

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИМИСЯ ПО СТЕПЕННОМУ ЗАКОНУ ПО ПОКОЯЩЕМУСЯ ГАЗУ

Г. Л. Гродзовский, Н. Л. Крашенинникова

(Москва)

Задача об одномерном неустановившемся движении газа, как известно, сводится к интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных. Л. И. Седовым [1] показано, что когда среди определяющих параметров задачи, кроме линейной координаты r и времени t , имеются лишь два постоянных параметра с независимыми размерностями, уравнения в частных производных могут быть заменены обыкновенными дифференциальными уравнениями, что соответствует автомодельным движениям газа.

Один из примеров такого автомодельного движения имеет место при расширении поршня радиуса r по закону $r = Ct^m$ в газе с начальной плотностью ρ_1 и нулевым начальным давлением $p_1 = 0$ (условие $p_1 = 0$ соответствует бесконечно большому перепаду давления на ударной волне, вызываемой движением поршня).

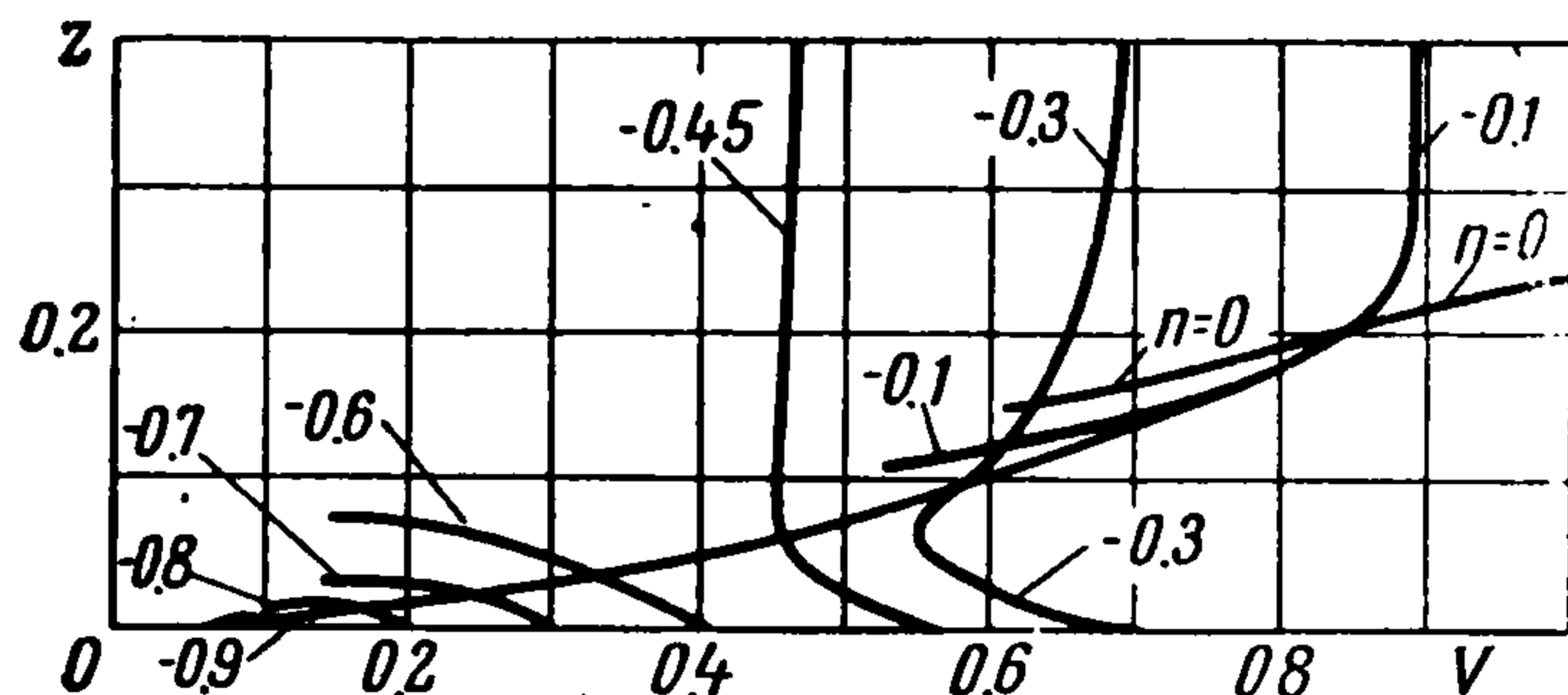
Расчеты таких течений приведены в работах [2, 3, 4]. В работе [5] установлено, что автомодельные течения имеют место [только в определенной области значений показателя степени m , в частности при $m > 2 / (2 + \nu)$, где $\nu = 1, 2, 3$ соответственно для плоской цилиндрической и сферической симметрии. Ниже рассматривается более общий класс автомодельных движений.

Рассмотрим автомодельные движения газа с ударными волнами, распространяющимися по покоящемуся газу по степенному закону

$$D = Ct^n \quad (\rho_1 = \text{const}, \quad p_1 = 0) \quad (1)$$

где D — скорость движения ударной волны.

Этот класс движений объединяет как расходящиеся, так и сходящиеся течения; примером сходящегося течения является движение при



Фиг. 1

сильном периферийном взрыве [6]:

$$D \sim t^{\frac{-\nu}{2+\nu}} \quad \text{при } t < 0 \quad (2)$$

Из определяющих параметров задачи можно составить лишь одну безразмерную комбинацию:

$$\lambda = \frac{Ct^{n+1}}{r} \quad (3)$$

При использовании безразмерных функций, определяемых формулами

$$v = \frac{r}{t} V(\lambda), \quad \rho = \rho_1 R(\lambda), \quad p = \frac{\rho_1 r^2}{t^2} P(\lambda), \quad z = \frac{xP}{R} \quad (4)$$

имеем систему уравнений [2]

$$\frac{dz}{dV} = z \frac{[2(V-1) + v(x-1)V](V-n-1)^2 - (x-1)V(V-1)(V-n-1) - [2(V-1) - 2n(x-1)/x]z}{(V-n-1)[V(V-1)(V-n-1) - (2n/x + vV)z]} \quad (5)$$

$$\frac{d \ln \lambda}{dV} = \frac{(V-n-1)^2 - z}{V(V-1)(V-n-1) - (2n/x + vV)z} \quad (6)$$

$$\frac{d \ln R}{d \ln \lambda} (V-n-1) = \frac{V(V-1)(V-n-1) - (2n/x + vV)z}{z - (V-n-1)^2} + vV \quad (7)$$

Решение задачи определяется интегрированием системы уравнений (5) — (7) при начальных условиях за ударной волной

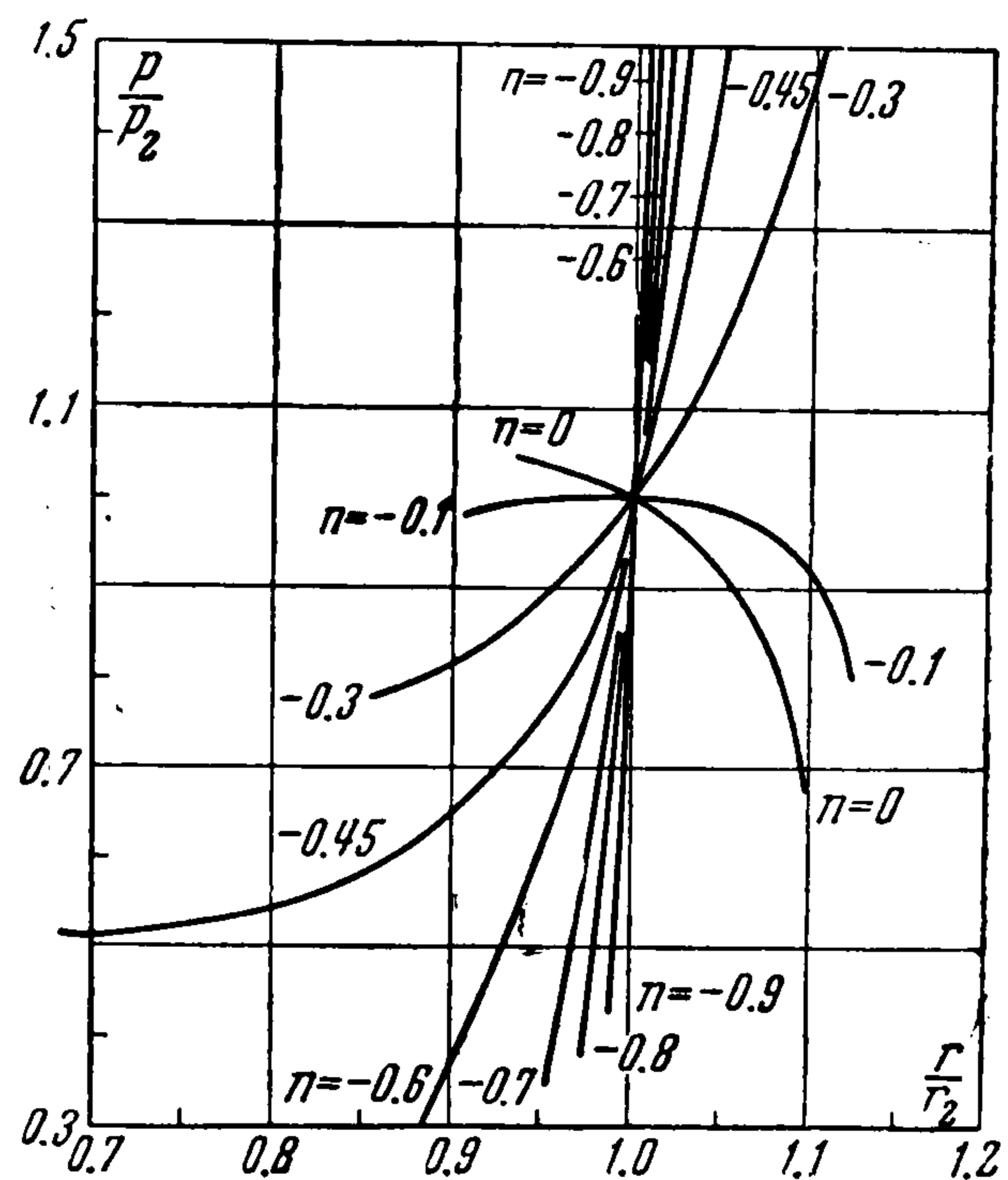
$$p_2 = \frac{2}{x+1} \rho_1 D^2 = \frac{2}{x+1} \rho_1 C^2 t^{2n}, \quad v_2 = \frac{2}{x+1} D = \frac{2}{x+1} C t^n, \quad \rho_2 = \frac{x+1}{x-1} \rho_1 \quad (8)$$

$$r_2 = \int D dt = \frac{1}{n+1} C t^{n+1}, \quad \lambda_2 = \frac{C t^{n+1}}{r_2} = n+1, \quad V_2 = \frac{v_2}{r_2} t = 2 \frac{n+1}{x+1} \quad (9)$$

$$R_2 = \frac{p_2}{\rho_1} = \frac{x+1}{x-1}, \quad P_2 = \frac{p_2 t^2}{\rho_1 r_2^2} = \frac{2}{x+1} (n+1)^2, \quad z_2 = \frac{x P_2}{R_2} = \frac{2x(x-1)}{(x+1)^2} (n+1)^2$$

$$\text{на поршне } V_1 = n+1 \quad (10)$$

Пример поля интегральных кривых в плоскости V, z при $v = 2$ и $-1 \leq n \leq 0$ приведен на фиг. 1. Расчеты этих течений были проведены на электронной машине «Стрела». Решения располагаются по обе стороны от кривой (V_2, z_2) , соответствующей параметрам потока за ударной волной; вверх уходят ветви, соответствующие расходящимся течениям, вниз — сходящимся. Расходящиеся течения при $n > -0.5$ соответствуют расширению поршня по степенному закону. При $n = -0.5$ — это течение при сильном центральном или периферийном взрыве. Остальные течения ограничены в плоскости V, z кривой, на которой параметр λ достигает экстремальных значений. Поля давления, плотности и скорости для указанных течений приведены на фиг. 2, 3 и 4. Кривые, направленные вправо, соответствуют сходящимся течениям, направленные влево — расходящимся.



Фиг. 2

Рассмотрим некоторые приложения полученных результатов. Согласно закону подобия при больших сверхзвуковых скоростях и стабилизации коэффициента сопротивления [7] для тел подобной формы произведение коэффициента волнового сопротивления на квадрат удлинения является постоянной величиной:

$$C_x L^2 = C^* = \text{const} \quad (11)$$

Значения постоянной C^* (не зависящей от числа Маха) удобно определять из расчета обтекания тонкого тела при $M \rightarrow \infty$, для чего можно воспользоваться известной аналогией с неустановившимся движением.

Данные фиг. 2—4 позволяют определить коэффициенты волнового сопротивления тел вращения, при обтекании которых образуется ударная волна степенной формы.

Для тонкого тела при $M \rightarrow \infty$ относительное давление за ударной волной

$$p^0 = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty v_\infty^2} = \frac{4}{\kappa + 1} \varepsilon^2 \quad (12)$$

где ε — местный угол наклона фронта ударной волны, связанный с местным углом наклона контура тела соотношением

$$\frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{r_0}{r_2} = r_{20} \quad (13)$$

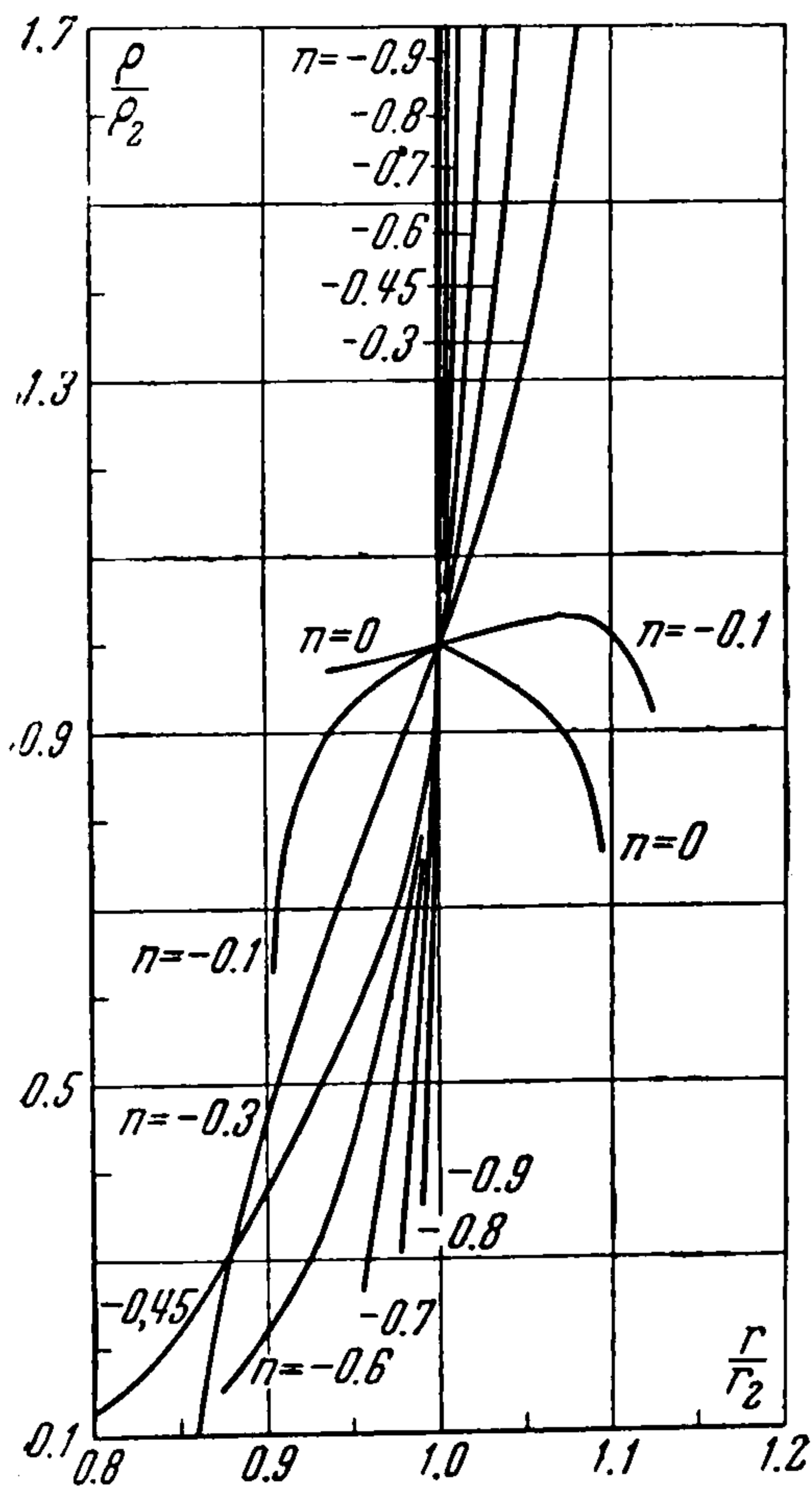
где r_0 — радиус контура тела. Местное относительное давление на контуре тела

$$p_i^0 = \frac{4}{\kappa + 1} \frac{\omega^2 p_{20}}{r_{20}^2} \quad (14)$$

Соответственно коэффициент волнового сопротивления определяется по формуле

$$C_x = \int_{r_*}^1 p_i^0 d(r^2) = \frac{8}{\kappa + 1} \frac{p_{20} (n + 1)^2}{r_{20}^2 L^2} \int_{r_*}^1 r^\mu dr$$

$$\left(\mu = \frac{3n + 2}{n + 1} \right)$$



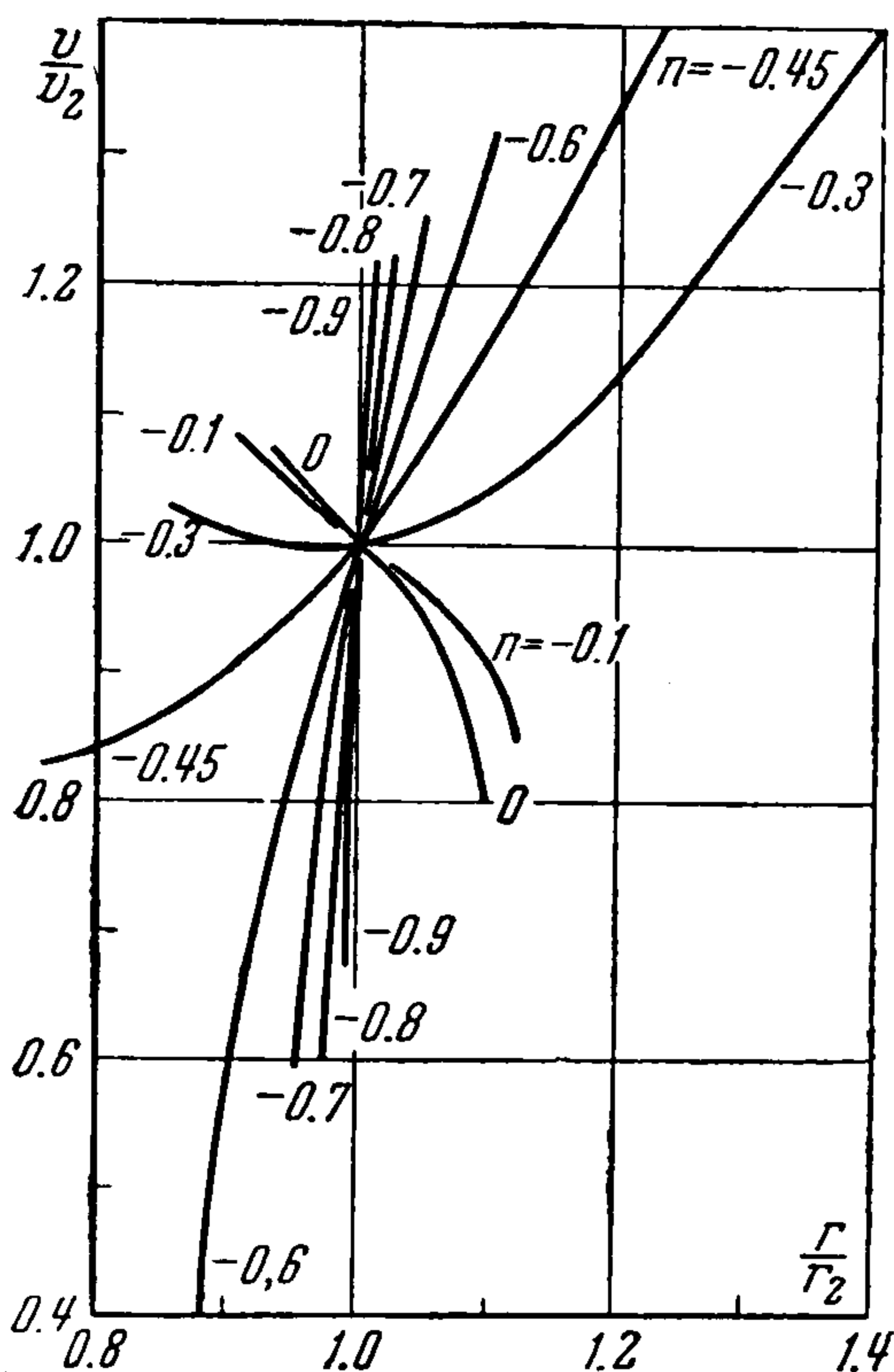
Фиг. 3

Здесь L — удлинение, отнесенное к радиусу миделя.

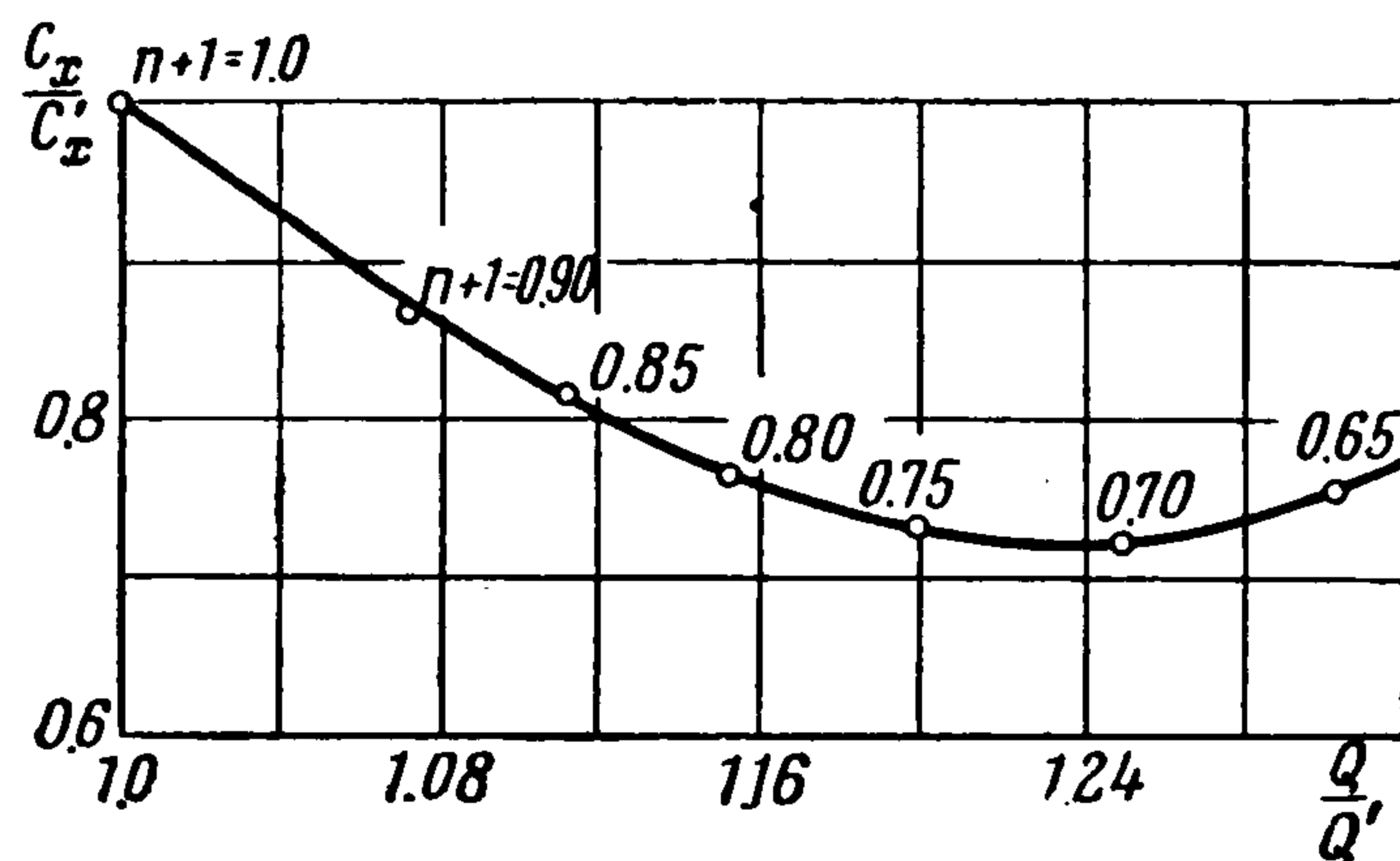
Осесимметричное расходящееся течение при $-0,5 < n \leq 0$ соответствует обтеканию тел вращения степенной формы.

Значения p_{20} , r_{20} и $C_x L^2$ для этого случая приведены в таблице.

Эти данные показывают, что для больших сверхзвуковых скоростей при $\kappa = 1.4$ наименьшее волновое сопротивление из тел



Фиг. 4



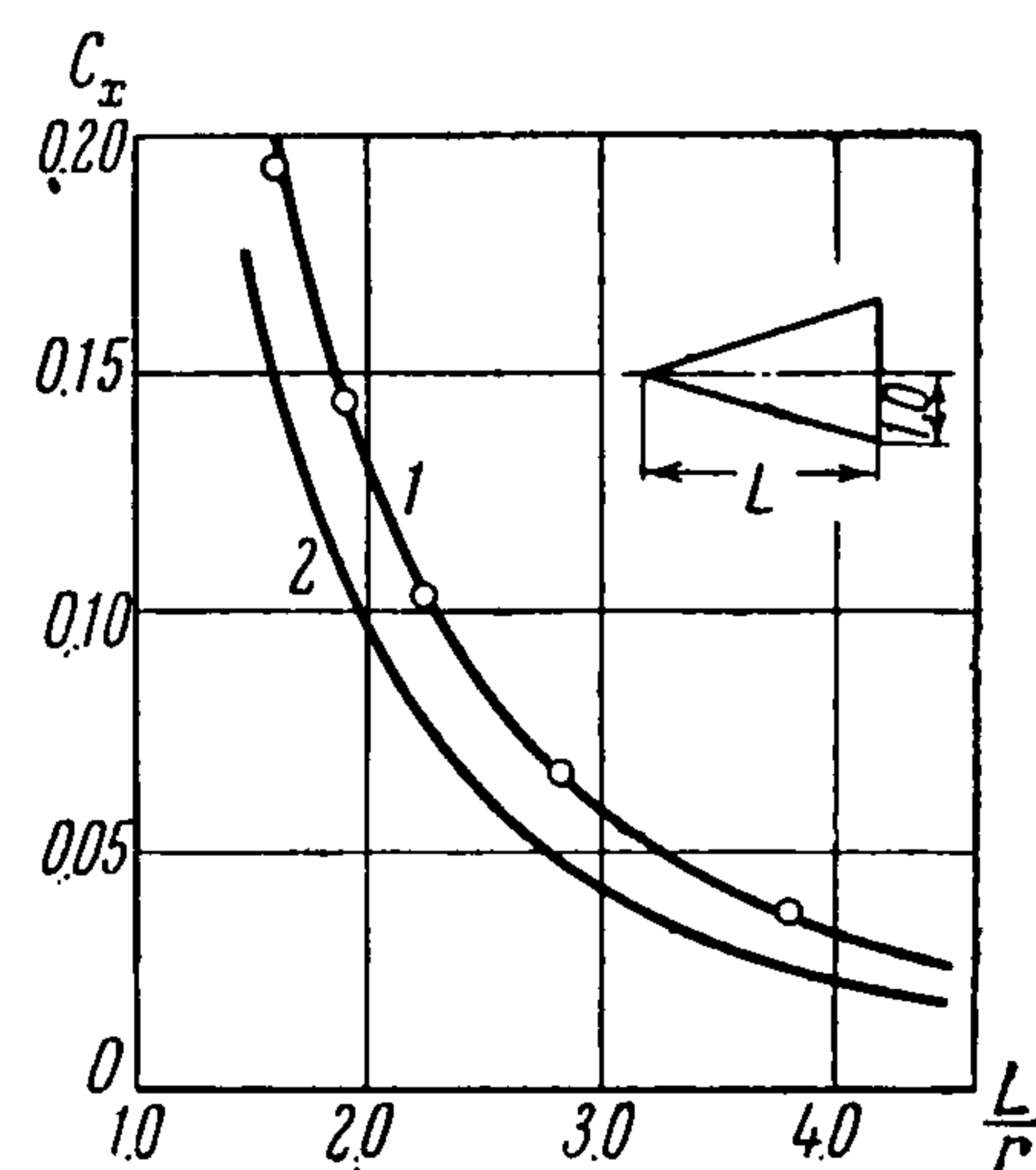
Фиг. 5

вращения степенной формы имеет тело $r = Cx^{0.70}$. Следовательно, при $\kappa = 1.4$ оптимальная форма тела вращения при больших числах Маха будет более полной, чем ньютоновская форма $r = Cx^{0.75}$. Оптимальная форма имеет волновое сопротивление на 27% меньше, чем у конуса с таким же удлинением.

n	0	-0.1	-0.15	-0.2	-0.25	-0.3	-0.35	-0.4	-0.45
p_{20}	1.0497	0.983	0.942	0.891	0.836	0.78	0.713	0.6177	0.5121
r_{20}	0.9149	0.9053	0.8977	0.8888	0.8751	0.8567	0.8293	0.7771	0.6648
$C_x L^2$	2.091	1.822	1.71	1.604	1.533	1.517	1.583	1.8411	3.213

Изменение коэффициента волнового сопротивления тел вращения степенной формы C_x в зависимости от относительного объема Q приведено на фиг. 5, где объем тела и коэффициент волнового сопротивления C_x отнесены к соответствующим значениям C_x' и Q' для конического тела.

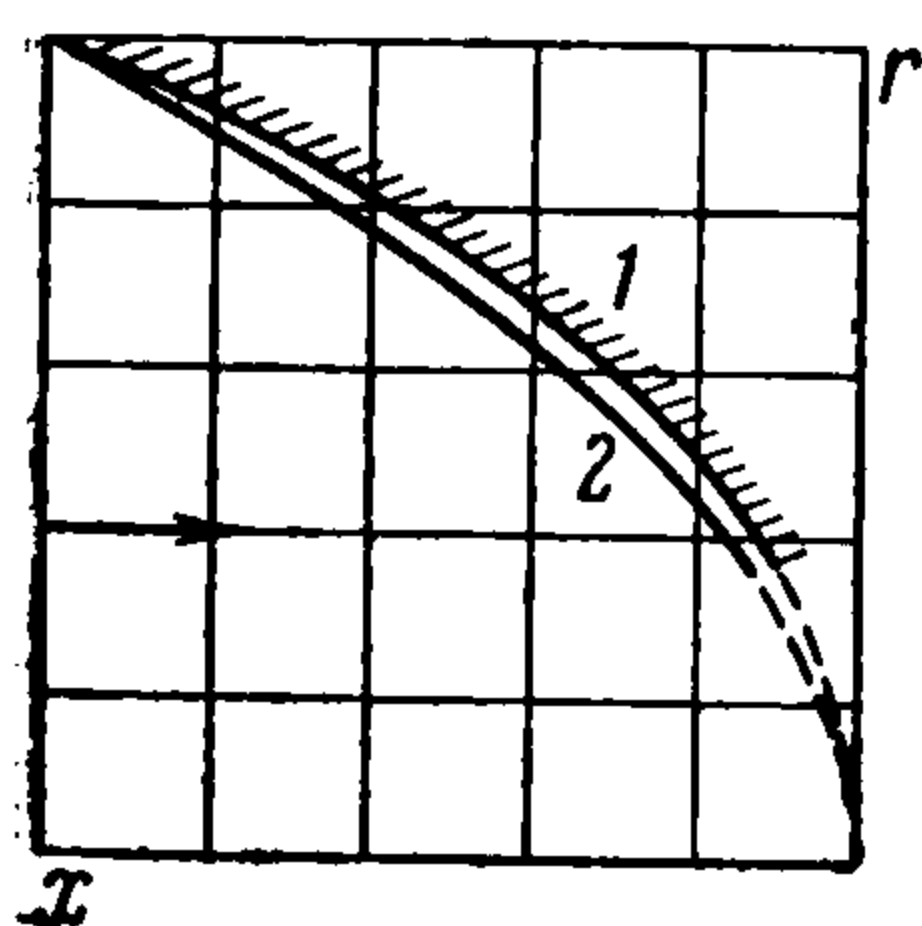
На фиг. 6 результаты расчета обтекания конусов по изложенному методу (кривая 1) сопоставлены с результатами обычного метода конических течений при $M = 10,94$ (отмечены точками). Кривая 2 соответствует обтеканию тела $r = Cx^{0.7}$.



Фиг. 6

Рассмотренный пример охватывает практически оптимальные по волновому сопротивлению формы носовых частей тел вращения при больших сверхзвуковых скоростях. Следует также отметить благоприятное по теплопередаче распределение поля плотностей и давлений по контуру рассмотренных тел.

Аналогично могут быть использованы и другие рассмотренные случаи течений со степенными ударными волнами (фиг. 2, 3, 4). Так, осесимметричные расходящиеся течения при $n < -0.5$ соответствуют внешнему обтеканию тел с протоком.



Фиг. 7

Сходящиеся течения могут быть использованы для определения внутреннего течения при обтекании соответствующего тела вращения с протоком. В качестве примера на фиг. 7 приведен контур протока тела, вызывающий параболическую ударную волну $x = kr^2$ (1 — контур тела, 2 — ударная волна). Существенно, что в таких течениях потери энтропии имеют место только в параболической ударной волне, а за нею поток сжимается адиабатически (см. выше поле давлений на фиг. 2).

Авторы приносят благодарность В. А. Чепрасову за помощь при расчете.

Поступила 22 V 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. ГИТТЛ, 4 изд. 1957.
2. К р а ш е н и н н и к о в а Н. Л., О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем. Изв. АН СССР, ОТН, № 8, 1955.
3. Г р о д з о в с к и й Г. Л. Некоторые особенности обтекания тел при больших сверхзвуковых скоростях Изв. АН СССР, ОТН, № 6, 1957.
4. Г р о д з о в с к и й Г. Л., Полезная интерференция крыла и фюзеляжа при гиперзвуковых скоростях. Изв. АН СССР, ОТН, № 1, 1959.
5. Г р и г о р я н С. С., Задача Коши и задача о поршне для одномерных неустановившихся движений газа (автомодельные движения). ПММ, т. 22, вып. 2, 1958.
6. Г р о д з о в с к и й Г. Л. Автомодельное движение газа при сильном периферийном взрыве. Докл. АН СССР, т. 3, № 5, 1956.
7. T s i e n Н. Similarity laws of hypersonic flows. J. Math. Phys., XXV, 3, 1946.