Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Н. Х. Арутюнян

(Ереван)

В настоящей работе приводится решение плоской контактной задачи теории ползучести с учетом старения и изменения модуля мгновенной деформации материала.

В линейной постановке эта задача была изучена И. Е. Прокоповичем [1].

При решении контактных задач в условиях нелинейной ползучести необходимо исходить из некоторых достаточно хорошо физически обоснованных гипотез о связи между напряжением и деформациями. С этой точки зрения мы не считаем возможным использование теории ползучести типа одной из теорий старения [1], так как она может привести к неправильным результатам при решении этих задач. В качестве исходной физической гипотезы здесь принимается теория пластической наследственности, данная Ю. Н. Работновым [2] и развитая автором [3] для стареющих материалов.

Ряд экспериментальных исследований [4,5,6], выполненных за последнее время и специально посвященных проверке основных уравнений теории пластической наследственности, подтверждает достаточно хорошее совпадение результатов, следуемых из этой теории, с данными экспериментов на ползучесть для таких материалов, как алюминиевые сплавы, медь, малоуглеродистая сталь и др.

В § 1 приводятся основные уравнения теории пластической наследственности, связывающие компоненты деформаций и напряжения, с учетом ползучести материала в случае плоского деформированного состояния тела.

Пользуясь этими уравнениями при степенном законе связи между напряжениями и деформациями, в § 2 предварительно решается непосредственно в перемещениях задача о равновесии полуплоскости, находящейся в условиях нелинейной ползучести, под действием сосредоточенной силы, приложенной нормально к ее свободной поверхности.

Далее, пользуясь этим решением, в § 3 доказывается, что решение плоской контактной задачи нелинейной теории ползучести сводится к совместному решению двух связанных между собой интегральных уравнений.

Исследования и решения этих уравнений приводятся в пп. 2° — 4° этого же параграфа как для случая симметричного, так и кососимметричного нагружения сжимаемых тел.

§ 1. Связь между деформациями и напряжениями при нелинейной ползучести. В общем случае пространственного напряженного состояния уравнения теории пластической наследственности, связывающие интенсивность деформаций $\varepsilon_i(t)$ с интенсивностью напряжений $\sigma_i(t)$, с учетом ползучести материала имеют следующий вид:

$$\varphi^*[\varepsilon_i(t)] = \varphi[\varepsilon_i(t)]\,\varepsilon_i(t) = \sigma_i(t) - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_i(\tau)\,\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau \qquad (1.1)$$

[1] Отметим, что теория старения, изложенная в различных работах, посвященных вопросам ползучести, не имеет отношения к явлению старения материалов.

Здесь $C(t, \tau)$ — мера ползучести материала, а $\varphi^*[\varepsilon_i(t)]$ — некоторая функция, характеризующая нелинейную зависимость между его напряжениями и деформациями: оба они определяются из опыта в результате испытания на простую ползучесть: τ_1 — возраст материала, t — время.

При этом принято

$$\varepsilon_i(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{[\varepsilon_\theta(t) - \varepsilon_z(t)]^2 + [\varepsilon_z(t) - \varepsilon_r(t)]^2 + [\varepsilon_r(t) - \varepsilon_\theta(t)]^2 + 6\gamma_{r\theta}^2(t)} \quad (1.2)$$

$$\sigma_i(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{[\sigma_0(t) - \sigma_z(t)]^2 + [\sigma_z(t) - \sigma_r(t)]^2 + [\sigma_r(t) - \sigma_\theta(t)]^2 + 6\tau_{r\theta}^2(t)}$$

Пользуясь обычными формулами перехода, связывающими компоненты напряжений и деформаций в цилиндрической системе координат (r, θ, z) с соответствующими компонентами в системе главных осей, и принимая, что девиаторы напряжений и деформаций имеют одинаковые главные направления в любой момент времени t, из (1.1) для случая плоского деформированного состояния тела получим [1]

$$\varepsilon_r(t)\varphi[\varepsilon_i(t)] = [\sigma_r(t) - \sigma(t)] - \int_{\tau_1}^{t} [\sigma_r(\tau) - \sigma(\tau)] \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau$$

$$\varepsilon_\theta(t)\varphi[\varepsilon_i(t)] = [\sigma_\theta(t) - \sigma(t)] - \int_{\tau_1}^{t} [\sigma_\theta(\tau) - \sigma(\tau)] \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau$$

$$\varepsilon_z(t) = 0 \quad (1.3)$$

$$\gamma_{r\theta}(t)\varphi[\varepsilon_i(t)] = \tau_{r\theta}(t) - \int_{\tau_1}^{t} \tau_{r\theta}(\tau) \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau$$

где

$$\sigma(t) = \sigma_z(t) = \frac{1}{2}[\sigma_r(t) + \sigma_\theta(t)] \quad (1.4)$$

Отметим, что уравнения (1.3) описывают процессы деформации с учетом как старения, так и наследственности материала и справедливы в случае активных деформаций, причем критерием активности является условие возрастания $\varepsilon_i(t)$.

Эти уравнения выведены в предположении несжимаемости материала:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_r(t) + \varepsilon_\theta(t) = 0 \quad (1.5)$$

Опытные кривые ползучести для металлов достаточно хорошо описываются степенным законом вида

$$\varphi^*[\varepsilon_i(t)] = \varphi[\varepsilon_i(t)]\varepsilon_i(t) = K_0\varepsilon_i^\mu(t) \quad (1.6)$$

Здесь K_0 и μ — некоторые физические константы, определяемые из опыта при испытании на простую ползучесть.

Имеющиеся экспериментальные данные по изучению ползучести металлов и других конструктивных материалов при постоянных нагрузках показывают [7], что с ростом нагрузки полная деформация обычно растет быстрее, чем по линейному закону. Аналитически это условие выражает-

[1] Для краткости обозначения аргументы r, θ и z опускаются.

ся неравенством

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \sigma^2} > 0 \quad \text{при } t = t_1 = \text{const} \tag{1.7}$$

Поэтому для принятого здесь закона ползучести (1.1) и (1.6) это условие будет выполняться при

$$K_0 > 0, \quad \mu < 1 \tag{1.8}$$

§ 2. Равновесие полуплоскости, нагруженной сосредоточенной силой, приложенной к ее свободной поверхности, в условиях нелинейной ползучести. Рассмотрим квазистатистическую задачу о равновесии полуплоскости, нагруженной переменной во времени сосредоточенной силой $P(t)$, приложенной к ее свободной поверхности, с учетом ползучести материала при степенном законе связи (1.3) и (1.6) между напряжениями и деформациями.

Эта задача для пластичности со степенным упрочнением в напряжениях была решена В. В. Соколовским [8], который нашел распределение напряжений и деформаций в полуплоскости при одновременном действии вертикальной и горизонтальной сил, приложенных к ее поверхности.

Однако задача определения перемещений в рассматриваемой полуплоскости по заданным компонентам деформаций, приведенная в работе [8], сводится к решению дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которые в замкнутой форме не интегрируются.

В этом параграфе, исходя из основных уравнений (1.3) и (1.6) нелинейной теории ползучести, дается решение этой задачи непосредственно в перемещениях, так как именно в такой форме оно нам понадобится в дальнейшем при исследовании плоской контактной задачи теории ползучести.

Поместим начало цилиндрической системы координат (r, θ, z) в точке приложения сосредоточенной силы $P(t)$ к полуплоскости и направим оси r, θ и z, как показано на фиг. 1.

Тогда, разрешая уравнения (1.3), связывающие компоненты деформаций с компонентами напряжений в условиях нелинейной ползучести, относительно $[\sigma_r(t) - \sigma(t)]$, $[\sigma_\theta(t) - \sigma(t)]$ и $\tau_{r\theta}(t)$ и принимая во внимание соотношения (1.4), (1.5) и (1.6), получим

$$\sigma_r(t) = \sigma_\theta(t) + 2K_0\left\{\varepsilon_r(t)\,\varepsilon_i^{\mu-1}(t) + \int_{\tau_1}^{t} \varepsilon_r(\tau)\,\varepsilon_i^{\mu-1}(\tau)\,R(t,\tau)\,d\tau\right\}$$

$$\tau_{r\theta}(t) = K_0\left\{\gamma_{r\theta}(t)\,\varepsilon_i^{\mu-1}(t) + \int_{\tau_1}^{t} \gamma_{r\theta}(\tau)\,\varepsilon_i^{\mu-1}(\tau)\,R(t,\tau)\,d\tau\right\} \tag{2.1}$$

$$\sigma_z(t) = \frac{1}{2}\left[\sigma_r(t) + \sigma_\theta(t)\right]$$

где $R(t,\tau)$ — резольвента ядра ползучести $K(t,\tau) = \partial C(t,\tau)/\partial\tau$, т. е. ядро релаксаций.

Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат (r, θ, z) применительно к данной задаче имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r\sigma_r(t)\right] + \frac{\partial \tau_{r\theta}(t)}{\partial \theta} - \sigma_\theta(t) = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_\theta(t)}{\partial \theta} + r\frac{\partial \tau_{r\theta}(t)}{\partial r} + 2\tau_{r\theta}(t) = 0 \tag{2.2}$$

Зависимости между компонентами деформаций и компонентами смещений

$$\varepsilon_r(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v(t)}{\partial \theta} + \frac{u(t)}{r}, \qquad \varepsilon_z(t) = \frac{\partial w(t)}{\partial z} = 0$$

$$2\gamma_{r\theta}(t) = \frac{\partial v(t)}{\partial r} - \frac{v(t)}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(t)}{\partial \theta} \tag{2.3}$$

где $u(t)$, $v(t)$ и $w(t)$ — компоненты перемещений вдоль направлений координат (r, θ и z) в момент времени t — дают дифференциальное уравнение совместности деформаций в виде

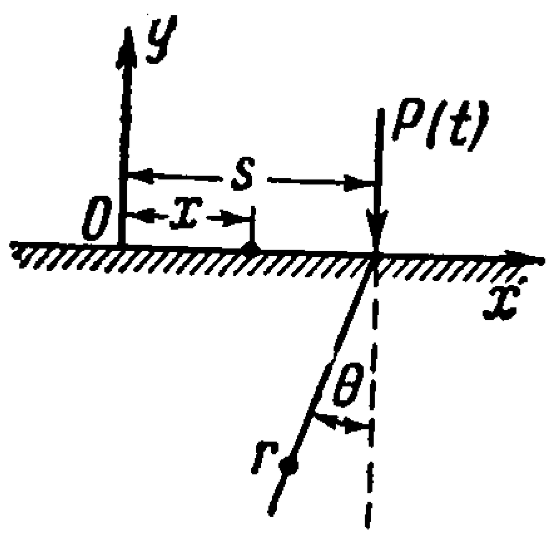
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_r(t)}{\partial \theta^2} + r^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta(t)}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial \varepsilon_\theta(t)}{\partial r} - r\frac{\partial \varepsilon_r(t)}{\partial r} - 2r\frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}(t)}{\partial r\, \partial\theta} - 2\frac{\partial \gamma_{r\theta}(t)}{\partial \theta} = 0 \tag{2.4}$$

Граничными условиями задачи являются

$$\sigma_\theta(t) = \tau_{r\theta}(t) = 0 \qquad \text{при } \theta = \pm\frac{1}{2}\pi \tag{2.5}$$

т. е. на свободной поверхности полуплоскости отсутствуют внешние усилия.

Будем искать точное решение поставленной задачи в перемещениях в следующей форме:



Фиг. 1

$$u(t) = \varkappa\,[f_1(r)\,\chi'(\theta, t) + f_0'(\theta, t)]$$
$$v(t) = \varkappa\,[f_2(r)\,\chi(\theta, t) - f_0(\theta, t)] \tag{2.6}$$
$$w = 0, \qquad \varkappa = \pm 1$$

где $f_1(r)$, $f_2(r)$, $\varkappa(\theta, t)$ и $f_0(\theta, t)$ — некоторые однозначные и непрерывные функции, подлежащие определению во всей полуплоскости $-{}^1/_2\pi \leqslant \theta \leqslant {}^1/_2\pi$ и $r > 0$ в любой момент времени $t \geqslant \tau_1$.

Из первых двух соотношений (2.3) имеем

$$\varepsilon_r(t) = \varkappa f_1'(r)\,\chi'(\theta, t), \qquad \varepsilon_\theta(t) = \varkappa\frac{1}{r}[f_2(r) + f_1(r)]\,\chi'(\theta, t) \tag{2.7}$$

Пользуясь соотношением (2.7) и условием несжимаемости материала (1.5), находим

$$f_2(r) = -[f_1'(r)\,r + f_1(r)] \tag{2.8}$$

Положим, что касательное напряжение $\tau_{r\theta}(t)$ во всей полуплоскости при любом t равно нулю. Тогда в силу (2.1) и (2.3) будем иметь

$$\frac{\partial v(t)}{\partial r} - \frac{v(t)}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(t)}{\partial \theta} = 0 \tag{2.9}$$

Подставляя в (2.9) выражения для компонент перемещений и их производных из (2.6) и пользуясь равенством (2.8), для определения функций $f_0(\theta, t)$, $\chi(\theta, t)$ и $f_1(r)$ получим:

$$f_0''(\theta, t) + f_0(\theta, t) = 0, \qquad \chi''(\theta, t) + \lambda^2\chi(\theta, t) = 0 \tag{2.10}$$

$$r^2 f_1''(r) + r f_1'(r) - [1 - \lambda^2]\, f_1(r) = 0 \tag{2.11}$$

где λ — параметр, подлежащий определению в дальнейшем.

Общий интеграл уравнения (2.11)

$$f_1(r) = D_1 r^{\sqrt{1-\lambda^2}} + D_2 r^{-\sqrt{1-\lambda^2}} \qquad \text{при } -\infty < \lambda^2 < 1 \tag{2.12}$$

Здесь D_1 и D_2 — постоянные интегрирования.

Принимая очевидное условие, что при $r \to \infty$ перемещения $u(t)$ и $v(t)$ должны быть конечными при любом $t \geqslant \tau_1$, в силу соотношений (2.6), (2.8) и (2.12) получим $D_1 = 0$.

Тогда выражение (2.12) для $f_1(r)$ примет вид

$$f_1(r) = r^{-\sqrt{1-\lambda^2}} \qquad (-\infty < \lambda^2 < 1) \tag{2.13}$$

где для простоты дальнейших выкладок принято $D_2 = 1$.

Пользуясь соотношениями (2.3), (2.6), (2.7), (2.8), (2.9) и (2.13), находим

$$\begin{gathered}\varepsilon_r(t) = -\varepsilon_\theta(t) = -\varkappa\sqrt{1-\lambda^2}\,r^{-(1+\sqrt{1-\lambda^2})}\,\chi'(\theta, t)\\ \gamma_{r\theta}(t) = \varepsilon_z(t) = 0\end{gathered} \tag{2.14}$$

Интенсивность деформаций сдвига $\varepsilon_i(t)$ в силу соотношений (1.2) и (2.14) будет

$$\varepsilon_i(t) = |\varepsilon_r(t)| = \sqrt{1-\lambda^2}\,r^{-(1+\sqrt{1-\lambda^2})}\chi'(\theta, t) \tag{2.15}$$

Подставляя выражения для компонент деформаций $\varepsilon_r(t)$, $\varepsilon_\theta(t)$, $\gamma_{r\theta}(t)$ и $\varepsilon_i(t)$ из (2.14) и (2.15) в (2.1), получим

$$\begin{gathered}\sigma_r(t) = \sigma_\theta(t) - 2\varkappa K_0\left[\sqrt{1-\lambda^2}\,r^{-(1+\sqrt{1-\lambda^2})}\right]^\mu H_1(\theta, t)\\ \sigma_z(t) = \frac{1}{2}\left[\sigma_r(t) + \sigma_\theta(t)\right], \qquad \tau_{r\theta}(t) = 0\end{gathered} \tag{2.16}$$

где положено

$$H_1(\theta, t) = \xi(\theta, t) + \int_{\tau_1}^{t} \xi(\theta, \tau) R(t, \tau)\, d\tau, \qquad \xi(\theta, t) = [\chi'(\theta, t)]^\mu \tag{2.17}$$

причем $\chi(\theta, t)$ есть решение уравнения (2.10).

Полученные выражения (2.14), (2.15) и (2.16) для компонент деформаций и напряжений в силу равенства (2.10) тождественно удовлетворяют как уравнениям теории пластической наследственности (1.3) или (2.1), так и уравнениям совместности деформаций (2.4).

Подставляя выражения для компонент напряжений из (2.16) в уравнения равновесия (2.2), находим, что эти уравнения будут удовлетворяться, если положить

$$\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{1}{\mu} - 1, \qquad \sigma_\theta = \mathrm{const} \tag{2.18}$$

Но на свободной поверхности напряжения отсутствуют, т. е.

$$\sigma_\theta(t) = \tau_{r\theta}(t) = 0 \qquad \text{при } \theta = \pm\frac{1}{2}\pi \text{ и } t \geqslant \tau_1$$

Эти условия будут совместимы с (2.18) только в том случае, когда $\sigma_\theta(t) = 0$ повсюду.

Тогда выражения (2.16) и (2.18) примут вид:

$$\begin{gathered}\sigma_r(t) = -\frac{2\varkappa K_0(m-1)^\mu}{r} H_1(\theta, t), \qquad \sigma_\theta(t) = \tau_{r\theta}(t) = 0\\ \sigma_z(t) = -\frac{\varkappa K_0(m-1)^\mu}{r} H_1(\theta, t), \qquad \lambda^2 = \frac{2\mu - 1}{\mu^2}, \qquad m = \frac{1}{\mu}\end{gathered} \tag{2.19}$$

где функция $H_1(\theta, t)$ определяется формулой (2.17).

Приравнивая компоненту главного вектора усилия, действующего в любом сечении полуплоскости, ограниченной цилиндрической поверхностью $r = \mathrm{const}$, заданной вертикальной силе $P(t)$, получим равенство, которому должно удовлетворять напряжение $\sigma_r(t)$:

$$P(t) = -\int_{-1/2\pi}^{+1/2\pi} \sigma_r(t)\, r\cos\theta\, d\theta \tag{2.20}$$

Из соотношения (2.19) следует, что при $0 < \mu \leqslant 1$ параметр λ^2 изменяется в пределах $-\infty < \lambda^2 \leqslant 1$, причем знак равенства $\mu = \lambda^2 = 1$ соответствует согласно (2.1) случаю равновесия полуплоскости в условиях линейной ползучести материала.

Перейдем к определению смещений $u(t)$ и $v(t)$ в полуплоскости.

Решение первого дифференциального уравнения (2.10) есть

$$f_0(\theta, t) = D_5(t)\cos\theta + D_6(t)\sin\theta \tag{2.21}$$

Решение второго дифференциального уравнения (2.10) будет иметь различный вид в зависимости от значения μ. Для $\mu = 1/2$ функция $\chi(\theta, t)$ будет линейной по θ:

$$\chi(\theta, t) = D_3(t) + D_4(t)\theta \tag{2.22}$$

а при $\mu \neq 1/2$ функция $\chi(\theta, t)$ выражается через тригонометрические или гиперболические функции следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi(\theta, t) &= D_3(t)\cos\lambda\theta + D_4(t)\sin\lambda\theta \qquad & \left(\mu > \tfrac{1}{2}\right) \\ \chi(\theta, t) &= D_3(t)\,\mathrm{ch}\,\lambda\theta + D_4(t)\,\mathrm{sh}\,\lambda\theta \qquad & \left(\mu < \tfrac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Здесь $D_3(t)$, $D_4(t)$, $D_5(t)$ и $D_6(t)$ — произвольные функции интегрирования, зависящие только от t.

Положим, что рассматриваемая полуплоскость не смещается в горизонтальном направлении и не поворачивается, так что

$$v(t) = 0 \quad \text{при } \theta = 0 \text{ и } t \geqslant \tau_1 \tag{2.24}$$

Тогда согласно (2.6), (2.21), (2.22) и (2.23) будем иметь

$$D_3(t) = D_5(t) = 0 \tag{2.25}$$

и выражения (2.21), (2.22) и (2.23) для функций $f_0(\theta, t)$ и $\chi(\theta, t)$ примут следующий вид:

$$\begin{aligned} f_0(\theta, t) &= D_6(t)\sin\theta & \\ \chi(\theta, t) &= D_4(t)\,\theta \qquad & \left(\mu = \tfrac{1}{2}\right) \\ \chi(\theta, t) &= D_4(t)\sin l\theta \qquad & \left(\mu > \tfrac{1}{2}\right) \\ \chi(\theta, t) &= D_4(t)\,\mathrm{sh}\,\beta\theta \qquad & \left(\mu < \tfrac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.26}$$

где l и β связаны с μ так:

$$l^2 = \frac{2\mu - 1}{\mu^2}, \qquad \beta^2 = \frac{1 - 2\mu}{\mu^2} \tag{2.27}$$

Теперь, пользуясь равенствами (2.17), (2.19), (2.20) и (2.26), для определения $D_4(t)$ получим следующее интегральное уравнение Вольтерра:

$$D_4^*(t) = \frac{P(t)}{K_0(m-1)^\mu J(\mu)} - \int_{\tau_1}^{t} D_4^*(\tau) R(t,\tau)\,d\tau \tag{2.28}$$

Здесь

$$D_4^*(t) = D_4^\mu(t), \qquad m = \frac{1}{\mu}, \qquad \varkappa = +1$$

$$J(\mu) = 4l^\mu \int_0^{1/2\pi} (\cos l\theta)^\mu \cos\theta\,d\theta \qquad \left(\mu > \tfrac{1}{2}\right),$$

$$J(\mu) = 4\beta^\mu \int_0^{1/2\pi} (\operatorname{ch}\beta\theta)^\mu \cos\theta\,d\theta \qquad \left(\mu < \tfrac{1}{2}\right), \quad J(\mu) = 4 \quad \left(\mu = \tfrac{1}{2}\right) \tag{2.29}$$

K_0 и μ — физические константы, характеризующие степенной закон нелинейности (1.6).

Решение уравнения (2.28) будет

$$D_4(t) = \frac{1}{K_0^m(m-1)J^m(\mu)}\left(P(t) - \int_{\tau_1}^{t} P(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau\right)^m \tag{2.30}$$

так как $R(t,\tau)$ — резольвента ядра ползучести $K(t,\tau) = \partial C(t,\tau)/\partial\tau$.

Подставляя в соотношения (2.6) выражения функций $\chi(\theta,t)$, $f_0(\theta,t)$, $f_1(r)$ и $f_2(r)$ и их производных из (2.26), (2.13), (2.8) и пользуясь выражением для функции $D_4(t)$ (2.30), получим

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{[(1-\mathbf{L})P(t)]^m}{K_0^m(m-1)J^m(\mu)} r^{1-m}\eta'(\theta,\mu) + D_6(t)\cos\theta \\ v(t) &= \frac{(m-2)[(1-\mathbf{L})P(t)]^m}{K_0^m(m-1)J^m(\mu)} r^{1-m}\eta(\theta,\mu) - D_6(t)\sin\theta \end{aligned} \tag{2.31}$$

Здесь $\mathbf{L}$ — обозначение интегрального оператора Вольтерра вида

$$Ly(t) = \int_{\tau_1}^{t} y(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau \tag{2.32}$$

$$\eta(\theta,\mu) = \theta \quad \left(\mu = \tfrac{1}{2}\right), \quad \eta(\theta,\mu) = \sin l\theta \quad \left(\mu > \tfrac{1}{2}\right) \tag{2.33}$$

$$\eta(\theta,\mu) = \operatorname{sh}\beta\theta \quad \left(\mu < \tfrac{1}{2}\right)$$

Перемещения точек границы полуплоскости, т. е. при $\theta = \pm{}^1/_2\pi$, согласно (2.31) и (2.33) будут иметь вид:

$$[u(t)]_{\theta=-1/2\pi} = [u(t)]_{\theta=1/2\pi} = B[(1-\mathbf{L})P(t)]^m r^{1-m} \tag{2.34}$$

$$[v(t)]_{\theta=-1/2\pi} = -[v(t)]_{\theta=1/2\pi} = A[(1-\mathbf{L})P(t)]^m r^{1-m} + D(t)$$

Здесь (2.35)

$$A = 0, \qquad B = \frac{1}{16K_0^2} \qquad \left(\mu = \tfrac{1}{2}\right)$$

$$A = \frac{(2-m)\sin{}^1/_2 l\pi}{K_0^m(m-1)J^m(\mu)}, \qquad B = \frac{l\cos{}^1/_2 l\pi}{K_0^m(m-1)J^m(\mu)} \qquad \left(\mu > \tfrac{1}{2}\right)$$

$$A = \frac{(2-m)\operatorname{sh}{}^1/_2\beta\pi}{K_0^m(m-1)J^m(\mu)}, \qquad B = \frac{\beta\operatorname{ch}{}^1/_2\beta\pi}{K_0^m(m-1)J^m(\mu)} \qquad \left(\mu < \tfrac{1}{2}\right)$$

Полученные выше формулы для $u(t)$ и $v(t)$ справедливы, когда материал находится в условиях нелинейной ползучести, т. е. при $0<\mu<1$.

Отметим, что, как следует из формул (2.34) и (2.35), при квадратичном законе нелинейности, т. е. когда $\mu={}^1/_2$ и $m=2$, все точки границы полуплоскости в вертикальном направлении получают жестко-мгновенные смещения, равные

$$v(t)=-v(t)=D(t) \text{ при } \theta=\pm\frac{\pi}{2}$$

Пользуясь соотношениями (2.19) и замечая, что согласно (2.17), (2.26) и (2.28)

$$\xi(\theta,t)=D_4^*(t)\,[\eta'(\theta,\mu)]^\mu=D_4^\mu(t)\,[\eta'(\theta,\mu)]^\mu$$

$$H_1(\theta,t)=\frac{P(t)\,[\eta'(\theta,\mu)]^\mu}{K_0(m-1)^\mu J(\mu)} \tag{2.36}$$

для напряжений $\sigma_r(t)$ и $\sigma_z(t)$ получим окончательно следующие формулы:

$$\sigma_r(t)=-\frac{2P(t)\,[\eta'(\theta,\mu)]^\mu}{rJ(\mu)},\qquad \sigma_z(t)=-\frac{P(t)\,[\eta'(\theta,\mu)]^\mu}{rJ(\mu)} \tag{2.37}$$

$$\sigma_\theta(t)=\tau_{r\theta}(t)=0$$

которые для каждого фиксированного момента времени $t=t_1$ совпадают с формулами для напряжений в полуплоскости при условии пластичности со степенным упрочнением материала, данными в работе [9]. Эти формулы другим путем были получены В. В. Соколовским [8].

Таким образом, распределение напряжений в рассматриваемой полуплоскости (2.37) тождественно совпадает с системой напряжений, соответствующей мгновенной задаче нелинейной теории упругости для этой же полуплоскости, хотя скорости деформаций оказываются здесь не постоянными, а переменными, так как определяемый из интегрального уравнения Вольтерра (2.28) множитель $D_4(t)$ зависит от времени t. В условиях нелинейной ползучести это объясняется тем, что система уравнений (1.3) и (1.6) хотя и представляет собой уравнения установившейся ползучести, понимаемой в более общем смысле, чем обычно, но ее задачи оказывается возможным путем упругой аналогии свести, как и в обычном случае, к соответствующим мгновенным задачам нелинейной теории упругости.

§ 3. Плоская контактная задача теории ползучести. *1°. Постановка задачи и вывод основных уравнений.* Принимая за основу нелинейно-упругую аналогию, рассмотрим в общем виде решение задачи о контакте двух тел, ограниченных плавными поверхностями и находящихся в условиях нелинейной ползучести, при степенном законе (1.6) связи между деформациями и напряжениями.

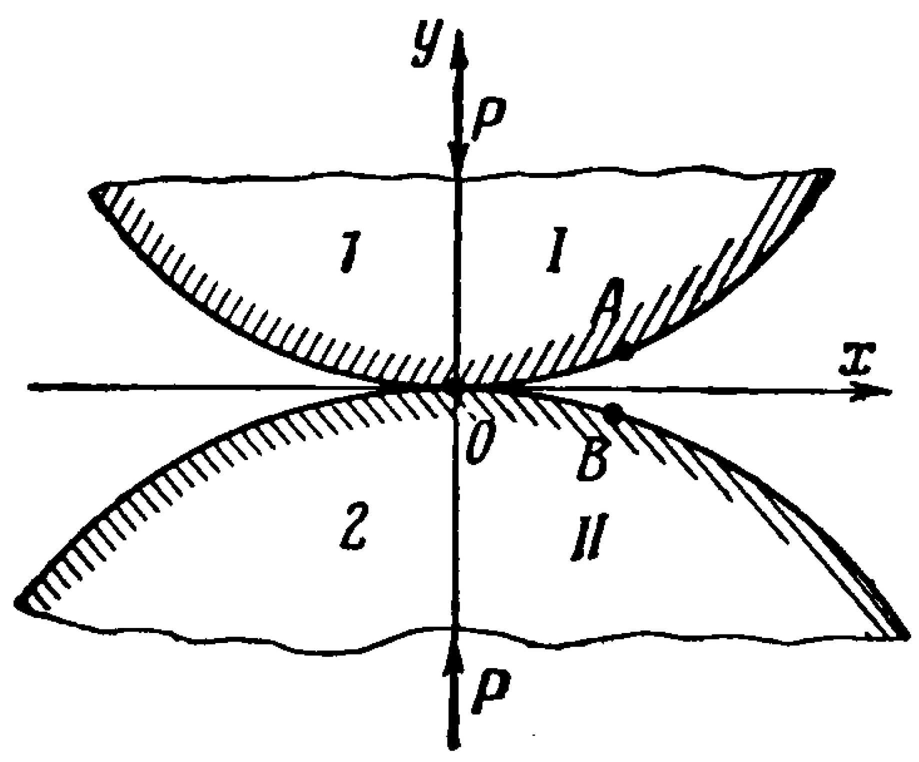
Пусть два соприкасающихся между собой в точке или по линии тела (фиг. 2), обладающие свойством ползучести, прижимаются один к другому под действием внешних сил, равнодействующая которых P перпендикулярна к оси x и проходит через начало координат.

Соотношение, которому должны удовлетворять перемещения точек области контакта этих тел, имеет вид:

$$v_1(t)+v_2(t)=\delta(t)-f_1^*(x)-f_2^*(x) \tag{3.1}$$

где $\delta(t) = \delta_1(t) + \delta_2(t)$ — сближение этих тел в направлении оси oy, а $f_1^*(x)$ и $f_2^*(x)$ — уравнения поверхностей, ограничивающих первое и второе тела.

Далее будем полагать, что трение и сцепление между сжимаемыми телами отсутствуют. Тогда на участке контакта каждое из этих тел будет испытывать лишь только нормальное давление, которое обозначим через $p(x,t)$. Но обычно область контакта бывает мала по сравнению с размерами сжимаемых тел, поэтому можно считать, что перемещения на участке контакта сжимаемых тел будут такими же, как у граничных точек двух полуплоскостей (верхней и нижней), находящихся под действием того же нормального движения $p(x,t)$, что и рассматриваемые сжимаемые тела.



Фиг. 2

Разобьем эпюру давления $p(x,t)$, действующую на участке контакта $S(a \leqslant x \leqslant b)$, на элементарные полоски шириной Δs_i и высотой $p(s_i,t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и рассмотрим действие одной из этих полосок (например, i-й) на нижнюю полуплоскость.

Если в точке $x = s_i$ к границе полуплоскости приложена нормальная к ней сосредоточенная сила $P_i(t) = p(s_i, i)\,\Delta s_i$, то граничная точка этой полуплоскости с абсциссой x получит перемещение в направлении оси oy $v(t)$, определяемое согласно (2.34) формулой

$$v(t) = A\,[(1-L)\,P_i(t)]^m\,|s_i - x|^{1-m} + D(t) \tag{3.2}$$

или в другой форме:

$$v^*(t) = h_i(t)\,p(s_i, t)\,\Delta s_i \tag{3.3}$$

где

$$h_i(t) = A^\mu\,|s_i - x|^{\mu-1}(1-L), \qquad v^*(t) = [v(t) - D(t)]^\mu$$

$$m = \frac{1}{\mu}, \qquad LP_i(t) = \int_{\tau_1}^{t} P_i(\tau)\,\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau}\,d\tau \tag{3.4}$$

В дальнейшем $v^*(x,t)$ будем называть обобщенным перемещением точек границы полуплоскости.

При одновременном действии системы сил $P_i(t) = p(s_i,t)\,\Delta s_i$ $(i=1,\ldots,n)$ обобщенное перемещение $v^*(x,t)$ произвольной точки границы полуплоскости будет в общем случае некоторой функцией от этих сил $v^*(x,t) = v^*[P_1(t), P_2(t), \ldots, P_n(t)]$, которую можно представить в виде ряда

$$v^*(t) = \sum_{j=1}^{j=n} C_j(t)\,p(s\ ,t)\,\Delta s_j + \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{j=1}^{j=n} C_{jk}(t)\,p(s_k, t)\,p(s_j\,t)\,\Delta s_k\,\Delta s_j +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{j=1}^{j=n} C_{\nu kj}(t)\,p(s_\nu,t)\,p(s_k,t)\,p(s_j,t)\,\Delta s_\nu\,\Delta s_k\,\Delta s_j + \ldots \tag{3.5}$$

где $C_j(t)$, $C_{jk}(t)$ и $C_{\nu jk}(t)$ — некоторые коэффициенты, зависящие также от x и s_i $(i = 1, \ldots, n)$, которые для краткости обозначений опущены.

Но, с другой стороны, при действии только одной силы, т. е. когда $P_i(t)=0$ при $j\neq i$ и $P_j(t)=P_i(t)$ при $j=i$, выражение (3.5) для $v^*(t)$ должно тождественно совпадать с точным решением этой задачи, определяемым формулой (3.3). В силу этого будем иметь

$$C_i(t)=h_i(t), \qquad C_{ii}(t)=0, \qquad C_{iii}(t)=0 \tag{3.6}$$

и выражение для обобщенного перемещения $v^*(t)$ примет вид:

$$v^*(t)=\sum_{j=1}^{j=n} h_j(t)\,p(s_j,t)\,\Delta s_j+$$

$$+\sum_{j\neq k}^{n} C_{jk}(t)\,p(s_j,t)\,p(s_k,t)\,\Delta s_j\,\Delta s_k+\ldots \quad (j,k=1,\ldots,n) \tag{3.7}$$

Вследствие малости участка контакта $S(a\leqslant x\leqslant b)$ с той степенью точности, которая принята при решении данной задачи, можно в выражении (3.7) для обобщенного перемещения $v^*(t)$ ограничиться главным членом разложения. Тогда из выражения (3.7) после перехода к пределу при $\Delta s_i\to 0$ получим

$$v^*(t)=A^{\mu}[1-L]\int\limits_S \frac{p(s,t)\,ds}{|s-x|^{1-\mu}} \tag{3.8}$$

где интегрирование производится по всему участку контакта $S(a\leqslant x\leqslant b)$, который в общем случае является переменным во времени; отсюда, пользуясь формулой (3.4), которой определяется оператор L и обобщенное перемещение $v^*(t)$. Для перемещения $v(t)$ точек контакта получим

$$v(t)=A\left[(1-L)\int\limits_S \frac{p(s,t)\,ds}{|s-x|^{1-\mu}}\right]^m+D(t)$$

где $m=1/\mu$, а постоянная A определяется согласно (2.35).

Если это же нормальное давление $p(x,t)$ будет действовать на границе верхней полуплоскости, то граничная точка с абсциссой x получит в направлении оси oy перемещение $v(t)$, равное

$$v(t)=-A\left[(1-L)\int\limits_S \frac{p(s,t)\,ds}{|s-x|^{1-\mu}}\right]^m+D(t) \tag{3.9}$$

Таким образом, при сделанных выше допущениях выражения для перемещений $v_1(t)$ и $v_2(t)$ для первого и второго тел согласно (3.8) и (3.9) будут

$$v_1(t)=A_1\left[(1-L)\int\limits_S \frac{p(s,t)\,ds}{|s-x|^{1-\mu}}\right]^m+D_1(t)$$

$$v_2(t)=A_2\left[(1-L)\int\limits_S \frac{p(s,t)\,ds}{|s-x|^{1-\mu}}\right]^m+D_2(t) \tag{3.10}$$

Здесь (3.11)

$$A_1 = \frac{(2-m)\sin {}^1/_2\, l\pi}{K_{01}{}^m (m-1) J^m(\mu)}, \qquad A_2 = \frac{(2-m)\sin {}^1/_2\, l\pi}{K_{02}{}^m (m-1) J^m(\mu)} \qquad (\mu > \tfrac{1}{2})$$

$$A_1 = \frac{(2-m)\operatorname{sh} {}^1/_2\, \beta\pi}{K_{01}{}^m (m-1) J^m(\mu)}, \qquad A_2 = \frac{(2-m)\operatorname{sh} {}^1/_2\, \beta\pi}{K_{02}{}^m (m-1) J^m(\mu)} \qquad (\mu < \tfrac{1}{2})$$

$$A_1 = A_2 = 0 \qquad (\mu = \tfrac{1}{2})$$

где K_{01} и K_{02} — физические константы материалов первого и второго тел.

Подставляя выражения для $v_1(t)$ и $v_2(t)$ из (3.10) в соотношение (3.1), для определения давления $p(x, t)$ получим следующее интегральное уравнение:

$$\int\limits_S \frac{p(s,t)\,ds}{|s-x|^{1-\mu}} - \int\limits_{\tau_1}^{t}\int\limits_S \frac{p(s,\tau)\,ds}{|s-x|^{1-\mu}} \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau = [\gamma(t) - f_0(x)]^\mu \tag{3.12}$$

где

$$f_0(x) = \frac{f_1^*(x) + f_2^*(x)}{A_1 + A_2}$$

причем $f_0(x)$ не зависит от t, $S\,(a \leqslant x \leqslant b)$ — ширина контакта, которая в общем случае изменяется во времени, а $\gamma(t)$ — неизвестная функция t, подлежащая определению в дальнейшем.

Интегральное уравнение (3.12) можно представить в более компактной форме — в виде следующих двух интегральных уравнений:

$$\omega(x,t) - \int\limits_{\tau_1}^{t} \omega(x,\tau) \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau = [\gamma(t) - f_0(x)]^\mu \tag{3.13}$$

$$\int\limits_S \frac{p(s,t)\,ds}{|s-x|^{1-\mu}} = \omega(x,t) \tag{3.14}$$

Здесь и в дальнейшем для краткости письма через $\omega(x, t)$ обозначена функция, которая, являясь решением интегрального уравнения (3.13), зависит как от аргументов x и t, так и от неизвестной функции $\gamma = \gamma(t)$, входящей в правую часть этого уравнения, т. е. $\omega(x, t) = \omega^*[x, t, \gamma(t)]$.

Таким образом, решение плоской контактной задачи нелинейной теории ползучести, которое в сущности состоит в отыскании неизвестной функции двух переменных $p(x, t)$, характеризующей распределение интенсивности давлений вдоль контакта сжимаемых тел, сводится к совместному решению связанных между собой двух интегральных уравнений (3.13) и (3.14).

Первое из них, которому должна удовлетворять $\omega(x, t)$ как функция времени t, учитывает влияние ползучести материала на распределение контактного усилия и представляет собой линейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода, которое для различных случаев ядер ползучести $K(t, \tau) = \partial C(t, \tau) / \partial \tau$ подробно исследовано в работах [2,3,10].

Второе интегральное уравнение (3.14), которому должна удовлетворять $p(x, t)$ как функция аргумента x, представляет собой сингулярное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с ядром

$$K(s, x) = |s - x|^{\mu-1} \qquad (0 < \mu < 1)$$

и с правой частью $\omega(x, t)$, которая является решением первого интегрального уравнения (3.13) и может быть рассмотрено при каждом фиксированном t как основное интегральное уравнение некоторой плоской контактной задачи нелинейной теории упругости, метод решения которого приводится ниже в пп. 2°—4° настоящего параграфа. Отметим, что при $t = \tau_1$ из общего решения основных уравнений плоской контактной задачи нелинейной теории ползучести (3.13) и (3.14) непосредственно получается решение контактной задачи теории пластичности со степенным упрочнением материала, данное в работе [9].

В самом деле, при $t = \tau_1$ согласно (3.13) имеем

$$\omega(x, \tau_1) = \omega(x) = [\gamma - f_0(x)]^{\mu}$$

и интегральное уравнение (3.14) примет вид:

$$\int_S \frac{p(s)\,ds}{|s - x|^{1-\mu}} = [\gamma - f_0(x)]^{\mu} \qquad (3.15)$$

которое, как показано в работе [9], и является основным интегральным уравнением плоской контактной задачи теории пластичности со степенным упрочнением материала.

Если $C(t, \tau) \equiv 0$ и $\gamma(t) = \gamma = \text{const}$, т. е. материал сжимаемых тел не обладает ползучестью, то вновь приходим к контактной задаче нелинейной упругости, описываемой уравнением (3.15).

2°. Решение основного интегрального уравнения (3.14) *плоской контактной задачи нелинейной теории ползучести.* Пусть первоначальное касание сжимаемых тел в плоскости xy происходит в одной точке, которую примем за начало координат (фиг. 2).

Положим далее, что областью контакта S между этими телами, которая в общем случае будет переменной во времени, является отрезок оси ox, $-a(t) \leqslant x \leqslant +a(t)$.

Тогда основное интегральное уравнение (3.14) плоской контактной задачи примет вид:

$$\int_{-a(t)}^{+a(t)} \frac{p(s, t)\,ds}{|s - x|^{1-\mu}} = \omega(x, t) \qquad (3.16)$$

где $\omega(x, t)$ — решение интегрального уравнения Вольтерра (3.13), которое подробно исследовано для различных случаев ядер ползучести $K(t, \tau) = \partial C(t, \tau) / \partial \tau$ в работах [2,3,10]; поэтому здесь на этом останавливаться не будем, полагая в дальнейшем, что $\omega(x, t)$ известно или может быть найдено методами, развитыми в этих работах.

Как уже указывалось, $\omega(x, t)$, будучи непрерывной функцией в области $-a(t) \leqslant x \leqslant a(t)$ и $\tau_1 \leqslant t \leqslant \infty$, зависит также от неизвестной функции $\gamma(t)$, входящей в правую часть интегрального уравнения Вольтерра (3.13), т. е. $\omega(x, t) = \omega^*[x, t, \gamma(t)]$.

Ограничения, налагаемые на $\omega(x,t)$, а также уравнения, определяющие $\gamma(t)$ будут даны в дальнейшем.

Уравнение (3.16) впервые было изучено Карлеманом [11]. В недавно опубликованной работе Н. И. Ахиезера и В. А. Щербиной [12] дан другой способ решения этого уравнения при помощи формул обращения сингулярных интегралов.

В настоящей работе для решения сингулярного интегрального уравнения (3.16) пользуемся методом, предложенным М. Г. Крейном [13] для решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го и 2-го рода с ядрами вида

$$K(s,x)=H(|s-x|) \tag{3.17}$$

Этот метод позволяет получить решение таких уравнений в замкнутой форме для ряда других ядер вида (3.17). Более того, для известных случаев применение этого метода дает решения, которые отличаются от известных тем, что в них отсутствуют сингулярные интегралы, берущиеся в смысле Коши.

Следует указать, что свободное от сингулярных интегралов решение уравнения контактной задачи линейной теории упругости впервые было получено Н. А. Ростовцевым [14].

Обозначим через $g(s,a)$ решение уравнения (3.16) при $\omega(x,t)=1$. Тогда общее решение уравнения (3.16) согласно [13] выразится формулой

$$p(x,t)=\frac{1}{2M'(a)}\left[\frac{d}{da}\int_{-a}^{+a} g(s,a)\,\omega(s,t)\,ds\right]g(x,a)- \tag{3.18}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x}^{a} g(x,u)\frac{d}{du}\left[\frac{1}{M'(u)}\frac{d}{du}\int_{-u}^{+u} g(s,u)\,\omega(s,t)\,ds\right]du-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_{x}^{a}\frac{g(x,u)\,du}{M'(u)}\int_{-u}^{+u} g(s,u)\,\omega'(s,t)\,ds$$

Здесь

$$M(u)=\int_0^u g(s,u)\,ds, \qquad \omega'(s,t)=\frac{\partial\omega(s,t)}{\partial s} \tag{3.19}$$

$2a=2a(t)$ — ширина контакта, которая, вообще говоря, зависит от времени t, но t, для упрощения записи, в (3.18) опущено, $\gamma(t)$ — неизвестная функция от t, входящая в правую часть интегрального уравнения (3.13), в силу чего

$$\omega(x,t)=\omega^*[x,t,\gamma(t)]$$

Если ширина контакта $2a(t)=2a$ задана, то $\gamma(t)$ определяется из уравнения равновесия

$$P=\int_{-a}^{+a} p(x,t)\,dx \tag{3.20}$$

где P — равнодействующая внешних сил, действующих на сжимаемое тело, причем при выводе уравнения (3.16) предполагалось, что P перпендикулярно к оси x и проходит через начало координат.

Допустим теперь, что связи, препятствующие поворотам сжимаемых тел, отсутствуют. Составим основное уравнение контактной задачи при этих условиях.

Соотношение (3.1), связывающее перемещение граничных точек сжимаемых тел $v_1(t)$ и $v_2(t)$, получено в предположении, что при сжатии эти тела совершают лишь только поступательные перемещения $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ в направлении оси oy и что между ними происходит при этом сближении, равное $\delta(t) = \delta_1(t) + \delta_2(t)$.

Пусть теперь при сжатии эти тела, кроме поступательных перемещений $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ вдоль оси y, совершают еще поворот относительно начала координат соответственно на углы $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$, причем положительным направлением которых будем считать повороты против часовой стрелки. Тогда между граничными точками сжимаемых тел, имеющими абсциссу x, произойдет дополнительное сближение, равное $\alpha_0(t)x$, где $\alpha_0(t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t)$. Чтобы получить для этого случая условие, которому должны удовлетворять перемещения точек контакта сжимаемых тел $v_1(t)$ и $v_2(t)$, надо в соотношении (3.1) постоянное сближение $\delta(t)$ заменить переменным сближением $\delta_0(t) + \alpha_0(t)x$. Поэтому будем иметь

$$v_1(t) + v_2(t) = \delta(t) + \alpha_0(t)x - f_1^*(x) - f_2^*(x) \tag{3.21}$$

Подставляя в (3.21) выражения для $v_1(t)$ и $v_2(t)$ из (3.10), придем к тому же интегральному уравнению (3.12) с той лишь разницей, что в правой части его вместо функции $F(x, t, \gamma(t)) = [\gamma(t) + f_0(x)]^\mu$ будет

$$F[x, t, \gamma(t), \alpha(t)] = [\gamma(t) + \alpha(t)x - f_0(x)]^\mu \tag{3.22}$$

где

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_0(t)}{A_1 + A_2}, \qquad f_0(x) = \frac{f_1^*(x) + f_2^*(x)}{A_1 + A_2} \tag{3.23}$$

и решение интегрального уравнения Вольтерра (3.13), которое по-прежнему обозначим через $\omega(x, t)$, будет содержать не одну, а две неизвестные функции: $\gamma = \gamma(t)$ и $\alpha = \alpha(t)$, т. е. в этом случае $\omega(x, t) = \omega^*[x, t, \gamma(t), \alpha(t)]$, при этом значения функций $\gamma(t)$ и $\alpha(t)$ при заданной ширине контакта $2a$ определяются из уравнений равновесия

$$P = \int_{-a}^{+a} p(x, t)\,dx, \qquad M_0 = \int_{-a}^{a} p(x, t)\,x\,dx \tag{3.24}$$

где P — сумма проекций на ось y всех внешних сил, действующих на сжимаемое тело, а M_0 — момент этих же сил относительно начала координат.

Отметим, что, как следует из работы [13], формула (3.18) доставляет единственное интегрируемое решение уравнения (3.14), если $M'(a) \neq 0$ $(0 < a < b)$, где b — некоторая конечная постоянная, а функция $\omega(x, t)$ — дифференцируемая и такая, что после подстановки ее в формулу (3.18) интегралы, содержащие эту функцию, имели бы смысл.

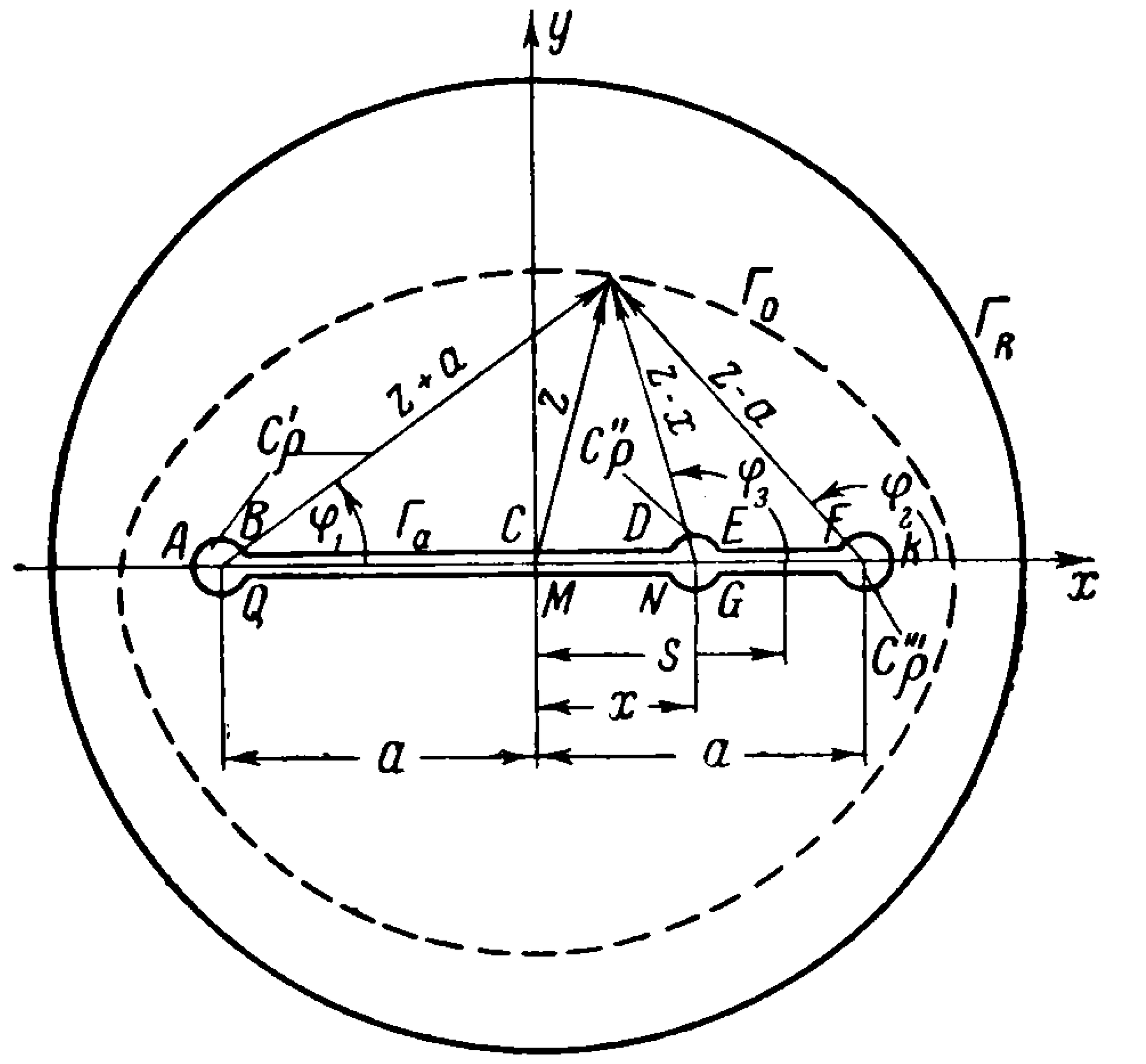
Перейдем к определению функции $g(s, a)$, т. е. к решению сингулярного интегрального уравнения

$$\int_{-a}^{+a} \frac{g(s, a)\,ds}{|s - x|^{1-\mu}} = 1 \tag{3.25}$$

Для этого, следуя идее М. Г. Крейна [15], рассмотрим интеграл

$$I_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2-a^2)^{1/2\mu}(z-x)^{1-\mu}} \tag{3.26}$$

взятый по контуру, составленному из наружной окружности Γ_R радиуса R и внутреннего контура $ABCDEFKLGNMQA$, который обозначим через Γ_a (фиг. 3).



Фиг. 3

Прежде всего нетрудно убедиться, что подынтегральная функция

$$f^\circ(z) = \frac{1}{f(z)} = (z^2-a^2)^{1/2\mu}(z-x)^{1-\mu}$$
$$(0<\mu<1)$$

на внешнем отрезке $(-a, a)$ распадается на три одинаковые ветви. В самом деле, положим $\varphi_1 = \arg(z+a)$, $\varphi_2 = \arg\,(z-a)$ и $\varphi_3 = \arg\,(z-x)$. При обходе против часовой стрелки произвольного замкнутого контура Γ_0, изображенного пунктиром на фиг. 3, φ_1, φ_2 и φ_3 получат приращения 2π, а следовательно, $\arg f(z) = {}^1/_2(\varphi_1+\varphi_2)\mu + \varphi_3(1-\mu)$ получит приращение 2π и $f(z)$ возвратится к исходному значению.

Будем рассматривать ту ветвь функций $f(z)$, которая на верхнем берегу $(-a, a)$ примет положительное значение, т. е.

$$(z-x)^{1-\mu} > 0, \qquad (z^2-a^2)^{1/2\mu} > 0 \quad \text{при } z>0$$

Тогда согласно теореме Коши для многосвязных областей имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_a} f(z)\,dz = 0 \tag{3.27}$$

где

$$f(z) = (z-a)^{-1/2\mu}(z+a)^{-1/2\mu}(z-x)^{\mu-1} \tag{3.28}$$

Но интегралы по малым окружностям C_ρ', C_ρ'' и C_ρ''' стремятся, очевидно, к нулю при $\rho\to 0$, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{+a}^{-a} f(s+i0)\,ds + \int\limits_{-a}^{+a} f(s-i0)\,ds\right] \tag{3.29}$$

Здесь $f(s+i0)$ и $f(s-i0)$ — значения функций $f(z)$ на верхнем и нижнем берегах отрезка $(-a, a)$.

Но замечая, что $f(s-i0) = \overline{f(s+i0)}$ (где черточкой обозначается сопряженная функция), и меняя во втором интеграле соотношения (3.29) направление интегрирования, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{+a} \operatorname{Im} f(s+i0)\,ds \tag{3.30}$$

Вычислим контурный интеграл

$$I_1 = \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz \tag{3.31}$$

где $f(z)$ выражается формулой (3.28). Для этого воспользуемся разложением нашей ветви $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Согласно (3.28) имеем

$$f(z) = \frac{1}{ze^{i\pi}}\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)^{-1/2\mu}\left(1-\frac{x}{z}\right)^{\mu-1} \tag{3.32}$$

где $(1-a^2/z^2)^{-1/2\mu}$ и $(1-x/z)^{\mu-1}$ означают те ветви этих функций, которые положительны на отрезке (a, ∞) оси x. Разлагая последние по формуле бинома, найдем вычет выбранной ветви $f(z)$ в бесконечно удаленной точке. Он будет равен $-e^{-i\pi}$ (коэффициенту при $1/z$ с обратным знаком). Тогда на основании теоремы о вычетах получим

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = -2\pi i\, e^{-i\pi} = 2\pi i \tag{3.33}$$

Подставляя значение этого интеграла в соотношение (3.30), находим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a} \operatorname{Im} f(s+i0)\,ds = -1 \tag{3.34}$$

Далее согласно (3.28) и фиг. 3 имеем

$$\begin{aligned} f(s+i0) &= \exp\left(-\frac{i\pi\mu}{2}\right)\frac{(a^2-s^2)^{-1/2\mu}}{(s-x)^{1-\mu}} \qquad \text{при } x < s+i0 < a \\ f(s+i0) &= \exp\left(-\frac{i\pi\mu}{2}\right)\frac{(a^2-s^2)^{-1/2\mu}}{e^{i\pi(1-\mu)}(x-s)^{1-\mu}} \qquad \text{при } -a < s+i0 < x \end{aligned} \tag{3.35}$$

Подставляя выражение для $f(s+i0)$ из (3.35) в (3.34), после преобразования окончательно получим

$$\int_{-a}^{+a} \sin\frac{\pi\mu}{2}\,\frac{(a^2-s^2)^{-1/2\mu}}{\pi\,|s-x|^{1-\mu}}\,ds = 1 \tag{3.36}$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$g(s, a) = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi\mu}{2}(a^2-s^2)^{-1/2\mu} = \frac{\sin{}^1/_2\,\pi\mu}{\pi\sqrt{(a^2-s^2)^{\mu}}} \tag{3.37}$$

и является решением интегрального уравнения (3.25).

Пользуясь формулами (3.19) и (3.37), для $M(s)$ получим

$$M(s) = \frac{2\sqrt{\pi}\, s^{1-\mu}}{(1-\mu)\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)} \tag{3.38}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма функция.

Ниже при исследовании напряженного состояния в сжимаемых телах, находящихся в условиях нелинейной ползучести, будем отдельно рассматривать случай симметричного и кососимметричного нагружения этих тел. Это, во-первых, сделает более обозримым полученные формулы и, во-вторых, каждое из этих нагружений представляет самостоятельное значение, так как соответствует определенной характерной деформации этих тел. Следует отметить, что случай произвольного нагружения сжимаемых тел не может быть получен, как это следует из (3.18), (3.13) и (3.22), путем наложения указанных выше двух случаев и должен быть решен отдельно как задача самостоятельная при помощи общих формул (3.18), (3.13), (3.22) и (3.24).

3°. Симметричная задача о контакте двух тел в условиях нелинейной ползучести. Пусть как поверхности, ограничивающие сжимаемые тела, так и внешние силы, действующие на них, симметричны относительно оси oy. Тогда уравнения этих поверхностей $y = f_1^*(x)$ и $y = -f_2^*(x)$ будут четными функциями x, в силу чего правая часть разрешающего интегрального уравнения (3.12) контактной задачи $F(x, t, \gamma)$ будет также четной функцией; в силу четности функций $g(x, a)$ и $\omega(x, t)$ последний член правой части формулы (3.18) пропадет и она примет вид:

$$p(x,t) = \frac{1}{M'(a)}\left[\frac{d}{da}\int_0^a g(s,a)\,\omega(s,t)\,ds\right]g(x,a) - \tag{3.39}$$

$$-\int_x^a g(x,u)\frac{d}{du}\left[\frac{1}{M'(u)}\frac{d}{du}\int_0^u g(s,u)\,\omega(s,t)\,ds\right]du \qquad \left(M(a) = \int_0^a g(s,a)\,ds\right)$$

Заметим, что при вычислениях второй интеграл в (3.39) удобно иногда представить в преобразованном виде на основании формулы [13]

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{M'(s)}\frac{dI}{ds}\right] = \frac{1}{M(s)}\frac{d}{ds}\left[\frac{M^2(s)}{M'(s)}\frac{d}{ds}\left(\frac{I}{M(s)}\right)\right] \tag{3.40}$$

Подставляя выражения для $g(s, a)$ и $M(s)$ из (3.37) и (3.38) в (3.39) и пользуясь равенством (3.40), после преобразований получим

$$p(x,t) = K(\mu)\left\{\frac{a^\mu\,\Phi_1'(a,t,\gamma)}{\sqrt{(a^2-x^2)^\mu}} - \int_x^a \frac{du}{\sqrt{(u^2-x^2)^\mu}}\frac{d}{du}\left[u^\mu\,\Phi_1'(u,t,\gamma)\right]\right\} \tag{3.41}$$

Здесь

$$\Phi_1(u,t,\gamma) = \int_0^u \frac{\omega(s,t)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^\mu}}, \qquad \Phi_1'(u,t,\gamma) = \frac{d}{du}\int_0^u \frac{\omega(s,t)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^\mu}} \tag{3.42}$$

$$K(\mu) = \frac{\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi\mu}{2}\right)}{(1-\mu)\,\pi^2\sqrt{\pi}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi\mu}{2}\right)^2}{2\sqrt{\pi}\,\pi^2} \tag{3.43}$$

$2a = 2a(t)$ — переменная ширина контакта, причем $-a(t) \leqslant x \leqslant a(t)$, а $\gamma = \gamma(t)$ — неизвестная функция t, входящая в правую часть интегрального уравнения (3.13) и подлежащая определению в дальнейшем. Напомним, что $\omega(x,t) = \omega^*[x, t, \gamma(t)]$. Заменой $s = u\sin\varphi$ выражение для $\Phi_1(u, t, \gamma)$ из (3.42) можно представить в виде следующего интеграла с постоянными пределами:

$$\Phi_1(u,t,\gamma) = u^{1-\mu}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \omega(u\sin\varphi, t)\cos^{1-\mu}\varphi\,d\varphi \tag{3.44}$$

Предполагая существование непрерывной и ограниченной производной $\omega(s, t)$ при $s > 0$, после дифференцирования под знаком интеграла (3.44) получим

$$u\Phi_1'(u,t,\gamma) = (1-\mu)\,\Phi_1(u,t,\gamma) + \int_0^u \frac{\omega'(s,t)\,s\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^\mu}} \tag{3.45}$$

Интегрируя последнее слагаемое по частям и замечая, что $\omega'(0, t) = 0$, соотношение (3.45) приведем к виду

$$u\Phi_1'(u,t,\gamma) = (1-\mu)\,\Phi_1(u_1,t,\gamma) + \frac{1}{2-\mu}\int_0^u (u^2-s^2)^{1-1/2\mu}\omega''(s,t)\,ds \tag{3.46}$$

Отсюда, дифференцируя, имеем

$$\frac{d}{du}\left[u^{\mu}\Phi_1'(u, t, \gamma)\right] = u^{\mu-1}\frac{d}{du}\int_0^u \frac{\omega'(s, t)\, s ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}} \tag{3.47}$$

Произведя интегрирование по частям в правой части равенств (3.47) и дифференцируя затем по u, в силу четности $\omega(x, t)$ находим

$$\frac{d}{du}\left[u^{\mu}\Phi_1'(u, t, \gamma)\right] = u^{\mu}\int_0^a \frac{\omega''(s, t)\, ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}} \tag{3.48}$$

Подставляя это выражение в (3.41), для $p(x, t)$ получим окончательно следующую формулу:

$$p(x, t) = K(\mu)\left\{\frac{a^{\mu}\Phi_1'(a, t, \gamma)}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}} - \int_x^a \frac{u^{\mu} du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}\int_0^u \frac{\omega''(s, t)\, ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}\right\} \tag{3.49}$$

Здесь $\omega(x, t)$ — решение интегрального уравнения Вольтерра (3.13), которое будет функцией неизвестной $\gamma = \gamma(t)$, т. е. $\omega(x, t) = \omega^*[x, t, \gamma(t)]$, а ширина контакта $2a$ в общем случае зависит от времени t.

В формуле (3.49) первый член представляет решение с особенностями в точках $x = \pm a$ и подлежит сохранению только в случае заданной ширины контакта $2a(t) = 2a$, при этом неизвестная функция $\gamma = \gamma(t)$ определяется из уравнения равновесия

$$P = 2\int_0^a p(x, t)\, dx \tag{3.50}$$

Второй же член этой формулы представляет собой непрерывную часть этого решения. Подставляя выражение для $p(x, t)$ из (3.49) в уравнение равновесия (3.50), получим

$$P = 2K(\mu)\left\{a\Phi_1'(a, t, \gamma)\frac{\sin {}^1/_2\pi\mu}{2(1-\mu)K(\mu)\pi} - \int_0^a dx\int_x^a \frac{u^{\mu} du}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}\int_0^u \frac{\omega''(s, t)\, ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}\right\} \tag{3.51}$$

Здесь использовано значение интеграла

$$I_2(u) = \int_0^u \frac{ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}} = \frac{M(u)\pi}{2\sin {}^1/_2\pi\mu} = \frac{\sin {}^1/_2\pi\mu\, u^{1-\mu}}{2(1-\mu)K(\mu)\pi} \tag{3.52}$$

Меняя порядок интегрирования в последнем слагаемом выражения (3.51) и пользуясь равенствами (3.52) и (3.43), имеем

$$P = \frac{\sin {}^1/_2\pi\mu}{(1-\mu)\pi}\left\{a\Phi_1'(a, t, \gamma) - \int_0^a u\, du\int_0^u \frac{\omega''(s, t)\, ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}}\right\} \tag{3.53}$$

или, еще раз меняя порядок интегрирования и замечая, что

$$\int_s^a \frac{u du}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}} = \frac{(a^2-s^2)^{1-{}^1/_2\mu}}{(2-\mu)} \tag{3.54}$$

находим

$$P = \frac{\sin {}^1/_2 \pi\mu}{(1-\mu)\pi} \left\{a\Phi_1'(a, t, \gamma) - \frac{1}{2-\mu} \int_0^a (a^2 - s^2)^{1-{}^1/_2\mu} \omega''(s, t)\, ds\right\} \tag{3.55}$$

Пользуясь далее соотношением (3.46), уравнению (3.55) можно окончательно придать следующий вид:

$$\Phi_1(a, t, \gamma) = \frac{P\pi}{\sin {}^1/_2 \pi\mu}, \qquad \Phi_1(a, t, \gamma) = \int_0^a \frac{\omega(s, t)\, ds}{\sqrt{(a^2 - s^2)^\mu}} \tag{3.56}$$

где $\omega(x, t)$ — решение интегрального уравнения Вольтерра (3.13) с правой частью

$$F(x, t, \gamma) = [\gamma(t) - f_0(x)]^\mu \qquad \left(f_0(x) = \frac{f_1^*(x) + f_2^*(x)}{A_1 + A_2}\right)$$

а A_1 и A_2 — физические константы, определяемые по формулам (3.11).

Таким образом, когда ширина контакта $2a(+) = 2a$ задана, то неизвестная функция $\gamma = \gamma(t)$, входящая в формулу для $p(x, t)$ (3.49), определяется из уравнения (3.56). Когда же ширина контакта $2a(t)$ не задана и контакт происходит по плавным поверхностям, то тогда неизвестная функция $\gamma = \gamma(t)$ определяется из требования, чтобы в формуле (3.49) первый член, представляющий решение с особенностями, исчез, т. е.

$$\Phi_1'(a, t, \gamma) = \frac{d}{da} \int_0^a \frac{\omega(s, t)\, ds}{\sqrt{(a^2 - s^2)^\mu}} = 0 \tag{3.57}$$

Здесь $\omega(s, t)$ — решение уравнения (3.13), а $2a = 2a(t)$ — переменная ширина контакта. Таким образом, когда ширина контакта $2a = 2a(t)$ не задана, то функция $\gamma = \gamma(t)$ определяется из уравнения (3.57).

После того как из уравнения (3.57) определена функция $\gamma = \gamma(t)$, переменную ширину контакта $2a(t)$ находим при помощи уравнения равновесия (3.50). Подставляя выражение для $p(x, t)$ из (3.49) в (3.50) и учитывая (3.57), после применения формулы Дирихле, получим

$$\Phi_1(a, t, \gamma) = \frac{P\pi}{\sin {}^1/_2 \pi\mu} \tag{3.58}$$

где $\Phi_1(a, t, \gamma)$ определяется формулой (3.42).

Следовательно, уравнение (3.58) для определения переменной ширины контакта $2a(t)$ тождественно совпадает с уравнением (3.56) для определения функции $\gamma = \gamma(t)$, когда ширина контакта $2a(t) = 2a$ задана.

В качестве приложения рассмотрим контактную задачу о давлении жесткого штампа с прямолинейным основанием, заданной шириной $2a$ на полуплоскость в условиях нелинейной ползучести. В этом случае

$$f_0(x) = 0, \qquad F(x, t, \gamma) = \gamma^\mu(t) \tag{3.59}$$

Тогда решение интегрального уравнения Вольтерра (3.13) $\omega(x, t)$ не будет зависеть от x и может быть представлено в виде

$$\omega(t) = \gamma^\mu(t) + \int_{\tau_1}^t \gamma^\mu(\tau) R(t, \tau)\, d\tau \tag{3.60}$$

Подставляя значение $\omega(t)$ из (3.60) в уравнение (3.56) и пользуясь равенством (3.52), для определения функции $\gamma = \gamma(t)$ получим

$$\gamma^{\mu}(t) + \int_{\tau_1}^{t} \gamma^{\mu}(\tau) R(t, \tau) d\tau = \frac{2P\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{a^{1-\mu}\sqrt{\pi}} \tag{3.61}$$

Из уравнений (3.60) и (3.61) непосредственно следует, что решение (3.13) уравнения $\omega(t)$ не зависит также и от времени t, т. е.

$$\omega(t) = \omega_0 = \frac{2P\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{a^{1-\mu}\sqrt{\pi}} \tag{3.62}$$

$$\gamma^{\mu}(t) = \frac{2P\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{a^{1-\mu}\sqrt{\pi}}[1 + C(t, \tau_1)], \tag{3.63}$$

где $C(t, \tau)$ — мера ползучести материала полуплоскости.

Подставляя значение $\omega(t) = \omega_0$ из (3.62) в (3.49) и замечая, что согласно (3.45) и (3.56)

$$\Phi_1'(a, t, \gamma) = \frac{1-\mu}{a} \frac{P\pi}{\sin {}^1/_2 \pi\mu} \tag{3.64}$$

Для определения давления $p(x, t)$ на площадку контакта под штампом получим окончательно следующую формулу:

$$p(x, t) = p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\sin\frac{\pi\mu}{2}}{a^{1-\mu}\sqrt{\pi}} \frac{P}{\pi\sqrt{(a^2 - x^2)^{\mu}}} \tag{3.65}$$

Из полученного решения (3.65) очевидно, что если контакт между сжимаемыми телами происходит по прямой, то ползучесть материала этих тел не оказывает влияния на закон распределения усилия в области контакта и совпадает со значением усилия, соответствующим плоской контактной задаче теории пластичности со степенным упрочнением [9].

При $\mu = 1$, т. е. в условиях линейной ползучести, формула (3.65) принимает вид:

$$p(x, t) = p(x) = \frac{P}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \tag{3.66}$$

что совпадает с известными решениями [1,16] плоской контактной задачи линейной теории ползучести и линейной теории упругости, которые в данном случае, очевидно, тождественно совпадают.

В заключение заметим, что если контакт между сжимаемыми телами происходит не по прямой линии, а по криволинейным поверхностям, то ползучесть материала, как это следует из формул (3.49) и (3.13), будет существенно влиять на картину распределения контактных усилий.

4°. *Кососимметричная задача о контакте двух тел в условиях нелинейной ползучести.* При кососимметричной нагрузке правая часть (3.13)

$$F(x, t, \alpha) = [\alpha(t)x - f_0(x)]^{\mu} \qquad \left(f_0(x) = \frac{f_1^*(x) + f_2^*(x)}{A_1 + A_2}\right) \tag{3.67}$$

(где $\alpha(t)$ — некоторая функция от t, подлежащая определению в дальнейшем; $f_0(x)$ — нечетная функция, а A_1 и A_2 — физические константы, определяемые по формулам (3.11)) согласно (3.22) будет нечетной функцией в области контакта сжимаемых тел $-a(t) \leqslant x \leqslant a(t)$ (в этом случае $\gamma = \gamma(t)$ равно нулю), поэтому решение ее $\omega(x, t)$ будет также нечетной функцией и тогда в правой части формулы (3.18) первые два члена пропадут и она примет следующий вид:

$$p(x, t) = -\frac{d}{dx}\int_x^a \frac{g(x_1 u)}{M'(u)} du \int_0^u g(s, u)\,\omega'(s, t)\,ds \tag{3.68}$$

Подставляя выражение для $g(s, a)$ и $M(s)$ из (3.37) и (3.38) в (3.68), получим

$$p(x, t) = -\frac{K(\mu)}{2-\mu}\frac{d}{dx}\int_x^a \frac{d}{du}\left[(u^2 - x^2)^{1-{}^1\!/_2\mu}\right] u^{\mu-1}\Phi_2(u, t, \alpha)\,du \tag{3.69}$$

Здесь

$$\Phi_2(u, t, \alpha) = \int_0^u \frac{\omega'(s, t)\,ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^\mu}}, \qquad \Phi_2'(u, t, \alpha) = \frac{d}{du}\int_0^u \frac{\omega'(s, t)\,ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^\mu}} \tag{3.70}$$

Величина $K(\mu)$ определяется равенством (3.43), а $\omega(x, t) = \omega^*[x, t, a(t)]$ представляет собой решение интегрального уравнения Вольтерра (3.13) с правой частью (3.67).

Из соотношений (3.67) и (3.70) следует, что $p(x, t)$ является нечетной функцией, поэтому достаточно ее определить в интервале $0 \leqslant x \leqslant a(t)$, так как $p(-x, t) = -p(x, t)$.

Заметим, что функция $\omega(x, t)$, являясь решением уравнения (3.13), зависит также от неизвестной функции $\alpha = \alpha(t)$, которая здесь для простоты письма опускается, т. е. $\omega(x, t) = \omega^*[x, t, a(t)]$.

Интегрируя правую часть равенства (3.69) по частям, а затем дифференцируя по x, получим

$$p(x, t) = K(\mu)\left\{\frac{a^{\mu-1}x\Phi_2(a, t, \alpha)}{\sqrt{(a^2 - x^2)^\mu}} + x\int_x^a \frac{u^{\mu-2}\left[(1-\mu)\Phi_2(u, t, \alpha) - u\Phi'_2(u, t, \alpha)\right] du}{\sqrt{(u^2 - x^2)^\mu}}\right\}. \tag{3.71}$$

Но по аналогии с (3.45) в этом случае имеем

$$u\Phi_2'(u, t, \alpha) = (1-\mu)\Phi_2(u, t, \alpha) + \int_0^u \frac{\omega''(s, t)\,s\,ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^\mu}} \tag{3.72}$$

Подставляя это выражение в (3.71), для $p(x, t)$ получим окончательно следующую формулу:

$$p(x, t) = K(\mu)\left\{\frac{a^{\mu-1}x\Phi_2(a, t, \alpha)}{\sqrt{(a^2 - x^2)^\mu}} - x\int_x^a \frac{u^{\mu-2}du}{\sqrt{(u^2 - x^2)^\mu}}\int_0^u \frac{\omega''(s, t)\,s\,ds}{\sqrt{(u^2 - s^2)^\mu}}\right\} \tag{3.73}$$

В формуле (3.73) первый член представляет решение с особенностями в точках $x = \pm a$ и подлежит сохранению только в случае заданной ширины контакта $2a(t) = 2a$, при этом значение функции $\alpha = \alpha(t)$ определяется из уравнения равновесия

$$M_0 = 2\int_0^a p(x, t)\,x\,dx \tag{3.74}$$

Подставляя $p(x, t)$ из (3.71) в уравнение (3.74), получим

$$M_0 = 2K(\mu)\left\{\frac{a^2}{2}\Phi_2(\alpha, t, \alpha) B\left(1-\frac{\mu}{2}, \frac{3}{2}\right) + \right. \\ \left. + \int_0^a x^2 dx \int_x^a \frac{u^{\mu-2}[(1-\mu)\Phi_2(u, t, \alpha) - u\Phi_2'(u, t, \alpha)]\, du}{\sqrt{(u^2-x^2)^\mu}}\right\} \tag{3.75}$$

Здесь использовано значение интеграла

$$I_3(u) = \int_0^u \frac{s^2 ds}{\sqrt{(u^2-s^2)^\mu}} = \frac{1}{2} B\left(1-\frac{\mu}{2}, \frac{3}{2}\right) u^{3-\mu}, \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{3.76}$$

Меняя порядок интегрирования во втором слагаемом соотношения (3.75) и пользуясь равенством (3.76), находим

$$M_0 = K(\mu) B\left(1-\frac{\mu}{2}, \frac{3}{2}\right)\left\{a^2\Phi_2(a, t, \alpha) + \right. \\ \left. + (1-\mu)\int_0^a u\Phi_2(u, t, \alpha)\, du - \int_0^a u^2\Phi_2'(u, t, \alpha)\, du\right\} \tag{3.77}$$

Интегрируя последнее слагаемое в правой части (3.77) по частям, затем меняя порядок интегрирования и пользуясь равенствами (3.52) и (3.43), окончательно получим следующее уравнение, связывающее значения функций $\alpha = \alpha(t)$ с моментом внешних сил:

$$M_0 = \frac{\sin {}^1/_2 \pi\mu}{\pi(1-\mu)(2-\mu)}\int_0^a (a^2-s^2)^{1-{}^1/_2\mu}\, \omega'(s, t)\, ds \tag{3.78}$$

Таким образом, когда ширина контакта $2a(t) = 2a$ задана, то неизвестная функция $\alpha = \alpha(t)$, входящая в решение уравнения Вольтерра (3.13) $\omega(x, t) = \omega^*[x, t, \alpha(t)]$, определяется из уравнения (3.78).

Если же ширина контакта $2a(t)$ не задана и контакт происходит по плавным поверхностям, то неизвестная функция $\alpha = \alpha(t)$ определяется из требования, чтобы в формуле (3.73) первый член, представляющий решение с особенностями, исчез, т. е.

$$\Phi_2(a, t, \alpha) = \int_0^a \frac{\omega'(s, t)\, ds}{\sqrt{(a^2-s^2)^\mu}} = 0 \tag{3.79}$$

Следовательно, когда ширина контакта $2a(t)$ не задана, то $\alpha = \alpha(t)$ определяется из уравнения (3.79), а неизвестная ширина контакта $2a(t)$ — при помощи уравнения (3.78).

В качестве приложения рассмотрим контактную задачу о давлении жесткого штампа с плоским основанием заданной ширины $2a(t) = 2a$ на полуплоскость в условиях нелинейной ползучести, когда к середине штампа приложен момент, равный M_0.

В этом случае согласно (3.22) будем иметь

$$f_0(x) = 0, \qquad F(x, t, \alpha) = \alpha^\mu(t)\, x^\mu \tag{3.80}$$

Тогда решение интегрального уравнения Вольтерра (3.13) будет

$$\omega(x, t) = x^\mu\left(\alpha^\mu(t) + \int_{\tau_1}^t \alpha^\mu(\tau) R(t, \tau)\, d\tau\right) \tag{3.81}$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента ядра ползучести $K(t, \tau) = \partial c(t, \tau) / \partial\tau$.

Из уравнений (3.81) и (3.79), исключая $\alpha^{\mu}(t)$, непосредственно находим, что решение уравнения (3.13) $\omega(x, t)$ не зависит от t и равно

$$\omega(x) = \frac{4M_0(1-\mu)}{\mu a^2} x^{\mu} \tag{3.82}$$

Подставляя это значение $\omega(x)$ в (3.74) и замечая, что

$$\int\limits_0^u \frac{s^{\mu-1}}{\sqrt{(u^2-s^2)^{\mu}}} = \frac{\pi}{2\sin{}^1/_2\pi\mu} \tag{3.83}$$

приведем формулу (3.74) для $p(x, t)$ к виду (3.84)

$$p(x, t) = p(x) = \frac{2M_0\pi K(\mu)(1-\mu)}{a^2\sin{}^1/_2\pi\mu}\left\{\frac{a^{\mu-1}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}} + (1-\mu)x\int\limits_x^a \frac{u^{\mu-2}du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}\right\}$$

где $K(\mu)$ определяется соотношением (3.43).

Обозначим второй член в формуле (3.84) через $(1-\mu)I_4(x)$. Заметим, что $I_4(x)$, будучи нечетной функцией, непрерывна во всем интервале $-a \leqslant x \leqslant a$, за исключением $x = 0$, где $I_4(x)$ терпит разрыв; при этом имеем

$$I_4(+0) = -I_4(-0) = \lim_{x\to 0} x\int\limits_x^a \frac{u^{\mu-2}du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{\mu}}}, \qquad I_4(\pm a) = 0 \tag{3.85}$$

Интеграл $I_4(x)$ равномерно сходится относительно x в промежутке $0 \leqslant x \leqslant a$. В самом деле, интегрируя $I_4(x)$ по частям, получим

$$I_4(x) = \frac{a^{\mu-3}x(a^2-x^2)^{1-{}^1/_2\mu}}{2-\mu} + \frac{3-\mu}{2-\mu}x\int\limits_x^a \frac{(u^2-x^2)^{1-{}^1/_2\mu}}{u^{4-\mu}}du \tag{3.86}$$

Откуда сходимость $I_4(x)$ очевидна для значений $0 < x \leqslant a$.

При $x \to +0$ из соотношения (3.85) после замены переменной интегрирования $u = x/\xi$ и условия $\mu \leqslant 1$ непосредственно следует (3.87)

$$I_4(+0) = -I_4(-0) = \int\limits_0^1 (1-\xi^2)^{1-{}^1/_2\mu}d\xi = \frac{\pi\sqrt{\mu}}{(1-\mu)\sin{}^1/_2\pi\mu\,\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}$$

В дальнейшем условимся считать в точке $x = 0$

$$I_4(0) = \frac{I_4(+0) + I_4(-0)}{2} = 0 \tag{3.88}$$

Тогда формула (3.84) примет вид:

$$p(x) = \frac{2M_0\pi K(\mu)(1-\mu)}{a^2\sin{}^1/_2\pi\mu}\left\{\frac{a^{\mu-1}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}} + (1-\mu)I_4(x)\right\} \quad (0 < x \leqslant a) \tag{3.89}$$

при этом $p(0) = 0$.

Подставляя значение для $I_4(x)$ из (3.86) в (3.89) и разлагая числитель подынтегральной функции $(u^2-x^2)^{1-{}^1/_2\mu}$ по формуле бинома, после интегрирования получим

$$p(x) = \frac{2M_0\pi K(\mu)(1-\mu)}{a^2\sin{}^1/_2\pi\mu}\left\{\frac{a^{\mu-1}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}} + \frac{(1-\mu)a^{\mu-3}x(a^2-x^2)^{1-{}^1/_2\mu}}{2-\mu} + \right.$$

$$\left. + \frac{(3-\mu)(1-\mu)}{2-\mu}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\Gamma\left(K-2+\frac{\mu}{2}\right)}{(2K-1)\Gamma(K)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^{2k-1}\right]\right\} \tag{3.90}$$

Подставляя значение $K(\mu)$ из (3.43) в (3.91), для определения давления $p(x)$ на площадку контакта под штампом получим окончательную формулу:

$$p(x)=\frac{2M_0\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\sin\frac{\pi\mu}{2}}{a^2\pi\sqrt{\pi}}\left\{\frac{a^{\mu-1}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^{\mu}}}+\frac{(1-\mu)\,a^{\mu-3}x\,(a^2-x^2)^{1-{}^1\!/_2\mu}}{2-\mu}+\right.$$
$$\left.+\frac{(3-\mu)(1-\mu)}{(2-\mu)}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\Gamma\left(k-2+\frac{\mu}{2}\right)}{(2k-1)\,\Gamma(k)\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-1\right)}\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^{2k-1}\right]\right\} \qquad (3.91)$$

при этом $p(0)=0$ и $p(-x)=-p(x)$.

Из полученного решения (3.91) следует, что и в этом случае ползучесть материала сжимаемых тел не влияет на закон распределения контактных напряжений $p(x)$, так как контакт между этими телами происходит по прямой линии.

При $\mu=1$, т. е. в условиях линейной ползучести, формула для $p(x)$ (3.91) переходит в

$$p(x)=\frac{2M_0}{\pi a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad (3.93)$$

что совпадает с известным решением [1,17] контактной задачи линейной теории ползучести или линейной теории упругости (в данном случае они тождественно совпадают) для плоского штампа шириной $2a$, когда к середине его приложен момент M_0.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступила 7 V 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Прокопович И. Е. Плоская контактная задача с учетом ползучести. ПММ, т. XX, вып. 6, 1956.
2. Работнов Ю. Н. Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, № 10, 1948.
3. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952.
4. Turner F., Blomquist K. A study of the applicability of Robotnov's creep parameter for alliminium alloy. J. Aeronaut. Sci., XXIII, No. 12, 1956.
5. Жуков А М., Работнов Ю. Н., Чуриков Ф. С. Экспериментальная проверка некоторых теорий ползучести. Инженерный сборник, т. XVII, 1953.
6. Johnson A. The plastic, creep and relaxation of properties of metals. Aircraft Engineering, XXI, No. 239, 1949.
7. Шестериков С. А. Об одном условии для законов ползучести. Изв. Академии наук СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 1, 1959.
8. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехиздат, 1950.
9. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, вып. 2, 1959.
10. Розовский М. И. О нелинейных уравнениях ползучести и релаксаций материалов при сложном напряженном состоянии. Ж. техн. физики, XXV, вып. 13, 1955.
11. T. Carleman. Über die Abelche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen. Math. Zeischrift, 15, 1922.
12. Ахиезер Н. И. и Щербина В. А. Об обращении некоторых сингулярных интегралов. Записки математического отделения физико-математического факультета и Харьковского математического общества, т. XXV, сер. 4, 1957.
13. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, т. 100, № 3, 1955.
14. Ростовцев Н. А. К решению плоской контактной задачи. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953.
15. Крейн М. Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. Докл. АН СССР, т. 94, № 6, 1954.
16. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.
17. Флорин В. А. Основы механики грунтов, т. 1, Госстройиздат, Л.—М., 1959.