уравнениям $\Gamma_0 = 0$ и $\Gamma_1 = 0$ и конкретным условиям задачи для получения единственного решения.

Течение в пространстве x_1, x_2, x_3, t после определения функций Π и θ находится из равенств (8).

Отметим, что совершенно аналогичное применение метода в двумерном случае приводит к двум дифференциальным уравнениям для функций Φ и θ, совпадающих с уравнениями, полученными для этого случая в работе [1].

Перейдем к рассмотрению функциональной зависимости $u_3 = \psi(u_1, u_2)$. Введем, как и ранее, функцию ∇, но уже зависящую от t:

$$\nabla = \sum_k u_k x_k - \varphi \tag{21}$$

Подсчитывая ее полный дифференциал, находим, что ∇ является функцией $u_1,\ u_2,\ t$

$$\frac{\partial\nabla}{\partial u_i} = x_i + \psi_i x_3, \qquad \frac{\partial\nabla}{\partial t} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad \psi_i = \frac{\partial\psi}{\partial u_i} \ (i=1,\ 2) \tag{22}$$

Используя соотношение (4), а также соотношения

$$-\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial^2\nabla}{\partial t\, \partial x_i} \tag{23}$$

вытекающие из второго равенства (22), вычислим производные $\partial\theta / \partial x_i$, $\partial\theta / \partial t$, $\partial u_3 / \partial x_i$ и подставим их выражения в уравнение неразрывности. После этого оно примет вид:

$$R_0 + R_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + R_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + R_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + R_4 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \tag{24}$$

Здесь

$$R_0 = F'(t) + \frac{\partial^2\nabla}{\partial t^2}, \qquad R_1 = -\left(\frac{\partial^2\nabla}{\partial t\, \partial u_1} - \psi\psi_1 - u_1\right)^2 + \theta(1 + \psi_1^2) \tag{25}$$

$$R_2,\ R_3 = -2\left(\frac{\partial^2\nabla}{\partial t\, \partial u_1} - u_1 - \psi\psi_1\right)\left(\frac{\partial^2\nabla}{\partial t\, \partial u_2} - u_2 - \psi\psi_2\right) + 2\theta\psi_1\psi_2$$

$$R_4 = -\left(\frac{\partial^2\nabla}{\partial t\, \partial u_2} - u_2 - \psi\psi_2\right)^2 + \theta(1 + \psi_2^2)$$

$$0 = \frac{1}{\varkappa}\left[F(t) + \frac{\partial\nabla}{\partial t} - \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + \psi^2)\right]$$

В уравнении (24) сделаем преобразование годографа для пар переменных u_1, u_2 и x_1, x_2. Пусть в некоторой области

$$\Delta = \frac{D(x_1, x_2)}{D(u_1, u_2)} \neq 0$$

Случай $\Delta \equiv 0$ мы исключим из рассмотрения. Дифференцируя первое равенство (22) при фиксированных x_3, t по u_1, u_2, найдем выражения для $\partial x_i / \partial u_k$ $(i, k = 1, 2)$. Тогда после выполнения преобразований уравнение (24) можно привести к виду

$$T_0 + T_1 x_3 + T_2 x_3^2 = 0 \tag{26}$$

где T_0, T_1, T_2 — функции u_1, u_2, t.

В силу произвольности x_3 должны выполняться условия $T_i = 0$, $i = 0, 1, 2$, причем выражения для T_i следующие:

$$\begin{gathered} T_1 = -R_0\left(\frac{\partial^2\nabla}{\partial u_1^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial u_2^2} + \frac{\partial^2\nabla}{\partial u_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial u_1^2} - 2\frac{\partial^2\nabla}{\partial u_1\partial u_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial u_1\partial u_2}\right) - \\ - R_1\frac{\partial^2\psi}{\partial u_2^2} + (R_2 + R_3)\frac{\partial^2\psi}{\partial u_1\partial u_2} - R_4\frac{\partial^2\psi}{\partial u_1^2} = 0 \end{gathered} \tag{27}$$

$$T_0 = R_0\left[\frac{\partial^2\nabla}{\partial u_1^2}\frac{\partial^2\nabla}{\partial u_2^2} - \left(\frac{\partial^2\nabla}{\partial u_1\partial u_2}\right)^2\right] + R_1\frac{\partial^2\nabla}{\partial u_2^2} - (R_2 + R_3)\frac{\partial^2\nabla}{\partial u_1\partial u_2} + R_4\frac{\partial^2\nabla}{\partial u_1^2} = 0$$

$$T_2 = R_0\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial u_1^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial u_2^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u_1\partial u_2}\right)^2\right] = 0 \tag{28}$$

Уравнение (28) допускает две возможности. Рассмотрим первый случай:

$$R_0 = F'(t) + \frac{\partial^2\nabla}{\partial t^2} = 0$$

Отсюда

$$F(t) + \frac{\partial\nabla}{\partial t} = \Lambda(u_1, u_2), \qquad \nabla = \Lambda(u_1, u_2)\,t + \chi(u_1, u_2) - \int F(t)\,dt \tag{29}$$

где Λ и χ — некоторые функции.

Уравнения (27) дадут в этом случае три уравнения второго порядка для ψ, Λ и χ, совпадающие с системой, полученной в работе [2] и описывающей двойные волны.

Рассмотрим второй случай:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u_1^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial u_2^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u_1\partial u_2}\right)^2 = 0 \tag{30}$$

Уравнение (30) представляет уравнение развертывающихся поверхностей, за исключением лишь цилиндрических поверхностей вида $f(u_1, u_2) = \mathrm{const}$. В этом случае $\nabla(u_1, u_2, t)$ должна удовлетворять уравнениям (27) и необходимо, вообще говоря, исследовать их совместность при выбранной ψ.

Приведем пример, когда эти два уравнения оказываются совместными и получаются новые течения. Действительно, рассмотрим течение с

$$\psi = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 \qquad (\alpha_i = \mathrm{const})$$

Уравнение $T_1 = 0$ для такой ψ выполняется автоматически. Для $\nabla(u_1, u_2, t)$ остается одно уравнение $T_0 = 0$, в коэффициентах которого $\psi_1 = \alpha_1$, $\psi_2 = \alpha_2$.

Отметим еще, что все рассмотренные течения имеют прямолинейные характеристики в пространстве x_1, x_2, x_3, t, как это следует из формул (8) и (22).

В заключение приношу благодарность моему научному руководителю Н. Н. Яненко за ценные критические замечания.

Поступила 8 VIII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Погодин Ю. А., Сучков В. А., Яненко Н. Н. О бегущих волнах уравнений газовой динамики, ДАН СССР, т. CXIX, № 3, 1958
2. Рыжов О. С. О течениях с вырожденным годографом. ПММ, т. XXI, вып. 4, 1957.