Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О РАВНОВЕСНЫХ ТРЕЩИНАХ, ОБРАЗУЮЩИХСЯ ПРИ ХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ. УСТОЙЧИВОСТЬ ИЗОЛИРОВАННЫХ ТРЕЩИН. СВЯЗЬ С ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ТЕОРИЯМИ

Г. И. Баренблатт

(Москва)

§ 1. 1°. Пусть прямолинейная трещина в бесконечной плоской пластинке поддерживается в раскрытом состоянии разрывающими нагрузками, симметричными относительно прямой, вдоль которой располагается трещина, и относительно центра трещины. Как было показано ранее [1], полудлина такой трещины l определяется соотношением [1]

$$\int_0^l \frac{p(x)\,dx}{\sqrt{l^2-x^2}} = \frac{K}{\sqrt{2l}} \tag{1.1}$$

где K — модуль сцепления [1,2], координата x отсчитывается вдоль трещины от ее центра, $p(x)$ — распределение нормальных напряжений, возникающих на оси x в сплошной пластинке без трещины под действием тех же нагрузок. Функция $p(x)$ элементарно находится при заданных нагрузках и может поэтому считаться известной.

Предположим, что действующие нагрузки пропорциональны некоторому параметру λ; очевидно, что и $p(x)$ будет пропорциональна λ, так что $p(x) = \lambda f(x)$.

Переходя к безразмерной переменной $\xi = x/l$, приводим соотношение (1.1) к виду

$$\Phi(l) = \sqrt{l}\int_0^1 \frac{f(l\xi)\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{K}{\sqrt{2}\lambda} \tag{1.2}$$

Далее, радиус R круглой трещины в бесконечном теле, поддерживаемой в раскрытом состоянии осесимметричной и симметричной относительно плоскости трещины разрывающей нагрузкой, определяется соотношением [2]

$$\int_0^R \frac{r p(r)\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}} = K\sqrt{\frac{R}{2}} \tag{1.3}$$

---

[1] Отметим, что все рассмотрение в работе [1] было проведено для случая плоской деформации (толстые пластинки). Для пересчета результатов на случай обобщенного плоского напряженного состояния (тонкие пластинки) достаточно заменить $E/(1-\nu^2)$ на E и K на $K_1 = K\sqrt{1-\nu^2}$. В частности, формула для длины трещины в задаче о расклинивании пластинки принимает в случае обобщенного плоского напряженного состояния вид

$$L = \frac{E^2h^2}{4K^2}$$

где $p(r)$ — распределение нормальных напряжений в плоскости симметрии нагрузки для сплошного тела без трещины, возникающее под действием той же нагрузки. Если снова действующие нагрузки пропорциональны параметру λ, то и функция $p(r)$ пропорциональна параметру λ, так что $p(r)=\lambda f(r)$ и соотношение (1.3) приводится к виду

$$\Phi(R)=\sqrt{R}\int_0^1 \frac{\xi f(R\xi)\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{K}{\sqrt{2}\lambda} \tag{1.4}$$

Таким образом, в обоих случаях соотношение, определяющее размер трещины, имеет вид:

$$\Phi(c)=K/\sqrt{2}\lambda \tag{1.5}$$

где под c следует понимать полудлину прямолинейной трещины l или радиус круглой трещины R, а функция $\Phi(c)$ для прямолинейной и круглой трещин определяется, соответственно, соотношениями

$$\Phi(c)=\sqrt{c}\int_0^1 \frac{f(c\xi)\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \qquad \Phi(c)=\sqrt{c}\int_0^1 \frac{\xi f(c\xi)\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{1.6}$$

2°. Исследование зависимости размера трещины от нагрузки сводится к исследованию функций $\Phi(c)$, определяемых соотношениями (1.6).

Исключим из рассмотрения случаи, когда трещина образуется сосредоточенными силами, приложенными на ее поверхности; эти случаи достаточно подробно рассмотрены в работах [1,2]. Пусть, таким образом, трещина поддерживается в раскрытом состоянии какими-то силами, в частности, быть может, сосредоточенными, приложенными внутри тела, и распределенными нагрузками, приложенными на поверхности трещины. При этом функция p, а следовательно, и функция f будут ограниченными.

При малых c из соотношений (1.6) получаем, соответственно, в первом и во втором случаях

$$\Phi(c)\approx\sqrt{c}f(0)\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{\pi}{2}f(0)\sqrt{c}, \qquad \Phi(c)\approx f(0)\sqrt{c} \tag{1.7}$$

так что при малых c функции $\Phi(c)$ возрастают пропорционально $\sqrt{c}$. Если разрывающие силы, приложенные к телу с каждой стороны трещины, ограничены и для определенности равны λP, то имеют место соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx=\lambda P, \qquad \int_0^{\infty} f(c\xi)\,d\xi=\frac{P}{2c} \tag{1.8}$$

$$\int_0^{\infty} p(r)\,r\,dr=\frac{\lambda P}{2\pi}, \qquad \int_0^{\infty} f(c\xi)\,\xi\,d\xi=\frac{P}{2\pi c^2}$$

Отсюда и из (1.6) получаем соответственно в первом и втором случаях при $c\to\infty$

$$\Phi(c)\sim\frac{P}{2\sqrt{c}}, \qquad \Phi(c)\sim\frac{P}{2\pi c^{3/2}} \tag{1.9}$$

так что в обоих случаях функции $\Phi(c)$ на бесконечности убывают, стремясь к нулю, и имеют по крайней мере один положительный конечный максимум. Предположим, что наибольший из максимумов достигается в некоторой точке $c = c_0$ (c_0 заведомо положительно), в которой значение функции $\Phi(c)$ равно Φ_0. Тогда при $\lambda < \lambda_0 = K / \sqrt{2}\,\Phi_0$ уравнение (1.5) не имеет решения; это означает, что при столь малых нагрузках равновесной трещины вообще не образуется. При $\lambda = \lambda_0$ появляется один корень этого уравнения $c = c_0$. Физически это означает, что при достижении некоторой критической нагрузки сразу же скачком образуется трещина определенного конечного размера.

При $\lambda > \lambda_0$ уравнение (1.5) имеет несколько корней. Какие из этих корней отвечают реально осуществляющимся трещинам, определяется соображениями устойчивости.

В случае, когда приложенные силы, действующие на тело с обеих сторон трещины, не ограничены, функция $\Phi(c)$ может не иметь участков убывания. Так будет, в частности, в случае однородного поля, когда $\Phi(c)$ пропорционально $\sqrt{c}$.

§ 2. Равновесное состояние трещины по определению является устойчивым, если любое достаточно малое изменение размера трещины приводит к возникновению сил, стремящихся возвратить систему к нарушенному состоянию равновесия. Выведем условие устойчивости для случаев прямолинейной трещины в бесконечной плоской пластинке и круглой трещины в бесконечном теле при произвольных симметричных разрывающих нагрузках.

Пусть снова нагрузки пропорциональны некоторому параметру λ, так что увеличение параметра λ соответствует увеличению нагрузки.

Для устойчивости трещины необходимо, чтобы равновесный размер трещины возрастал с увеличением параметра λ. В самом деле, предположим, что с увеличением нагрузки соответствующий равновесный размер c возрастает. Пусть размер трещины слегка уменьшен сравнительно с равновесным размером при той же нагрузке. При этом суммарная сила, связывающая воедино обе половины тела, уменьшится, равновесие с приложенными, несколько бóльшими нагрузками нарушится и трещина будет стремиться расшириться. Если размер трещины немного увеличен сравнительно с равновесным, то равновесие нарушается в обратную сторону и трещина будет стремиться сомкнуться. Если же вблизи данного равновесного состояния с увеличением нагрузки равновесный размер трещины уменьшается, то, очевидно, при малом изменении размера трещины возникающие силы будут усугублять отклонение от равновесного состояния и трещина будет схлопываться или катастрофически расширяться, так что соответствующее равновесное состояние будет неустойчивым.

Итак, равновесное состояние, отвечающее некоторому размеру трещины c и соответствующему значению параметра λ, устойчиво, если для данных c и λ выполняется условие

$$\frac{dc}{d\lambda} > 0 \tag{2.1}$$

Дифференцируя соотношение (1.5), получаем

$$\Phi'(c)\frac{dc}{d\lambda} = -\frac{K}{\sqrt{2}\,\lambda^2} \qquad \text{или} \qquad \frac{dc}{d\lambda} = -\frac{K}{\sqrt{2}\lambda^2\Phi'(c)} \tag{2.2}$$

Отсюда и из неравенства (2.1) получаем условие устойчивости трещины в виде

$$\Phi'(c) < 0 \tag{2.3}$$

Таким образом, устойчивыми являются только те равновесные состояния, которые соответствуют участкам убывания кривой $\Phi(c)$. Отсюда, в частности, следует, что если трещина поддерживается в раскрытом состоянии силами, приложенными внутри тела, и распределенными нагрузками, приложенными на поверхности трещины, и если силы, приложенные с каждой стороны трещины, ограничены, то при нагрузках, бо́льших критической, имеется по крайней мере одно устойчивое и одно неустойчивое состояния равновесия. В случае однородного поля все состояния равновесия неустойчивы, поскольку в этом случае функция $\Phi(c)$ пропорциональна $\sqrt{c}$ и ее производная положительна при всех c.

Критические состояния равновесия, отделяющие устойчивые от неустойчивых, определяются соотношением (1.5), а также требованием экстремальности функции $\Phi(c)$ для этих состояний.

При переходе через критические состояния равновесия размеры трещины меняются скачком, — точка, изображающая равновесное состояние, переходит с одной устойчивой части кривой $\Phi(c)$ на другую. Таким образом, график функции $\Phi(c)$ дает возможность исчерпывающим образом представить картину развития трещины с возрастанием нагрузки. Вообще говоря, число экстремумов функции $\Phi(c)$ может быть как угодно велико, поэтому эта картина может оказаться достаточно сложной. Если трещина обратима, то, пользуясь графиком функции $\Phi(c)$, можно исследовать картину изменения размера трещины также при уменьшении и любом немонотонном изменении нагрузки. При этом, очевидно, скачкообразное изменение размеров трещины будет происходить, вообще говоря, в других состояниях, нежели при монотонном возрастании нагрузки. Полученные условия устойчивости дают возможность также судить об устойчивости трещин в ограниченных телах, так как действие границ можно заменить действием соответствующих сил в бесконечном теле.

§ 3. Почти во всех без исключения исследованиях, посвященных образованию и развитию трещин, начиная с классической работы Гриффитса [3], применялся энергетический подход, идея которого заключается в следующем. Пусть W — уменьшение упругой энергии тела за счет образования трещины, U — поверхностная энергия трещины; при данной конфигурации трещины величины W и U зависят только от размера трещины c. Для состояний равновесия должно выполняться условие экстремума свободной энергии

$$\frac{\partial}{\partial c}(W - U) = 0 \tag{3.1}$$

которое и определяет связь нагрузки и размера трещины.

В предположении, что добавочные напряжения, обусловленные силами сцепления, вносят несущественный вклад в уменьшение упругой энергии за счет образования трещин и что плотность поверхностной энергии T постоянна, получается, что W от сил сцепления не зависит и определяется решением задачи теории упругости при данной нагрузке и конфигурации трещины, а $U = 2TS$, где S — площадь трещины в плане. Считая разрушение идеально хрупким, Гриффитс [3] отождествил плотность поверхностной энергии T с поверхностным натяжением материала. Орован [4] и Ирвин [5] распространили концепцию Гриффитса на не вполне хрупкие материалы, считая $2T$ удельной работой пластических деформаций в тонком слое вблизи поверхности трещины.

Энергетический подход к решению задач развития трещин является существенно более сложным, нежели предложенный силовой подход, в связи с необходимостью вычислять и оперировать с упругой энергией. Это, в частности, видно из того, что фактически энергетическим методом определение размеров трещины до сих пор было проведено только для тривиального и притом неустойчивого случая однородного поля.

Покажем, что силовой подход не противоречит энергетическому подходу. В самом деле, из малости концевой области (первая гипотеза [2]) и конечности напряжений в этой области (третья гипотеза) вытекает малость вклада в упругую энергию, вносимого наличием сил сцепления. Из автономности концевой области трещины (вторая гипотеза) вытекает постоянство работы T, совершаемой против сил сцепления при создании единицы поверхности трещины, так что работа, затраченная на преодоление сил сцепления при создании трещины с площадью в плане S, — а это и есть поверхностная энергия трещины в соответствии с ее определением, — равна $2TS$.

Поэтому для установления связи модуля сцепления K с плотностью поверхностной энергии T следует, очевидно, сравнить соотношения, определяющие размер трещины, полученные энергетическим и силовым методом для какой-либо задачи, например для задачи о круглой трещине в бесконечном теле, поддерживаемой произвольной осесимметричной и симметричной относительно плоскости трещины разрывающей нагрузкой.

Напряженное состояние в теле с трещиной представим в виде суммы двух напряженных состояний: напряженного состояния в сплошном теле при данной нагрузке и напряженного состояния в теле с трещиной, на поверхности которой приложены нормальные напряжения — $p(r)$.

Интерес представляет не само приращение упругой энергии суммарного напряженного состояния, а производная этого приращения по размеру, в данном случае по радиусу трещины (скорость освобождения упругой энергии), поэтому вычисление приращения упругой энергии суммарного напряженного состояния можно заменить вычислением приращения упругой энергии любого напряженного состояния, отличающегося от суммарного на не зависящую от радиуса трещины величину. Первое напряженное состояние, естественно, не зависит от радиуса трещины, поэтому в качестве такого напряженного состояния можно взять второе напряженное состояние. В общей форме этот удобный прием был впервые предложен Бьюкнером [6].

Вычислим упругую энергию второго напряженного состояния. Если на поверхности трещины радиуса R приложены нормальные напряжения — $\varepsilon p(r)$, то, как показано Снеддоном [7], нормальные смещения точек поверхности трещины равны

$$w = \frac{4(1-\nu^2)R\varepsilon}{\pi E}\int_\rho^1 \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2-\rho^2}}\int_0^1 \frac{\xi p(\xi\mu R)\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \qquad \rho = \frac{r}{R} \tag{3.2}$$

а изменения нормальных смещений, соответствующие увеличению нагрузки до $-(\varepsilon + d\varepsilon)\,p(r)$, равны

$$dw = \frac{4(1-\nu^2)R\,d\varepsilon}{\pi E}\int_\rho^1 \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2-\rho^2}}\int_0^1 \frac{\xi p(\xi\mu R)\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{3.3}$$

Легко видеть, что уменьшение упругой энергии, обусловленное образованием трещины, равно

$$W = 2\int_0^1 \varepsilon d\varepsilon \int_0^R 2\pi r p(r)\,\frac{4(1-\nu^2)R}{\pi E}\,dr\int_\rho^1 \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2-\rho^2}} \times$$

$$\times \int_0^1 \frac{\xi p(\xi\mu R)\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{8(1-\nu^2)R^3}{E}\int_0^1 p(\rho R)\rho d\rho \int_\rho^1 \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2-\rho^2}}\int_0^1 \frac{\xi p(\xi\mu R)\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Изменяя порядок интегрирования, находим

$$W = \frac{8(1-\nu^2)R^3}{E}\int_0^1 \mu d\mu \int_0^1 \frac{\xi\, p(\xi\mu R)\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\int_0^\mu \frac{p(\rho R)\rho d\rho}{\sqrt{\mu^2-\rho^2}} \tag{3.4}$$

Полагая $\rho = \mu\xi$, имеем

$$\int_0^\mu \frac{p(\rho R)\rho d\rho}{\sqrt{\mu^2-\rho^2}} = \mu\int_0^1 \frac{\xi p(\xi\mu R)\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \mu F(\mu R)$$

откуда и из (3.4) получаем

$$W = \frac{8(1-\nu^2)R^3}{E}\int_0^1 \mu^2 F^2(\mu R)\,d\mu \tag{3.5}$$

Дифференцируя (3.5) и затем интегрируя по частям, имеем

$$\frac{\partial W}{\partial R} = \frac{8(1-\nu^2)}{E}\,3R^2\int_0^1 \mu^2F^2(\mu R)\,d\mu +$$

$$+\frac{8(1-\nu^2)R^3}{E}\int_0^1 2\mu^3 FF'\,d\mu = \frac{8(1-\nu^2)}{E}R^2F^2(R) \tag{3.6}$$

Далее имеем

$$U = 2\pi R^2 T, \qquad dU/dR = 4\pi RT \tag{3.7}$$

откуда и из условия равновесия

$$\frac{\partial}{\partial R}(W-U) = 0$$

получаем

$$F^2(R) = \frac{\pi ET}{2(1-\nu^2)R};$$

или

$$\left(\int_0^1 \frac{\xi p(\xi\mu R)\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)^2 = \frac{1}{2R}\,\frac{\pi ET}{1-\nu^2} \tag{3.8}$$

Окончательно находим, переходя к переменной $r = \xi R$:

$$\int_0^R \frac{rp(r)\,dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \sqrt{\frac{R}{2}}\sqrt{\frac{\pi ET}{1-\nu^2}} \tag{3.9}$$

Поскольку это соотношение должно совпадать с соотношением (1.3), модуль сцепления K должен быть связан с плотностью поверхностной энергии T, модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν соотношением

$$K^2 = \frac{\pi ET}{1-\nu^2} \tag{3.10}$$

Поскольку это соотношение связывает универсальные характеристики среды, оно также должно быть универсальным.

§ 4. Вполне аналогично, хотя технически несколько сложнее, можно получить энергетическим методом уравнение (1.1), определяющее размер изолированной прямолинейной трещины в случае плоской деформации при произвольном распределении разрывающих напряжений.

Выражение для изменения упругой энергии получается в этом случае в виде

$$W = \frac{2(1-\nu^2)l^2}{\pi E}\int_0^\pi p(l\cos\theta)\sin\theta d\theta\int_0^\pi p(l\cos\varphi)\sin\varphi\ln\frac{\sin{}^1/_2(\varphi+\theta)}{\sin{}^1/_2(\varphi-\theta)}d\varphi + \ldots \tag{4.1}$$

где $x = l\cos\theta$, а многоточие означает слагаемые, не зависящие от размера трещины. Дифференцируя по l и интегрируя затем по частям, получаем выражение для скорости освобождения упругой энергии

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \frac{8(1-\nu^2)\,l}{\pi E}\left\{\int_0^l \frac{p(x)\,dx}{\sqrt{l^2-x^2}}\right\}^2 \tag{4.2}$$

Отсюда, используя выражение поверхностной энергии $U = 4Tl$ и условие равновесия (3.1), получаем уравнение

$$\int_0^l \frac{p(x)\,dx}{\sqrt{l^2-x^2}} = \sqrt{\frac{\pi ET}{1-\nu^2}}\frac{1}{\sqrt{2l}} \tag{4.3}$$

совпадающее с уравнением (1.1), если модуль сцепления K связан с плотностью поверхностной энергии и упругими характеристиками материала соотношением (3.10). Задача определения размеров трещины в произвольном поле разрывающих напряжений многократно обсуждалась; попытка ее решения была недавно предпринята Масубути [8]. Используя разложение напряжений и смещений точек поверхности трещины в тригонометрический ряд, Масубути получил выражение для скорости освобождения упругой энергии также в виде ряда, члены которого выражаются через коэффициенты упомянутых тригонометрических рядов. Недостаточная эффективность подхода не позволила Масубути получить простое результирующее уравнение (1.1).

Таким образом, мы приходим к следующему заключению. Выяснение физической картины вблизи концов трещины (1.2) позволяет рассматривать задачу о равновесных трещинах как задачу теории упругости, пополнив характеристики свойств материала новой характеристикой — модулем сцепления K. Такой силовой подход не противоречит развитому в предыдущих работах [3—5] энергетическому подходу; однако, будучи существенно более эффективным, силовой подход делает энергетический подход нецелесообразным.

Следует отметить, что, повторяя приведенные выше энергетические выводы уравнений, связывающих нагрузку с размерами трещины, можно получить соответствующие условия конечности напряжений [1,2] из условия экстремума суммарной упругой энергии. Суммарная упругая энергия обусловливается действием нагрузок и сил сцепления, считая силы сцепления действующими в концевой области; при этом силы сцепления предполагаются поверхностными и нормальными к поверхности трещины. Наоборот, из условия конечности напряжений на краях трещины можно получить условие экстремума суммарной упругой энергии. Это показывает эквивалентность силового и энергетического подходов.

Решение конкретных задач открывает различные возможности экспериментального определения модуля сцепления K; в силу соотношения (3.10) каждое такое определение дает также плотность поверхностной энергии T. Заметим, что такое определение плотности поверхностной энергии будет основано на строгих решениях задачи теории упругости. В настоящее время существует единственный метод определения поверхностной энергии, предложенный И. В. Обреимовым [9] и основанный на приближенном решении задачи методами сопротивления материалов.

В заключение автор пользуется случаем выразить свою искреннюю признательность Я. Б. Зельдовичу и С. С. Григоряну за интерес к работе и ее обсуждение.

Поступила 11 VII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинках. ПММ, т. XXIII, вып. 4, 1959.
2. Баренблатт Г. И., О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины. ПММ, т. XXIII, вып. 3, 1959.
3. Griffith A. A. The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids, Phil. Trans, Roy. Soc., Ser. A., v. 221 (1920).
4. Orowan E. Energy Criteria of Fracture. Welding Journal, Research Supplement, March (1955).
5. Irwin G. R. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Grack Traversing a Plate. J. Appl. Mech. v. 24, No 3 (1957).
6. Bueckner H. F. The Propagation of Cracks and the Energy of Elastic Deformation. Trans. ASME, v. 80, No 6, 1958.
7. Sneddon I. Fourier Transforms, N. Y. (1951).
8. Masubuchi Koichi. Dislocation and Strain Energy Release During Crack Propagation in Residual Stress Field. Proc. 8-th Japan Nath. Congress for Appl. Mech. 1958.
9. Obreimow J. On the spliting strength of mica, Proc. Roy. Soc. Ser. A, v. 127, (1930).