Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОГО МАТЕРИАЛА МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

А. И. Сафрончик

(Саратов)

Течение некоторых материалов, как например, торфомасс, полиграфских красок, битумов, цементных и глинистых растворов достаточно хорошо описывается уравнением (1.1).

В настоящее время получены решения многих задач стационарного вязко-пластичного течения [1, 2, 3]. Нестационарные задачи изучены слабо, в литературе имеются лишь приближенные решения подобного рода задач [4,5]. В настоящей работе дается точное решение одной нестационарной задачи для одномерного вязко-пластичного течения. Распределение скоростей и закон изменения «ядра» течения находятся методом И. И. Колоднера [6]. В качестве иллюстрации рассматривается течение при постоянном перепаде давления.

§ 1. Под вязко-пластичным материалом обычно понимают материал, подчиняющийся закону Бингама, который для одномерного потока имеет вид

$$\tau - \tau_0 = \pm \mu \frac{\partial v}{\partial n} \tag{1.1}$$

Здесь τ — касательное напряжение, τ_0 — предельное напряжение сдви а (предел текучести), μ — коэффициент вязкости, n — нормаль к направлению скорости; знак μ совпадает со знаком $\partial v / \partial n$.

Рассмотрим течение вязко-пластичного материала между двумя бесконечными параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии $2h$ одна от другой, под действием заданного перепада давления в направлении x. Система координат выбрана так, что плоскость xz совпадает с плоскостью симметрии потока, а ось y перпендикулярна к ней. В этом случае уравнения движения будут иметь вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y} \tag{1.2}$$

$$v_y = v_z = 0, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0; \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{1.3}$$

Из (1.2) и (1.3) непосредственно следует, что $v_x = v_x(y, t)$ и $\partial p / \partial x = P(t)$. Материал предполагается несжимаемым ($\rho = \text{const}$). Перепад давления является заданной функцией времени, а для определения единственной отличной от нуля компоненты скорости v_x имеем уравнение (1.2). К последнему надо присоединить начальное и граничные условия.

Вязко-пластичный материал обладает тем свойством, что течение возникает лишь в областях, где $\tau > \tau_0$, при $\tau \leqslant \tau_0$ материал ведет себя, как упругое тело. Упругие области в дальнейшем будем называть «ядром» течения. Очевидно, что максимальное напряжение возникает около стенок, где материал ведет себя, как вязкая жидкость и, следовательно, выполняется условие прилипания

$$v_x(h, t) = v_x(-h, t) = 0. \tag{1.4}$$

В случае неустановившегося течения «ядро» является функцией времени; она должна быть определена как часть решения. Чтобы задача была корректной, необходимо задать два условия на искомом «ядре». Первое условие получается из самого определения «ядра». Так как на его границах $y = \pm y_0(t)$ имеем $\tau = \tau_0$, то

$$\partial v_x / \partial y = 0 \qquad \text{при} \qquad y = \pm y_0(t) \tag{1.5}$$

Найдем второе условие на «ядре». «Ядро» можно рассматривать как тело переменной массы, которая меняется с изменением площади поперечного сечения. Применяя закон «сохранения количества движения» в дифференциальной форме к массе «ядра», имеющей объем единичной длины и ширины, а высотой в $2y_0(t)$; получим

$$m\frac{dv_0}{dt} = F + (v_0 - v_1)\frac{dm}{dt} \tag{1.6}$$

где m — масса «ядра», v_0 — его скорость, v_1 — скорость отделяющихся (присоединяющихся) частиц, F — поверхностные силы.

В рассматриваемом случае частицы отделяются (присоединяются) без удара, т. е.

$$v_0 = v_1, \qquad m\frac{dv_0}{dt} = F \tag{1.7}$$

или более подробно

$$\frac{dv_0}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{dx} - \frac{\tau_0}{\rho y_0(t)} \tag{1.8}$$

Интегрируя (1.8) по t, получим

$$v_0(t) = v_0(0) - \frac{1}{\rho}\int_0^t \left[\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\tau_0}{y_0(\sigma)}\right] d\sigma \tag{1.9}$$

Начальное распределение скоростей задается в виде

$$v_x(y, 0) = \begin{cases} F(y) & \text{при} \quad y_0(0) < y < h, \; -h < y < -y_0(0) \\ F[y_0(0)] & \text{при} \; -y_0(0) \leqslant y \leqslant y_0(0) \end{cases} \tag{1.10}$$

Так как поток имеет плоскость симметрии, то можно решать задачу только для одной области, например $\{y_0(t) < y < h, \quad t > 0\}$, решение в другой области получится заменой знака у переменной y и у $y_0(t)$.

Вводя безразмерное время $\xi = (\nu / h^2)\, t$, безразмерную координату $\eta = y / h$ и безразмерную скорость

$$u(\eta, \xi) = \frac{\mu l}{p_0 h} v_x(y, t)$$

где p_0 / l — характерный перепад давления на единицу длины, приведем уравнение и краевые условия к безразмерному виду

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - P_*(\xi), \qquad P_*(\xi) = \frac{l}{p_0} P(t) \tag{1.11}$$

$$u(1, \xi) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \delta(\xi) = \frac{y_0(t)}{h} \tag{1.12}$$

Второе условие на «ядре» перейдет в

$$u_0(\xi) = u_0(0) - \int_0^\xi \left[P_*(\sigma) + \frac{S}{\delta(\sigma)}\right] d\sigma \qquad \left(S = \frac{\tau_0 l}{p_0 h}\right) \tag{1.13}$$

где S — безразмерный параметр. При $S = 0$ материал переходит в вязкую жидкость. Начальное условие будет иметь вид

$$u(\eta, 0) = \frac{\mu l}{p h^2} F(y) = F_*(\eta) \qquad (\delta_0 \leqslant \eta \leqslant 1) \tag{1.14}$$

$$u_0(0) = F_*(\delta_0) \qquad (0 \leqslant \eta \leqslant \delta_0) \qquad \left(\delta_0 = \delta(0) = \frac{y_0(0)}{h}\right) \tag{1.15}$$

Здесь $y(0)$ — половина начальной ширины «ядра».

§ 2. Для решения краевой задачи «с искомой границей» воспользуемся методом аналитического продолжения [6, 7], который позволяет найти уравнение для «ядра», без знания профиля скоростей всего течения. Отметим, что сформулированная выше задача является усложненным вариантом классической задачи Стефана.

В дальнейшем граничные и начальное условия понимаются как предельные, т. е.

$$\lim u(\eta, \xi) = 0 \quad \text{при } \eta \to 1 - 0 \quad (\xi > 0) \tag{2.1}$$

$$\lim u(\eta, \xi) = F_*(\delta_0) - \int_0^\xi \left[P_*(\sigma) + \frac{S}{\delta(\sigma)}\right] d\sigma \quad \text{при } \eta \to \delta(\xi) + 0 \quad (\xi > 0) \tag{2.2}$$

$$\lim \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta \to \delta(\xi) + 0 \quad (\xi > 0) \tag{2.3}$$

$$\lim u(\eta, \xi) = F_*(\eta) \quad \text{при } \xi \to +0 \quad (\delta_0 < \eta < 1) \tag{2.4}$$

Решение будем искать в виде

$$u(\eta, \xi) = w(\eta, \xi) + \lambda(\xi, \eta) - \int_0^\xi P_*(\sigma)\, d\sigma \tag{2.5}$$

где функции $w(\eta, \xi)$ и $\lambda(\xi, \eta)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \eta^2}$$

Потребуем, чтобы функция $w(\eta, \xi)$ удовлетворяла условию

$$\lim w(\eta, \xi) = F_*(\eta) \qquad \text{при } \xi \to +0 \tag{2.6}$$

Тогда функция $\lambda(\eta, \xi)$ будет иметь нулевое начальное условие. Для нахождения функции $w(\eta, \xi)$ необходимо выяснить свойства $F_*(\eta)$. Поскольку $F_*(\eta)$ дает начальное распределение скоростей, ее можно считать непрерывной и дифференцируемой.

В интервале ($\delta_0 \leqslant \eta \leqslant 1$) функция $F_*(\eta)$ изменяется от $F_*(1) = 0$ (условие прилипания) до максимального значения $F_*(\delta_0)$ на границе «ядра»; производная $F_*'(\eta)$ ограничена, так как с точностью до постоянного множителя дает распределение касательных напряжений. Предположим также, что она в интервале ($\delta_0 \leqslant \eta \leqslant 1$) удовлетворяет условию Липшица

$$|F_*(\eta) - F_*(\sigma)| < A|\eta - \sigma|$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(\eta) = \begin{cases} F_*(\eta) & (\delta_0 < \eta \leqslant 1) \\ F_*(\delta_0) & (-\infty < \eta \leqslant \delta_0) \end{cases}$$

Очевидно, что $\Phi(\eta)$ непрерывна, дифференцируема, а ее производная ограничена и удовлетворяет условию Липшица в интервале ($-\infty < \eta \leqslant 1$).

В качестве функции $w(\eta, \xi)$ возьмем

$$w(\eta, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{1} \Phi(\sigma) \exp\left\{-\frac{(\eta-\sigma)^2}{4\xi}\right\} \frac{d\sigma}{\sqrt{\xi}} \tag{2.7}$$

Эта функция является регулярным решением уравнения теплопроводности. Выполнив подстановку $\sigma = \eta + 2\sqrt{\xi}\,\beta$ под знаком интеграла, легко показать, что для всех внутренних точек интервала ($-\infty < \eta \leqslant 1$)

$$\lim_{\xi \to +0} w(\eta, \xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\xi \to +0} \int_{-\infty}^{\eta^*} \Phi(\eta + 2\sqrt{\xi}\,\beta) e^{-\beta^2} d\beta = \Phi(\eta)$$

$$\left(\eta^* = \frac{1-\eta}{2\sqrt{\xi}}\right) \tag{2.8}$$

В точке $M(1,0)$ предел существенным образом зависит от пути подхода к этой точке. При подходе по прямой $\eta = 1$ этот предел равен $\frac{1}{2}\Phi(1) = 0$.

Для функции $\lambda(\eta, \xi)$ будем иметь следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\xi} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial\eta^2} \qquad \begin{pmatrix} \delta(\xi) < \eta < 1 \\ 0 < \xi \leqslant \xi_0 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$\lim_{\eta\to 1-0} \lambda(\eta, \xi) = \int_0^\xi P_*(\sigma)\,d\sigma - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{1} \Phi(\sigma) \exp\left\{-\frac{[1-\sigma]^2}{4\xi}\right\} \frac{d\sigma}{\sqrt{\xi}} = f(\xi) \tag{2.10}$$

$$\lim_{\eta\to \delta(\xi)+0} \lambda(\eta, \xi) = F_*(\delta_0) - S\int_0^\xi \frac{d\sigma}{\delta(\sigma)} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{1} \Phi(\sigma) \exp\left\{-\frac{[\delta(\xi)-\sigma]^2}{4\xi}\right\} \frac{d\sigma}{\sqrt{\xi}} = \varphi(\xi) \tag{2.11}$$

$$\lim_{\eta\to \delta(\xi)+0} \frac{\partial\lambda}{\partial\eta} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{1} \Phi(\sigma) \frac{\delta(\xi)-\sigma}{\xi^{3/2}} \exp\left\{-\frac{[\delta(\xi)-\sigma]^2}{4\xi}\right\} d\sigma = \Psi(\xi) \tag{2.12}$$

$$\lim_{\xi\to +0} \lambda(\eta, \xi) = 0 \tag{2.13}$$

Функция $f(\xi)$ непрерывна и дифференцируема для всех $\xi > 0$. Значение $f(0)$ равно нулю. Производная $f'(\xi)$ может иметь конечное число разрывов первого рода и имеет особенность при $\xi=0$. Установим характер этой особенности (2.14)

$$|f'(\xi)|\leqslant|P_*(\xi)|+\frac{1}{\sqrt{\pi\xi}}\int_{-\infty}^{1}|\Phi'(1+2\sqrt{\xi}\beta)||\beta|\exp(-\beta^2)d\beta<A+\frac{B}{\sqrt{\xi}}$$

Функция $\varphi(\xi)$ непрерывна и дифференцируема для всех $\xi>0$. При $\xi=0$ имеет нулевое значение. Для выяснения свойств производной $\varphi'(\xi)$ необходимо наложить некоторые ограничения на функцию $\delta(\xi)$. В дальнейшем будем предполагать $\delta(\xi)$ ограниченной, непрерывно-дифференцируемой и нигде не обращающейся в нуль функцией. Кроме того, потребуем, чтобы

$$|\delta'(\xi)|\leqslant\frac{C}{\sqrt{\xi}} \qquad (2.15)$$

Знак равенства соответствует всем известным до сих пор решениям, полученным в явном виде.

Вводя новую переменную интегрирования и дифференцируя (2.11) по ξ, получим

$$\varphi'(\xi)=-\frac{S}{\delta(\xi)}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\delta^*(\xi)}\Phi'(1+2\sqrt{\xi}\beta)\left[\delta'(\xi)+\frac{\beta}{\sqrt{\xi}}\right]\exp(-\beta^2)\,d\beta$$

$$\left(\delta^*(\xi)=\frac{1-\delta(\xi)}{2\sqrt{\xi}}\right) \qquad (2.16)$$

Оценка производной по абсолютной величине дает

$$|\varphi'(\xi)|\leqslant a+\frac{b}{\sqrt{\xi}} \qquad (2.17)$$

Функция $\Psi(\xi)$ непрерывна, ограничена и удовлетворяет условию Липшица в интервале $(0<\xi\leqslant\xi_0)$

$$|\Psi(\xi)-\Psi(\sigma)|<A|\xi-\sigma| \qquad (2.18)$$

Непрерывность и ограниченность очевидны, а условие (2.18) вытекает из дифференцируемости $\delta(\xi)$ и условия Липшица для функции $\Phi'(\eta)$:

$$|\Psi(\xi)-\Psi(\sigma)|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\delta^*(\xi)}|\Phi'[\delta(\xi)+2\sqrt{\xi}\beta]-\Phi'[\delta(\sigma)+2\sqrt{\sigma}\beta]|e^{-\beta^2}d\beta+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\delta^*(\xi)}^{\delta^*(\sigma)}|\Phi'(\delta(\sigma)+2\sqrt{\sigma}\beta)|e^{-\beta^2}d\beta\leqslant A_1|\xi-\sigma|+A_2|\xi-\sigma|=A|\xi-\sigma|$$

Теперь можно приступить к построению решения. Обозначим область $\{\delta(\xi)<\eta<1,\ 0<\xi\leqslant\xi_0\}$, в которой ищется решение, через D_+. Пусть $D_-\{-\infty<\eta<\delta(\xi),\ 0<\xi\leqslant\xi_0\}$ будет дополнительной областью к D_+. Распространим определение решения в область D_-, полагая $\lambda(\eta,\xi)\equiv0$ для $Q(\eta,\xi)\in D_-$. При таком определении $\lambda(\eta,\xi)$ будет удовлетворять всем поставленным условиям. Для построения такой функции $\lambda(\eta,\xi)$ рассмотрим следующую задачу.

Пусть $\overline{D}$ будет замыканием областей D_- и D_+ в множестве

$$E\{-\infty<\eta\leqslant1,0<\xi\leqslant\xi_0,|\eta-\delta_0|+|\xi|>0\}$$

а D является внутренностью $\overline{D}$. Очевидно, что ни D, ни $\overline{D}$ не зависят от $\delta(\xi)$. Определим теперь

$$\lambda_{\pm}(\eta, \xi) = \lim \lambda(Q) \quad \text{при } Q \to M(\eta, \xi) \quad (Q \in D_{\pm})$$

Найдем решение (2.9) в области D, удовлетворяющее условиям (2.10) и (2.13), а также двум условиям скачка на произвольной кривой $\eta = \delta(\xi)$

$$\lim_{\eta \to \delta(\xi)+0} \lambda(\eta, \xi) - \lim_{\eta \to \delta(\xi)-0} \lambda(\eta, \xi) = \varphi(\xi), \quad \lim_{\eta \to \delta(\xi)+0} \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} - \lim_{\eta \to \delta(\xi)-0} \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} = \Psi(\xi) \tag{2.19}$$

Потребуем также, чтобы

$$\lambda(-\infty, \xi) = 0, \qquad |\lambda_{\pm}(\eta, \xi)| < A, \qquad \left|\frac{\partial \lambda_{\pm}(\lambda, \xi)}{\partial \eta}\right| < B \tag{2.20}$$

Ниже будет показано, что такая задача имеет и притом единственное решение. Решение будем искать в виде

$$\lambda(\eta, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \frac{f(\sigma)(1-\eta)}{(\xi-\sigma)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(1-\eta)^2}{4(\xi-\sigma)}\right] d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \frac{\varphi(\sigma)}{(\xi-\sigma)^{3/2}} \left\{[\eta - \delta(\sigma)] \exp \frac{-[\eta-\delta(\sigma)]^2}{4(\xi-\sigma)} - \right.$$

$$\left. - [2-\eta-\delta(\sigma)] \exp \frac{-[2-\eta-\delta(\sigma)]^2}{4(\xi-\sigma)}\right\} d\sigma - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \frac{\Psi(\sigma) + \varphi(\sigma)\delta'(\sigma)}{\sqrt{\xi-\sigma}} \times$$

$$\times \left\{\exp \frac{-[\eta-\delta(\sigma)]^2}{4(\xi-\sigma)} - \exp \frac{-[2-\eta-\delta(\sigma)]^2}{4(\xi-\sigma)}\right\} d\sigma \tag{2.21}$$

при $\xi > \sigma$ и $\lambda(\eta, \xi) \equiv 0$ при $\xi \leqslant \sigma$. Покажем, что (2.21) является единственным решением поставленной задачи.

Формально $\lambda(\eta, \xi)$ удовлетворяет уравнению (2.9), но чтобы она была решением, необходимо, чтобы все входящие в (2.21) интегралы сходились. Обозначим через J_1, J_2, J_3 и J_4 следующие выражения:

$$J_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \frac{f(\sigma)(1-\eta)}{(\xi-\sigma)^{3/2}} \exp \frac{-(1-\eta)^2}{4(\xi-\sigma)} d\sigma \tag{2.22}$$

$$J_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \varphi(\sigma) \left\{\frac{\eta-\delta(\sigma)}{4(\xi-\sigma)^{3/2}} - \frac{\delta'(\sigma)}{2(\xi-\sigma)^{1/2}}\right\} \exp \frac{-[\eta-\delta(\sigma)]^2}{4(\xi-\sigma)} d\sigma \tag{2.23}$$

$$J_3 = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \frac{\Psi(\sigma)}{\sqrt{\xi-\sigma}} \exp \frac{-[\eta-\delta(\sigma)]^2}{4(\xi-\sigma)} d\sigma \tag{2.24}$$

$$J_4 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \varphi(\sigma) \left\{\frac{2-\eta-\delta(\sigma)}{4(\xi-\sigma)^{3/2}} - \frac{\delta'(\sigma)}{2(\xi-\sigma)^{1/2}}\right\} \exp \frac{-[2-\eta-\delta(\sigma)]^2}{4(\xi-\sigma)} d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \frac{\Psi(\sigma)}{\sqrt{\xi-\sigma}} \exp \frac{-[2-\eta-\delta(\sigma)]^2}{4(\xi-\sigma)} d\sigma \tag{2.25}$$

Интеграл $J_1(\eta, \xi)$ ограничен в области $(-\infty < \eta \leqslant 1,\ 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0)$. Из дифференцируемости $f(\xi)$ и условия $f(0) = 0$ следует

$$J_1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} f'(\sigma) \int_{\infty}^{\eta^*} e^{-\beta^2} d\beta d\sigma \quad \text{при } \eta < 1,\ \xi \geqslant 0 \quad \left(\eta^* = \frac{1-\eta}{2\sqrt{\xi-\sigma}}\right) \tag{2.26}$$

При $\eta = 1$ $J_1 = 0$. Из (2.26) следует, что

$$|J_1| \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi |f'(\sigma)| \left| \int_\infty^{\eta^*} e^{-\beta^2} d\beta \right| d\sigma \leqslant A\xi + B\sqrt{\xi} \tag{2.27}$$

Отсюда следует, что

$$\lim J_1 = 0 \quad \text{при } \xi \to +0, \qquad \lim J_1 = f(\xi) \quad \text{при } \eta \to 1 - 0,$$

Из непрерывности J_1 следует возможность предельного перехода под знаком интеграла

$$\lim_{\eta \to 1-0} J_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi f'(\sigma) \left\{ \lim_{\eta \to 1-0} \int_{\eta^*}^\infty e^{-\beta^2} d\beta \right\} d\sigma = f(\xi) \tag{2.28}$$

Переходя к пределу при $\eta \to -\infty$ под знаком интеграла в (2.26), получим

$$\lim J_1 = 0 \quad \text{при } \eta \to -\infty$$

Производная $\partial J_1 / \partial \eta$ ограничена в области $(-\infty < \eta \leqslant 1, 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0)$. Дифференцируя (2.26) по η, получим

$$\frac{\partial J_1}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \frac{f'(\sigma)}{\sqrt{\xi - \sigma}} \exp \frac{-(1-\eta)^2}{4(\xi - \sigma)} d\sigma \tag{2.29}$$

Отсюда

$$\left| \frac{\partial J_1}{\partial \eta} \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \frac{A + B\sigma^{-1/2}}{\sqrt{\xi - \sigma}} d\sigma = \frac{2A}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\xi} + B\sqrt{\pi} \tag{2.30}$$

Интегрируя выражение (2.23) для J_2 по частям и используя условие $\varphi(0) = 0$, будем иметь

$$J_2 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \varphi'(\sigma) \int_{z(\eta,\xi)}^{z(\eta,\sigma)} e^{-\beta^2} d\beta d\sigma \tag{2.31}$$

где

$$z(\eta, \sigma) = \frac{\eta - \delta(\sigma)}{2\sqrt{\xi - \sigma}}, \qquad z(\eta, \xi) = \begin{cases} \infty & \eta > \delta(\xi) \\ 0 & \eta = \delta(\xi) \\ -\infty & \eta < \delta(\xi) \end{cases} \tag{2.32}$$

Интеграл $J_2(\eta, \xi)$ ограничен при $(0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0)$ и любом η

$$|J_2| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi |\varphi'(\sigma)| \left| \int_{z(\eta,\xi)}^{z(\eta,\sigma)} e^{-\beta^2} d\beta \right| d\sigma \leqslant a\xi + b\sqrt{\xi} < A \tag{2.33}$$

Отсюда следует

$$\lim_{\xi \to +0} J_2 = 0$$

$$\lim_{\eta \to -\infty} J_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \varphi'(\sigma) \left\{ \lim_{\eta \to -\infty} \int_{-\infty}^{z(\eta,\xi)} e^{-\beta^2} d\beta \right\} d\sigma = 0$$

На кривой $\eta = \delta(\xi)$ интеграл J_2 терпит разрыв, причем

$$\lim_{\eta \to \delta(\xi)+0} J_2 - \lim_{\eta \to \delta(\xi)-0} J_2 = \varphi(\xi) \tag{2.34}$$

Действительно, вычисляя предел $J_2(\eta, \xi)$ при $\eta \to \delta(\xi) + 0$

$$\lim_{\eta \to \delta(\xi)+0} J_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \varphi'(\sigma) \int_\vartheta^\infty e^{-\beta^2} d\beta d\sigma \qquad \left(\vartheta = \frac{\delta(\xi) - \delta(\sigma)}{2\sqrt{\xi - \sigma}} \right) \tag{2.35}$$

и его значение на кривой $\eta = \delta(\xi)$

$$J_2[\delta(\xi), \xi] = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \varphi'(\sigma) \int_0^\theta e^{-\beta^2} d\beta d\sigma \tag{2.36}$$

получим

$$\lim J_2 = J_2[\delta(\xi), \xi] + \frac{1}{2}\varphi(\xi) \qquad \text{при } \eta \to \delta(\xi) + 0 \tag{2.37}$$

Аналогично можно получить

$$\lim J_2 = J_2[\delta(\xi), \xi] - \frac{1}{2}\varphi(\xi) \qquad \text{при } \eta \to \delta(\xi) - 0 \tag{2.38}$$

Вычитая (2.38) из (2.37), получим (2.34)

Производная $\partial J_2 / \partial \eta$ ограничена при $(0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0)$ и любых η. Дифференцируя (2.31) по η, будем иметь

$$\frac{\partial J_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \frac{\varphi'(\sigma)}{\sqrt{\xi - \sigma}} \exp \frac{-[\eta - \delta(\sigma)]^2}{4(\xi - \sigma)} d\sigma \tag{2.39}$$

Отсюда

$$\left|\frac{\partial J_2}{\partial \eta}\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \frac{a + b\sigma^{-1/2}}{\sqrt{\xi - \sigma}} d\sigma = \frac{a}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\xi} + b\frac{\sqrt{\pi}}{2} < A \tag{2.40}$$

Интеграл $J_3(\xi, \eta)$ ограничен в области $(-\infty < \eta \leqslant 1,\ 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0)$

$$|J_3| \leqslant B \int_0^\xi \frac{d\sigma}{\sqrt{\xi - \sigma}} = 2B\sqrt{\xi} < A \tag{2.41}$$

Из (2.41) следует $\lim\limits_{\xi \to +0} J_3 = 0$ для всех η

$$\lim_{\eta \to -\infty} J_3 = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \frac{\Psi(\sigma)}{\sqrt{\xi - \sigma}} \left\{\lim_{\eta \to -\infty} \exp \frac{-[\eta - \delta(\sigma)]^2}{4(\xi - \sigma)}\right\} d\sigma = 0 \tag{2.42}$$

Справедливость предельного перехода под знаком интеграла вытекает из равномерной сходимости $J_3(\eta, \xi)$.

Производная $\partial J_3 / \partial \eta$ ограничена при $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$. Для доказательства этого утверждения представим производную

$$\frac{\partial J_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \frac{\Psi(\sigma)[\eta - \delta(\sigma)]}{(\xi - \sigma)^{3/2}} \exp \frac{-[\eta - \delta(\sigma)]^2}{4(\xi - \sigma)} d\sigma \tag{2.43}$$

в виде

$$\frac{\partial J_3}{\partial \eta} = \frac{\Psi(\xi)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \left\{\frac{\eta - \delta(\sigma)}{4(\xi - \sigma)^{3/2}} - \frac{\delta'(\sigma)}{2(\xi - \sigma)^{1/2}}\right\} \exp \frac{-[\eta - \delta(\sigma)]^2}{4(\xi - \sigma)} d\sigma -$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \frac{\Psi(\xi) - \Psi(\sigma)}{(\xi - \sigma)^{3/2}} [\eta - \delta(\sigma)] \exp \frac{-[\eta - \delta(\sigma)]^2}{4(\xi - \sigma)} d\sigma +$$

$$+\frac{\Psi(\xi)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \frac{\delta'(\xi)}{\sqrt{\xi - \sigma}} \exp \frac{-[\eta - \delta(\sigma)]^2}{4(\xi - \sigma)} d\sigma \tag{2.44}$$

Обозначим слагаемые через K_1, K_2, K_3 соответственно. Оценка K_2 дает

$$|K_2| \leqslant \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \frac{|\Psi(\xi)-\Psi(\sigma)|}{(\xi-\sigma)^{3/2}} |\eta - \delta(\sigma)| d\sigma < A\sqrt{\xi} < B \tag{2.45}$$

для всех конечных η и $(0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0)$. Для K_3 имеем

$$|K_3| \leqslant \frac{|\Psi(\xi)|}{2\sqrt{\pi}} A \int_0^{\xi} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}\sqrt{\xi-\sigma}} < B \tag{2.46}$$

Замена переменной под знаком интеграла дает для K_1 выражение

$$K_1 = \frac{\Psi(\xi)}{\sqrt{\pi}} \int_{z(\eta,\,\xi)}^{\theta} e^{-\beta^2} d\beta \qquad \left(\theta = \frac{\eta - \delta_0}{2\sqrt{\xi}}\right) \tag{2.47}$$

где по-прежнему $z(\eta, \xi)$ согласно (2.32)

Из (2.47) следует, что

$$|K_1| \leqslant |\Psi(\xi)| < B \tag{2.48}$$

Производная $\partial J_3 / \partial \eta$ при переходе через кривую $\eta = \delta(\xi)$ терпит разрыв

$$\lim_{\eta \to \delta(\xi)+0} \frac{\partial J_3}{\partial \eta} - \lim_{\eta \to \delta(\xi)-0} \frac{\partial J_3}{\partial \eta} = \Psi(\xi) \tag{2.49}$$

Это утверждение следует из непрерывности K_2 и K_3 и из характера разрыва K_1 на кривой $\eta = \delta(\xi)$.

Повторяя необходимые рассуждения, легко установить, что интеграл $J_4(\eta, \xi)$ — непрерывная функция при всех η и $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$, при этом интеграл $J_4 \to 0$ при $\xi \to +0$ и $-\infty < \eta \leqslant 1$ и $J_4 \to 0$ при $\eta \to -\infty$.

Далее производная $\partial J_4 / \partial \eta$ ограничена при $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$, и непрерывна в полуполосе $(-\infty < \eta < 1,\ 0 < \xi \leqslant \xi_0)$.

Из перечисленных выше свойств интегралов J_1, J_2, J_3 и J_4 следует, что $\lambda(\eta, \xi)$ в виде (2.21) удовлетворяет уравнению (2.9) в области D условиям при $\eta = 1$, при $\eta = -\infty$ и при $\xi = 0$. На кривой $\eta = \delta(\xi)$ сама функция $\lambda(\eta, \xi)$ и ее производная $\partial\lambda / \partial\eta$ имеют заданный скачок. Кроме того, функция $\lambda(\eta, \xi)$ ограничена вместе со своей производной в $\overline{D}$. Значит она является решением поставленной задачи. Остается доказать единственность полученного решения. Предположим, что существует два решения λ_1 и λ_2, обладающие перечисленными свойствами. Очевидно, что их разность $\lambda_0 = \lambda_1 - \lambda_2$ удовлетворяет уравнению (2.9) внутри $\overline{D}$, на границах принимает нулевые значения, ограничена вместе со своей производной в $\overline{D}$. Кроме того, λ_0 будет уже непрерывной в D. Тогда, на основании известной теоремы (см., например, [8], глава XXIX), $\lambda_0 \equiv 0$ в области D, т. е. $\lambda_1 \equiv \lambda_2$. Вернемся к интересующей нас задаче. В (2.21) входит произвольная функция $\delta(\xi)$. Если потребовать, чтобы

$$\lim_{\eta \to \delta(\xi)-0} \lambda(\eta, \xi) = 0, \qquad \lim_{\eta \to \delta(\xi)-0} \frac{\partial\lambda}{\partial\eta} = 0 \tag{2.50}$$

то будут выполнены условия (2.11) и (2.12), и $\lambda(\eta, \xi)$ справа от кривой $\eta = \delta(\xi)$ будет давать искомое решение.

Условия (2.50) можно рассматривать как уравнения для определения искомой границы «ядра».

Таким образом, имеем два уравнения для определения одной неизвестной функции $\delta(\xi)$. Покажем, что любое решение первого уравнения (2.50) удовлетворяет одновременно второму уравнению (2.50) и наоборот.

Рассмотрим $\lambda(\eta, \xi)$ в области D_-, т. е. слева от кривой $\eta = \delta(\xi)$. Она удовлетворяет нулевому начальному условию, обращается в нуль при $\eta \to -\infty$ и при $\eta \to \delta(\xi) - 0$, ограничена вместе со своей производной в замкнутой области D_-, следовательно, $\lambda \equiv 0$ в области D_-. Отсюда следует, что $\partial\lambda / \partial\eta \equiv 0$ в области D_-. Обратное утверждение доказывается аналогично. Выписывая подробно уравнения (2.50), будем иметь

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\xi f'(\sigma)\int_{\vartheta_1}^\infty e^{-\beta^2}d\beta\, d\sigma - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\xi \varphi'(\sigma)\left\{\int_0^{\vartheta} e^{-\beta^2}d\beta + \int_{\vartheta_2}^\infty e^{-\beta^2}d\beta\right\} d\sigma - \tag{2.51}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\xi \frac{\Psi(\sigma)}{\sqrt{\xi-\sigma}}\left\{\exp\frac{-[\delta(\xi)-\delta(\sigma)]^2}{4(\xi-\sigma)} - \exp\frac{-[2-\delta(\xi)-\delta(\sigma)]^2}{4(\xi-\sigma)}\right\} d\sigma = \frac{\varphi(\xi)}{2}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\xi \frac{f'(\sigma)}{\sqrt{\xi-\sigma}}\exp\frac{-[1-\delta(\xi)]^2}{4(\xi-\sigma)}d\sigma - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\xi \frac{\varphi'(\sigma)}{\sqrt{\xi-\sigma}} \times \tag{2.52}$$

$$\times\left\{\exp\frac{-[\delta(\xi)-\delta(\sigma)]^2}{4(\xi-\sigma)} - \exp\frac{-[2-\delta(\xi)-\delta(\sigma)]^2}{4(\xi-\sigma)}\right\} d\sigma +$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^\xi \frac{\Psi(\sigma)}{(\xi-\sigma)^{3/2}}\left\{[\delta(\xi)-\delta(\sigma)]\exp\frac{-[\delta(\xi)-\delta(\sigma)]^2}{4(\xi-\sigma)} +\right.$$

$$\left. + [2-\delta(\xi)-\delta(\sigma)]\exp\frac{-[2-\delta(\xi)-\delta(\sigma)]^2}{4(\xi-\sigma)}\right\} d\sigma = \frac{\Psi(\xi)}{2}$$

$$\vartheta = \frac{\delta(\xi)-\delta(\sigma)}{2\sqrt{\xi-\sigma}}, \qquad \vartheta_1 = \frac{1-\delta(\xi)}{2\sqrt{\xi-\sigma}}, \qquad \vartheta_2 = \frac{2-\delta(\xi)-\delta(\sigma)}{2\sqrt{\xi-\sigma}}$$

при условии $\delta(0) = \delta_0$.

Если хотя бы одно из этих уравнений имеет единственное решение, то это решение дает искомый закон изменения «ядра» во времени. Решение (2.51) или (2.52) вместе с (2.21) и (2.5) полностью описывает течение.

§ 3. Рассмотрим течение при постоянном перепаде давления. Пусть к вязко-пластичному материалу, находящемуся в покое, в момент $t = 0$ приложен перепад давления $-\partial p / \partial x = p / l$ и поддерживается постоянным все последующее время. Очевидно, что течение возникнет только при $p > \tau_0 l / h$, при $p \leqslant \tau_0 l/h$ материал будет вести себя как упругое тело. Таким образом, $0 \leqslant S < 1$, где $S = \tau_0 l / ph$ дает отношение давления, при котором начнется движение, к фактическому давлению. Для функций $f(\xi)$, $\varphi(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ будем иметь

$$f(\xi) = -\frac{p}{p_0}\xi, \qquad \varphi(\xi) = -S\int_0^\xi \frac{d\sigma}{\delta(\sigma)}, \qquad \Psi(\xi) = 0 \tag{3.1}$$

Функцию $\delta(\xi)$ определим из уравнения (2.53), которое в рассматриваемом случае примет вид, при условии $\delta(0) = 1$

$$\int_0^\xi \exp\frac{-[1-\delta(\xi)]^2}{4(\xi-\sigma)}\frac{d\sigma}{\sqrt{\xi-\sigma}} = \tag{3.2}$$

$$= \frac{S}{2}\int_0^\xi \left\{\exp\frac{-[\delta(\xi)-\delta(\sigma)]^2}{4(\xi-\sigma)} + \exp\frac{-[2-\delta(\xi)-\delta(\sigma)]^2}{4(\xi-\sigma)}\right\}\frac{d\sigma}{\delta(\sigma)\sqrt{\xi-\sigma}}$$

Это нелинейное интегральное уравнение, по типу похожее на уравнения Вольтерра. Точное решение его пока затруднительно, поэтому мы дадим приближенное решение для достаточно малых значений ξ. Для малых ξ в правой части (3.2) можно считать $\delta(\xi) \approx \delta(0) = 1$, тогда

$$\int_0^{\xi} \exp \frac{-[1-\delta(\xi)]^2}{4(\xi-\sigma)} \frac{d\sigma}{\sqrt{\xi-\sigma}} = 2S\sqrt{\xi} \tag{3.3}$$

Используя подстановку $\alpha(\sigma) = \dfrac{1-\delta(\xi)}{2\sqrt{\xi-\sigma}}$ и интегрируя по частям, получим

$$\exp\{-[\alpha(0)]^2\} - 2\alpha(0) \int_{\alpha(0)}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta = S \tag{3.4}$$

Исследование этого уравнения показывает, что оно имеет единственное, причем положительное решение.

Для границы «ядра» и его скорости будем иметь

$$\delta(\xi) = 1 - 2\alpha(0)\sqrt{\xi} \tag{3.5}$$

$$\lim_{\eta \to \delta(\xi)+0} \lambda = \frac{S}{\alpha(0)}\sqrt{\xi}\left\{1 + \frac{\ln[1-2\alpha(0)\sqrt{\xi}]}{2\alpha(0)\sqrt{\xi}}\right\} \tag{3.6}$$

где $\alpha(0)$ является решением (3.4). Формулы (3.5) — (3.6) справедливы в интервале $\left(0 \leqslant \xi < \dfrac{1}{4[\alpha(0)]^2}\right)$. Переходя к старым переменным, получим

$$y_0(t) = h - 2\alpha(0)\sqrt{\nu t} \tag{3.7}$$

$$v_0(t) = \frac{p}{\rho l}\left\{t + \frac{\tau_0 l}{p\alpha(0)}\sqrt{\frac{t}{\nu}}\left[1 + \ln\frac{1-2\alpha(0)\sqrt{\nu t}/h}{2\alpha(0)\sqrt{\nu t}/h}\right]\right\} \tag{3.8}$$

Распределение скоростей в потоке также может быть легко получено, но здесь мы его не приводим.

Отметим, что рассмотренный выше метод годится только для получения решения т. е. для конечных значений времени.

В заключение автор приносит благодарность С. В. Фальковичу за указания при подготовке данной статьи.

Поступила 28 I 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Воларович М. П. и Гуткин А. М. Течение пластично-вязкого тела между двумя параллельными плоскими стенками и в кольцевом пространстве между двумя коаксиальными трубками. Ж. Техн. Физ., т. 16, № 3, 1946.
2. Генки Г. О медленных стационарных течениях в пластических телах. Теория пластичности., Сб. статей под общ. ред. Работнова Ю. Н., М., 1948.
3. Oldroud., Rectilinear plastic flow of a Bingham solid, Proceedings of the Cambridge philosophical Society, vol 44, p. 2, 1948.
4. Красильников Ю. И. Неустановившееся движение вязко-пластической жидкости в круглой трубе, ПММ, т. 20, № 5, 1956.
5. Мирзаджанзаде А. Х. и Аббасов А. А. Приближеное решение задачи о нестационарном движении вязко-пластичной жидкости в круглой цилиндрической трубе. ДАН СССР (новая серия), т. 107, № 2, 1956.
6. Kolodner I. I. Free boundary problem for the heat equation with applications to problems of change of phase, Communications on pure and applied Mathematics, IX, N 1, 1956.
7. Рубинштейн Л. И. Об определении положения границы раздела фаз в одномерной задаче Стефана. ДАН СССР (новая серия), т. 58, № 2, 1947.
8. Э. Гурса. Курс математического анализа, т. 3, часть первая, ГТТИ, М.— Л., 1933.
9. Miramker. Free boundary problem for the heat equation, Guarterly of applied Mathematics, vol. XVI, No 2, 1958.