

## СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК

И. И. Ворович

(Ростов-на-Дону)

1. Рассмотрим оболочку, подвергнутую действию нагрузки, которая возрастает пропорционально некоторому параметру  $\lambda$ . Предположим, что условия закрепления оболочки допускают при  $\lambda = 1$  безмоментное напряженное состояние. В этом случае для широкого класса оболочек будет типичной следующая картина изменения числа форм равновесия оболочки и их качества.

Существует некоторое число  $\lambda_0$  такое, что при  $\lambda < \lambda_0$  налицо единственная безмоментная форма равновесия оболочки, которой соответствует абсолютный минимум энергии системы оболочка — внешние силы. Далее, существует число  $\lambda_1 \geq \lambda_0$  такое, что при  $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_1$  наряду с безмоментной формой равновесия оболочка имеет и моментные, однако безмоментная форма равновесия оболочки будет иметь более низкий уровень энергии, чем любая моментная. Далее существует число  $\lambda_{00} \geq \lambda_1$  такое, что при  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_{00}$  безмоментная форма равновесия оболочки хотя и имеет относительный минимум энергии, но и имеется по крайней мере одна моментная форма равновесия, которой соответствует более низкий уровень энергии. Наконец, при  $\lambda > \lambda_{00}$  безмоментная форма равновесия оболочки вообще перестает быть точкой минимума энергии.

Такая смена форм равновесия фактически была установлена в ряде исследований (см. литературу в [1, 2]) для сферической и цилиндрической оболочек на основе использования приближенных методов. Эта же картина получила строгое обоснование для весьма широкого класса оболочек и граничных условий в [3].

Из сказанного ясно, что если бы даже удалось полностью преодолеть все математические трудности, связанные с решением основных уравнений нелинейной теории оболочек, то и в этом случае мы не могли бы считать задачу решенной до конца, так как степень реальности каждой из возможных при  $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{00}$  форм равновесия оболочки при этом никак не определяется.

Выбор наиболее реальной формы равновесия оболочки следует сделать с учетом дополнительных соображений. Рационально принять за меру реальности той или иной формы равновесия оболочки вероятность пребывания оболочки в этой форме.

Мысль о привлечении вероятностных соображений к задачам устойчивости оболочек высказывалась В. И. Феодосьевым [4] и А. С. Вольмиром [1]. Привлечение

вероятностных соображений, на наш взгляд, позволит существенно продвинуть вперед решение таких важных вопросов, как:

- 1) назначение допускаемых нагрузок на оболочку при исследовании устойчивости с учетом условий ее работы и погрешностей в изготовлении;
- 2) назначение допусков в выполнении основных параметров оболочки. Главным образом здесь имеется в виду расчет необходимой точности изготовления срединной поверхности оболочки.

Разработка статистической теории устойчивости оболочек должна, по нашему мнению, включать следующие моменты:

1. Методы статистического описания факторов, определяющих случайный характер деформации оболочки. Методика экспериментального определения статистических характеристик указанных факторов.

2. Методы статистического описания параметров, характеризующих деформацию оболочки. Методика экспериментального определения статистических характеристик указанных параметров.

3. Соотношения между статистическими характеристиками параметров, описывающих деформацию оболочки, и статистическими характеристиками факторов, определяющих случайный характер деформации оболочки.

Ниже рассматривается приближенный подход к построению такой теории.

Предположим, что все факторы, определяющие случайный характер изгиба оболочки, можно разбить на три группы:

- 1) рассеяние упругих и геометрических свойств оболочки;
- 2) рассеяние параметров, характеризующих способ заделки оболочки;
- 3) рассеяние внешних нагрузок, приложенных к оболочке.

Далее, хотя в указанные группы могут входить и функциональные параметры, как, например, отклонение в форме срединной поверхности оболочки, отклонения в толщине оболочки и т. д., тем не менее примем, что вся совокупность факторов первых двух групп может быть описана конечным числом параметров  $a_1, \dots, a_m$ . В силу этого естественно считать, что вероятностные свойства первых двух групп факторов будут заданы, если задан закон  $\varphi(a_1, \dots, a_m)$  распределения параметров  $a_1, \dots, a_m$ . Предположим теперь, что параметры  $a_1, \dots, a_m$  зафиксированы, и запишем уравнения движения оболочки под действием нагрузки  $F(P, t)$  с учетом диссипации энергии при движении оболочки. Имеем

$$\rho w_{tt} + 2\gamma w_t + D \nabla^4 w = \Phi_{yy} (w_{xx} + f_{xx}) + \Phi_{xx} (w_{yy} + f_{yy}) - \\ - 2\Phi_{xy} (w_{xy} + f_{xy}) + Z(P, t) \quad (1.1)$$

$$\nabla^4 \Phi = 2Eh (w_{xy}^2 - w_{xx} w_{yy} - f_{xx} w_{yy} - f_{yy} w_{xx} + 2f_{xy} w_{xy}) \quad (1.2)$$

В этих уравнениях  $\rho$  — массовая плотность оболочки, отнесенная к единице площади срединной поверхности оболочки; рассеивание энергии в оболочке учитывается членом  $2\gamma w_t$ . Для простоты в уравнениях (1.1) и (1.2) мы пренебрегли инерцией продольных движений оболочек и считаем, что  $F(P, t)$  имеет лишь одну составляющую  $Z(P, t)$ . От всех этих предположений можно отказаться за счет некоторого усложнения дальнейших выкладок.

Примем, что для  $w$  выполнены некоторые однородные условия опирания и, кроме того,

$$\Phi|_{\Gamma} = r(s), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = q(s) \quad (1.3)$$

где  $r(s)$ ,  $q(s)$  — некоторые функции дуги контура  $s$ .

Будем искать приближенное решение задачи в следующей форме:

$$w = \sum_{k=1}^n q_k(t) \chi_k(P) \quad (1.4)$$

Здесь  $\chi_k(P)$  — базис в пространстве энергии изгиба оболочки [5, 6]. Для определения  $q_k(t)$  используем метод Бубнова — Галеркина, предполагая, что  $\chi_k$  ортонормированы в  $L_2$ . При этом получаем следующую систему:

$$\ddot{q}_k + \frac{2\gamma}{\rho} \dot{q}_k = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{1}{\rho} Z_k(t) \quad (k=1, \dots, n), \quad \left( Z_k = \int_{\Omega} Z(P, t) \chi_k(P) dP \right) \quad (1.5)$$

Здесь  $U$  — потенциальная энергия деформации оболочки, выраженная через  $q_k$ .

Систему (1.5) можно рассматривать как уравнения движения некоторой точки в  $n$ -мерном пространстве коэффициентов  $q_1, \dots, q_n$ . Эта точка движения в поле сил с потенциалом  $\rho^{-1} U$  и под действием случайных сил  $\rho^{-1} Z_k(t)$ . Ниже будем считать, что

$$Z(P, t) = Z^{(1)}(P, t) + Z^{(2)}(P, t) + Z^{(3)}(P, t) \quad (Z^{(1)}(P, t) = \text{м. о. } Z(P, t)) \quad (1.6)$$

Здесь  $Z^{(2)}(P, t)$  — флуктуационный член, вызывающий ускорения точки типа ускорений броуновского движения,  $Z^{(3)}(P, t)$  — непрерывный случайный процесс.

Примем далее, что с достаточной степенью точности можно положить

$$Z^{(3)}(P, t) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{n_1} a_{kl} \chi_k(P) \psi_l(t) \quad (1.7)$$

Здесь  $\psi_l(t)$  — некоторые фиксированные функции времени. Будем считать непрерывный случайный процесс заданным, если известен закон распределения  $\theta(a_{kl})$  параметров  $a_{kl}$ . В соответствии с (1.6) имеем

$$Z_k(t) = Z_k^{(1)}(t) + Z_k^{(2)} + \sum_{l=1}^{n_1} a_{kl} \psi_l(t) \quad (1.8)$$

Задача теперь заключается в том, чтобы найти закон распределения  $q_1, \dots, q_n$  во времени.

Для ее решения будем считать, что группы параметров  $a_1, \dots, a_m$  и  $a_{kl}$  и случайный процесс  $Z^{(2)}(P, t)$  статистически независимы. Предположим далее, что параметры  $a_1, \dots, a_m$ ,  $a_{kl}$  приняли какое-либо фиксированное значение, и найдем закон распределения  $q_1, \dots, q_n$  в этом

предположении. Для моментов времени  $t \gg \rho/\gamma$  искомый закон распределения можно найти из уравнения Смолуховского [7]

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \left\{ \left[ \frac{\partial U}{\partial q_i} - Z_i^{(1)}(t) - \sum_{l=1}^{n_1} a_{kl} \psi_l \right] f \right\} \frac{1}{2\gamma} + \frac{\delta \rho^2}{4\gamma^2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_i^2} \quad (1.9)$$

В уравнении (1.9) параметр  $\delta$  характеризует рассеяние толчков, воздействующих на оболочку, причем чем  $\delta$  меньше, тем меньше рассеяние толчков, воздействующих на оболочку. Параметр  $\delta$  характеризует условия, в которых работает оболочка, и должен определяться из опыта.

Поскольку  $f$  — некоторый закон распределения, то к (1.9) нужно добавить следующие условия, имеющие место при  $t > 0$ .

$$1) f \geq 0, \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int f dq_1, \dots, dq_n = 1, \quad 3) f \rightarrow 0 \text{ при } q_1^2 + \dots + q_n^2 \rightarrow \infty$$

Кроме того,  $f(q_1, \dots, q_n, 0) = f^*(q_1, \dots, q_n)$ , где  $f^*$  — закон распределения  $q_1, \dots, q_n$  в начальный момент.

Предположим, что нам удалось найти  $f$  из (1.9), (1.10). Очевидно,  $f$  будет зависеть также и от параметров  $a_1, \dots, a_m, a_{kl}$ ; при этом безусловный закон распределения  $f^\circ$  для рассматриваемых условий будет

$$f^\circ(q_1, \dots, q_n, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int f(q_1, \dots, q_n, t, a_k, a_{kl}) \varphi(a_k) \theta(a_{kl}) da_k da_{kl} \quad (1.11)$$

Рассмотрим некоторые важные случаи, когда осуществление изложенного выше плана возможно до конца и когда могут быть получены расчетные формулы.

Пусть  $Z^{(3)} \equiv 0$ , а  $Z^{(1)}$  от времени не зависит. В этом случае распределение  $f(q_1, \dots, q_n)$ , которое установится при  $t \rightarrow \infty$ , определится из уравнения

$$\frac{\delta \rho^2}{2\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_i^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} - Z_i^{(1)} \right) f \right] = 0 \quad (1.12)$$

Легко проверить, что функция

$$\frac{1}{J} \exp \left[ \left( -U + \sum_{k=1}^n q_k Z_k^{(1)} \right) \frac{2\gamma}{\delta \rho^2} \right] \quad (1.13)$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \exp \left[ \left( -U + \sum_{k=1}^n q_k Z_k^{(1)} \right) \frac{2\gamma}{\delta \rho^2} \right] dq_1 \dots dq_n$$

удовлетворяет всем условиям (1.10) и уравнению (1.9). Распределение (1.13) является распределением Гиббса.

Безусловный закон распределения в соответствии с (1.13) определится формулой

$$f^\circ(q_1, \dots, q_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int f(q_1, \dots, q_n, a_1, \dots, a_n, a_{kl}) \varphi(a_k) \theta(a_{kl}) da_k da_{kl} \quad (1.14)$$

Величину  $f^\circ$  можно принять за меру реальности той или иной формы равновесия оболочки.

Формула (1.14) дает достаточно полное решение.

Отметим некоторые наиболее существенные черты предлагаемого здесь способа статистического анализа равновесия оболочек.

1. Расчет закона распределения по формуле (1.14) не требует предварительного решения задачи о равновесии оболочки при тех или иных нагрузках, анализа числа форм равновесия, какой-либо замены реальных зависимостей между прогибами и внешними силами однозначными функциями и т. д. Требуется только знать выражение потенциальной энергии системы через обобщенные координаты. Составление же этого выражения не представляет труда.

2. Расчет закона распределения по формуле (1.14) сводится к взятию квадратур. Причем, поскольку подинтегральные выражения в формуле (1.14) — достаточно гладкие функции, то эти квадратуры без каких-либо осложнений могут быть взяты численно, даже если мы для увеличения точности решения задачи прибегнем к использованию большого числа параметров  $q_1, \dots, q_n$ . При этом, естественно, не встает никаких специальных вопросов, связанных с использованием машин для расчета по формуле (1.14).

3. Формула (1.11) принципиально учитывает все основные факторы, определяющие случайный характер изгиба оболочки, в том числе и такие, как случайные силы, меняющиеся во времени весьма быстро, и силы с периодом изменения, сравнимым с периодом колебаний самой оболочки, и т. д. При этом она дает возможность проследить процесс изменения вероятностей во времени. Правда, при этом потребуются предварительное решение соответствующей краевой задачи для уравнения (1.9).

Но уравнение (1.9) принадлежит к числу тех, для решения которых численные методы приспособлены особенно хорошо.

2. Рассмотрим устойчивость квадратной цилиндрической панели под действием продольной сжимающей силы  $Q$  (фиг. 1). При решении задачи будем учитывать случайные отклонения в форме срединной поверхности и воздействие случайных быстро меняющихся внешних сил.

Потенциальную энергию оболочки можно взять в виде [1] (2.1)

$$U = \frac{\pi^4 E h^4}{8 a^2} \left\{ (\zeta^4 + 4 \zeta^3 \zeta_0 + 4 \zeta_0^2 \zeta^2) - \frac{64 k}{\pi^4} \left( \frac{5 \zeta^2}{9} + \zeta^2 \zeta_0 \right) + \frac{16 \zeta^2}{\pi^2} (S_B - S) - \frac{32}{\pi^2} S \zeta \zeta_0 \right\}$$

$$\zeta = \frac{f}{2h}, \quad \zeta_0 = \frac{f_0}{2h}, \quad k = \frac{a^2}{2Rh}, \quad S_B = 3.6 + \frac{k^2}{39.5}, \quad S = \frac{Q a^2}{4 E h^2}$$

Здесь  $a$  — сторона квадрата оболочки,  $2h$  — толщина оболочки,  $E$  — модуль Юнга,  $f$  — стрела прогиба оболочки,  $f_0$  — начальная стрела прогиба.

Будем рассматривать оболочку с параметром кривизны  $k = 12$ . В этом случае для потенциальной энергии получим формулу

$$U = \frac{\pi^4 E h^4}{8 a^2} \left\{ \zeta^4 + \zeta^3 (4 \zeta_0 - 4.36) + \zeta^2 [-3.86 \zeta_0 + 11.85 (1 - P)] - 23.41 \zeta \zeta_0 P \right\}$$

$$P = S / S_B \quad (2.2)$$

В соответствии с (1.13) условный закон распределения  $\zeta$  (закон распределения при детерминированном  $\zeta_0$ ) дается соотношением

$$f(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{J} e^{-\mu V(\zeta)}, \quad J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu V(\zeta)} d\zeta, \quad \mu = \frac{\pi^4 E h^4 \gamma}{4 a^2 p^2 \delta} \quad (2.3)$$

В равенствах (2.3) введено обозначение

$$V(\zeta) = \zeta^4 + \zeta^3(4\zeta_0 - 4.36) + \zeta^2[-3.86\zeta_0 + 11.85(1 - P)] - 23.41\zeta\zeta_0P$$

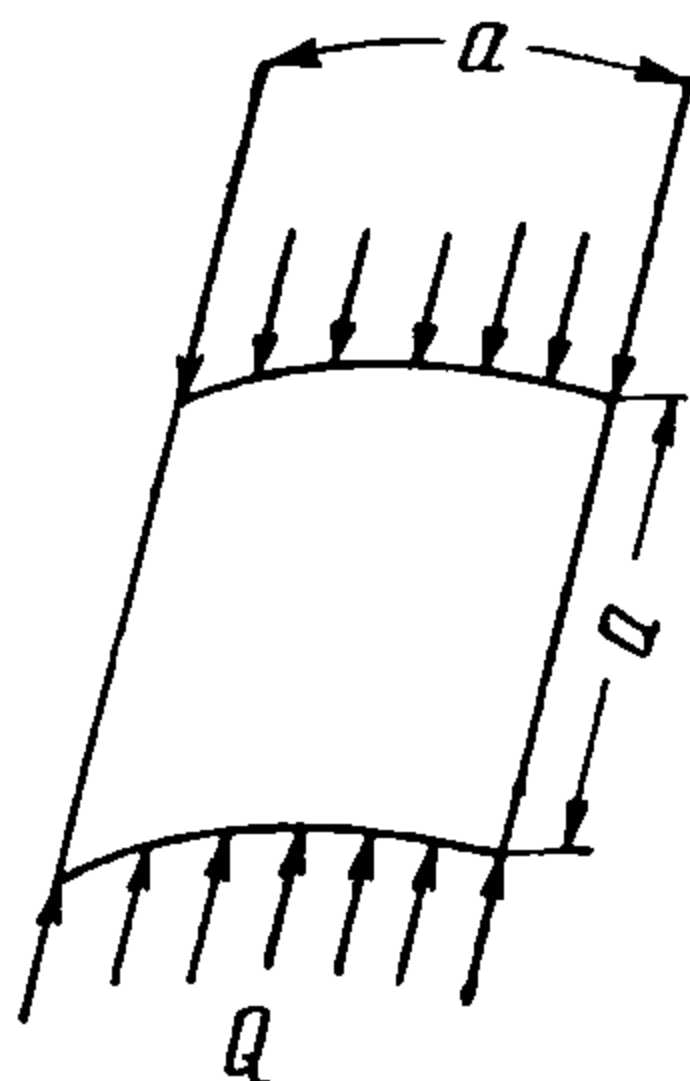
Безусловный закон распределения будет даваться формулой

$$f^\circ(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta, \zeta_0) \varphi(\zeta_0) d\zeta_0 \quad (2.4)$$

где  $\varphi(\zeta_0)$  — закон распределения  $\zeta_0$ .

Определим, например, при помощи (2.4) вероятность  $p$  того, что перемещение  $\zeta$  по модулю не превзойдет единицы. Очевидно,

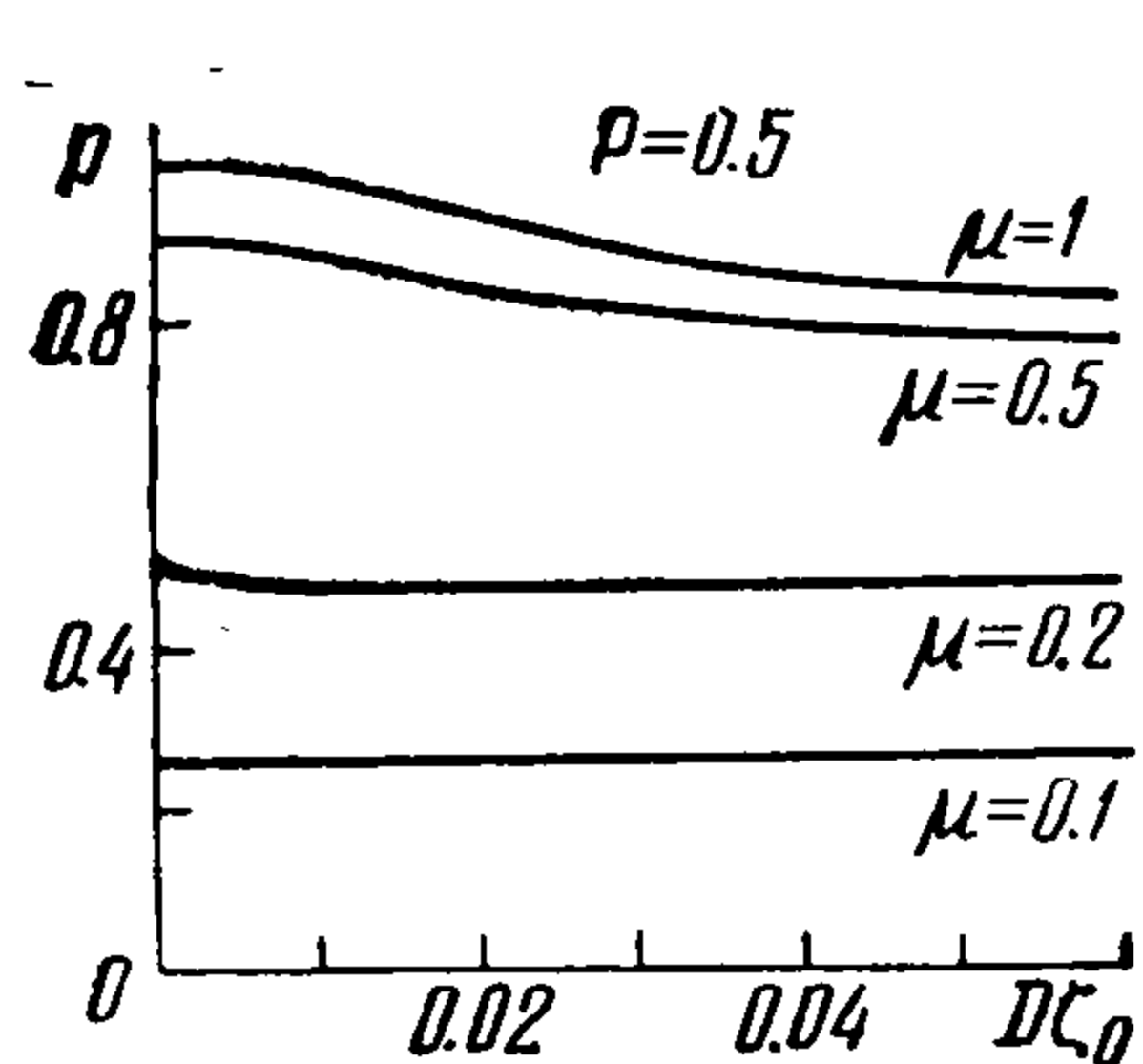
$$p = \int_{-1}^{+1} f^\circ(\zeta) d\zeta = \int_{-1}^{+1} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta, \zeta_0) \varphi(\zeta_0) d\zeta_0 d\zeta \quad (2.5)$$



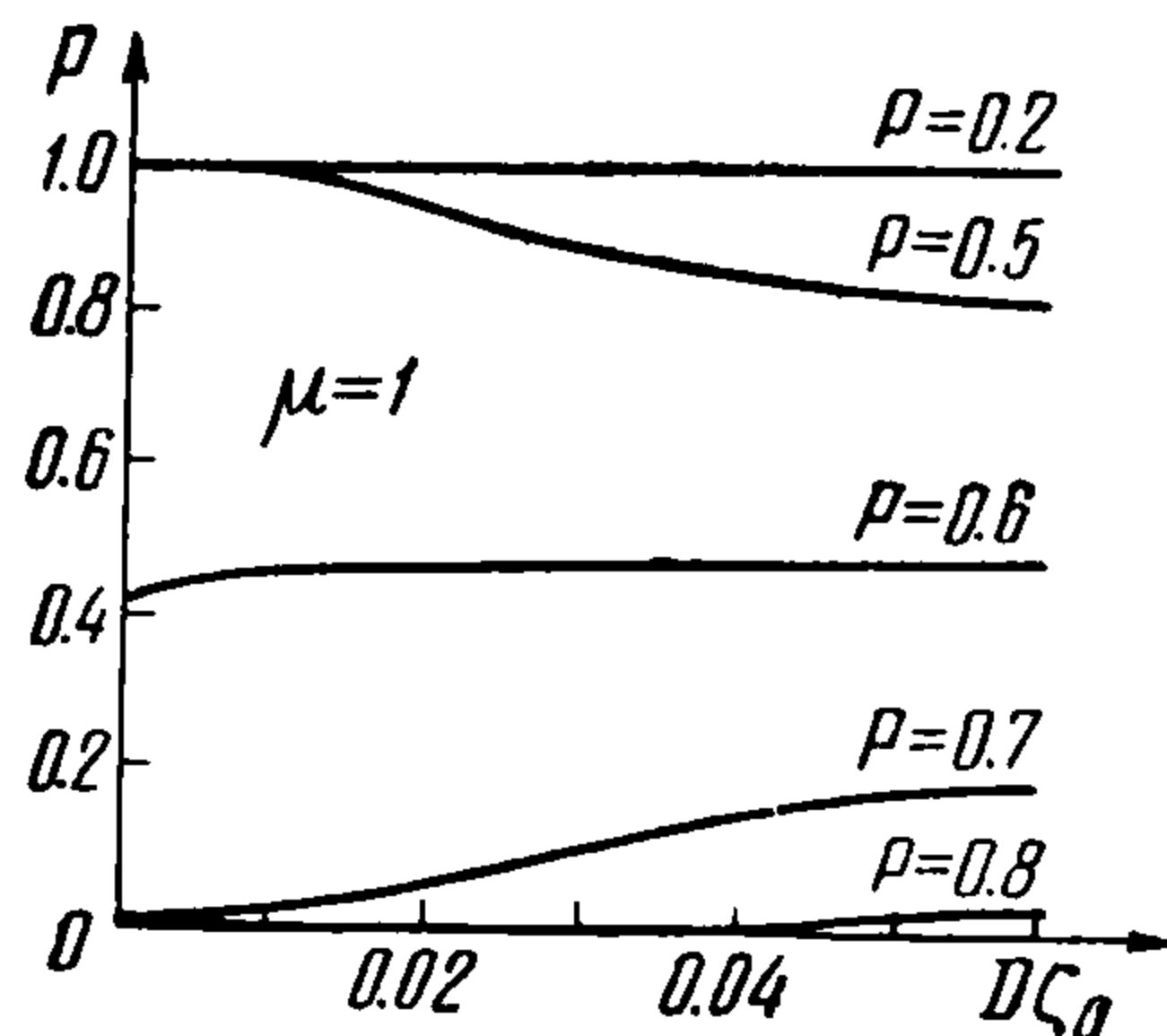
Фиг. 1

Результаты численных расчетов по формулам приведены на фиг. 1—3, для случая когда  $\zeta_0$  подчинена треугольному симметричному закону распределения. ;

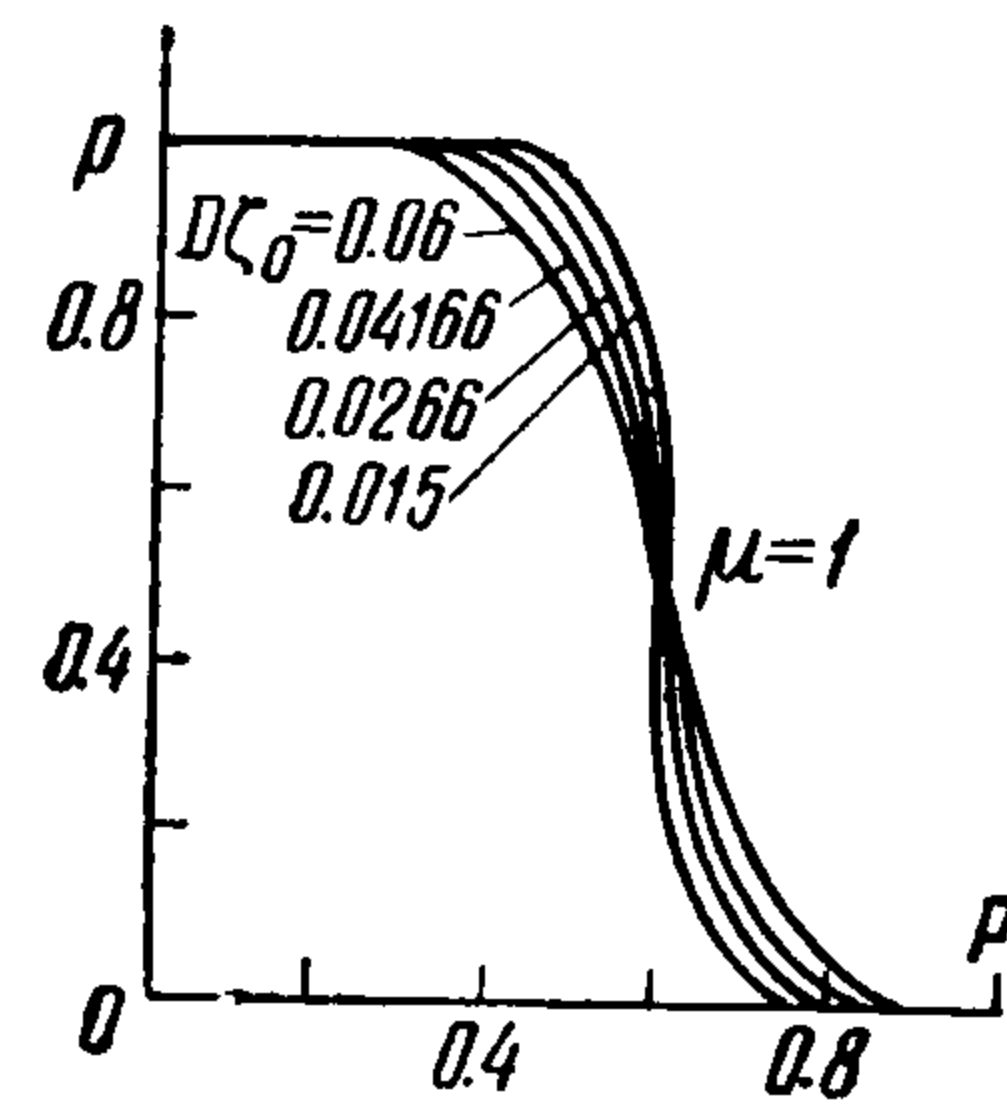
На фиг. 2 дается зависимость  $p(D\zeta_0)$ , где  $D\zeta_0$  — дисперсия  $\zeta_0$ . Расчеты проведены для случая  $P = 0.5$  (т. е. для случая, когда сжимающая сила составляет половину верхнего критического значения) и для  $\mu = 1, 0.5, 0.2, 0.1$ . Параметр  $\mu$  для фиксированной оболочки зависит от  $\delta$  — величины, характеризующей условия работы оболочки. Чем больше  $\delta$ , тем более «спокойными» являются условия работы оболочки. Из фиг. 2 видно, что при достаточно малых  $\mu$ , т. е. в не очень «спокойных» условиях работы оболочки,  $D\zeta_0$  практически не влияет на  $p$ .



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3 дана зависимость  $p(D\zeta_0)$  при  $\mu = 1$  и при разных  $P$ . Из фиг. 3 видно, что  $p(D\zeta_0)$  имеет разный характер для разных  $P$ . Если  $P < 0.544$  — нижнего критического числа для данного случая, то увеличение  $D\zeta_0$  ведет к уменьшению  $p$ . Если же  $P > 0.544$ , то при увеличении  $D\zeta_0$  величина  $p$  также увеличивается. Это на первый взгляд парадоксальное обстоятельство вполне объяснимо.

Действительно, подробный анализ числа форм равновесия оболочки и степени их устойчивости показывает, что при  $P > P_0$  ( $P_0$  — нижняя критическая нагрузка) при больших положительных  $\zeta_0$  имеется единственная форма равновесия, которой соответствуют  $\zeta$ , лежащие вне  $[-1, +1]$ .

При малых положительных  $\zeta_0$  оболочка имеет три формы равновесия, причем одна из этих форм лежит внутри отрезка  $[-1, +1]$ .

Однако этой форме соответствует более высокий уровень потенциальной энергии оболочки, чем формам, лежащим вне  $[-1, +1]$ . Поэтому хотя при малых положительных  $\zeta_0$  и имеются формы равновесия внутри  $[-1, +1]$ , но они мало что дают для увеличения вероятности осуществления неравенства  $|\zeta| < 1$ . При отрицательных же  $\zeta_0$  также имеются положения равновесия, которым соответствуют  $\zeta$  из отрезка  $[-1, +1]$ . Но при этом для отрицательных  $\zeta_0$  именно эти формы оказываются наиболее устойчивыми, причем чем больше  $\zeta_0$ , тем более устойчива соответствующая форма. Поэтому когда мы уменьшаем рассеивание  $\zeta_0$ , уменьшая при этом вероятность появления достаточно больших отрицательных  $\zeta_0$ , то вероятность  $p$  может уменьшиться.

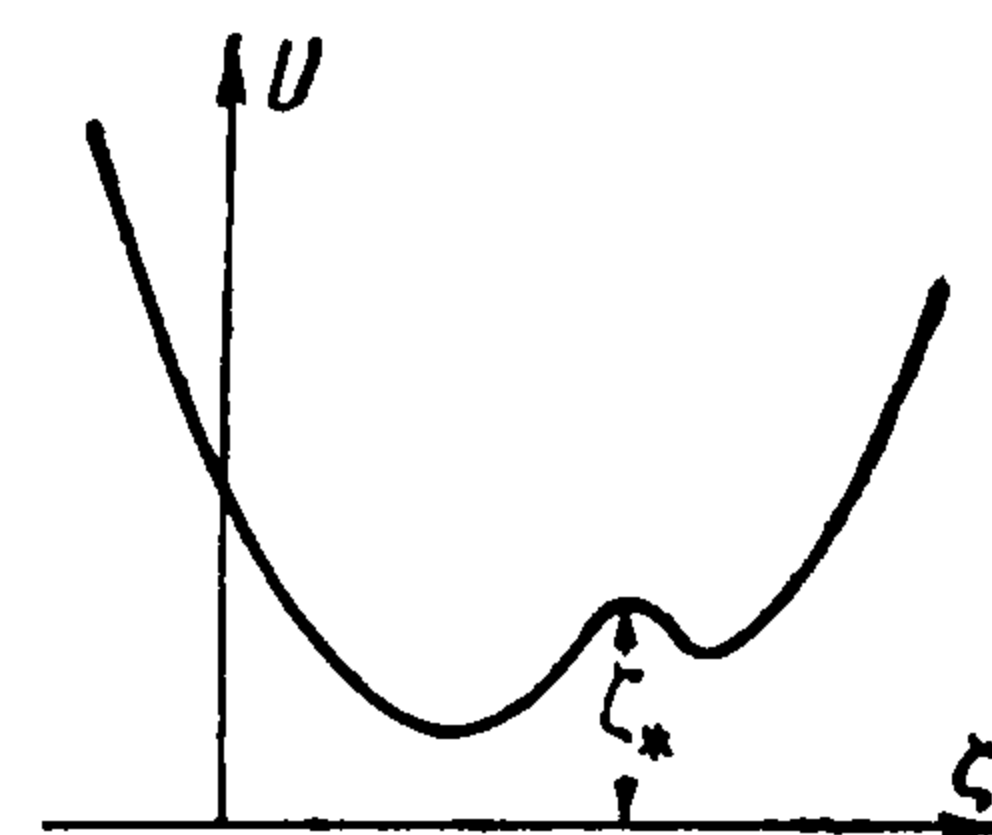
Если  $P < 0.544$ , то при этом каждому  $\zeta_0$  соответствует единственная форма равновесия оболочки, и чем меньше  $\zeta_0$ , тем меньше значение  $\zeta$ , соответствующее форме равновесия оболочки. При этом, конечно, с уменьшением рассеивания  $\zeta_0$  величина  $p$  должна увеличиваться.

Отметим также, что если уменьшить  $D\zeta_0$ , сосредоточивая закон распределения  $\zeta_0$  на отрицательных  $\zeta_0$ , то мы всегда при этом будем иметь увеличение  $p$ . Поэтому естественно поставить вопрос о введении мер технологического, конструктивного и другого порядка, при помощи которых можно было бы создавать искусственное рассеивание, сосредоточивая закон распределения  $\zeta_0$  на отрицательных значениях.

На фиг. 4 дается зависимость  $p$  от  $P$  для разных  $D\zeta_0$ . Можно отметить, что функция  $p(P)$  испытывает резкое изменение при значениях нагрузки, несколько больших нижнего критического числа. Эти значения нагрузки характеризуются тем обстоятельством, что им соответствуют три формы равновесия оболочки, причем в двух устойчивых формах равновесия оболочка имеет равные уровни потенциальной энергии.

Графики фиг. 4 построены для  $\mu = 1$  и, следовательно, могут быть использованы только в условиях работы оболочки, соответствующих  $\mu = 1$ . Однако вполне возможно построение серии таких графиков для разных  $\mu$ . Это дало бы возможность по заданному уровню вероятности пребывания оболочки в том или ином состоянии в заданных условиях работы определять допустимое рассеивание в форме срединной поверхности оболочки. Обратимся теперь к расчету вероятности хлопка оболочки. На фиг. 5 изображен график потенциальной энергии системы оболочка — внешние силы. При некотором значении  $P > 0.544$  хлопок оболочки будет иметь место, если под действием случайных толчков будет преодолен потенциальный барьер  $\zeta_*$ . Поэтому можно принять, что при фиксированном  $\zeta_0$  вероятность хлопка  $p_*$  будет даваться соотношением

$$p_* = \int_{\zeta_*}^{\infty} f(\zeta, \zeta_0) d\zeta \quad (2.6)$$



Фиг. 5

Применяя теорему о полной вероятности, получаем следующую формулу для расчета вероятности хлопка:

$$p_{1*} = \int_{-\infty}^{\infty} p_*(\zeta_0) \varphi(\zeta_0) d\zeta_0 \quad (2.7)$$

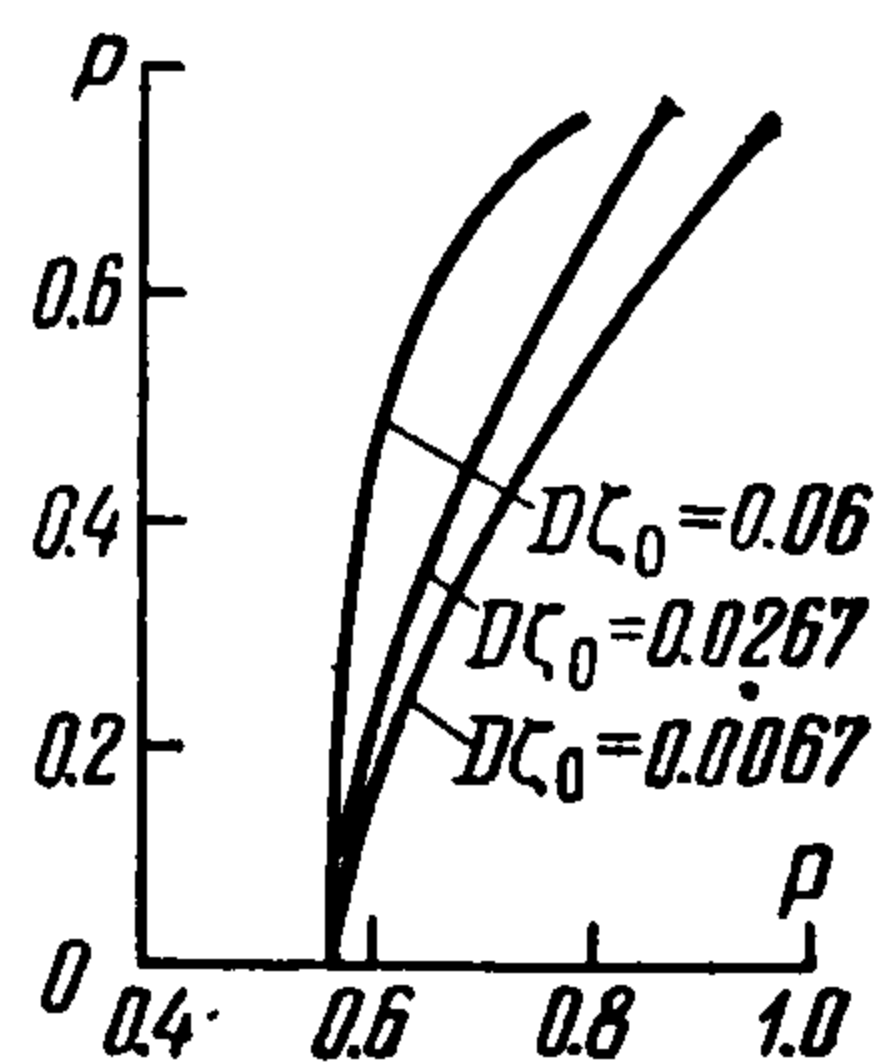
Далее, если учесть, что хлопок может иметь место только для  $\zeta_0$ , удовлетворяющих неравенству

$$\zeta_0 \leq \zeta_{0*}(P) \quad (2.8)$$

где  $\zeta_{0*}$  — некоторое определенное для каждого  $P$  число, то формулу (2.7) можно записать в виде

$$p_{1*} = \int_{-\infty}^{\zeta_{0*}(P)} \int_{\zeta_*}^{\infty} f(\zeta, \zeta_0) \varphi(\zeta_0) d\zeta d\zeta_0 \quad (2.9)$$

Результаты расчетов по формуле (2.9) приведены на фиг. 6. Здесь можно также отметить то обстоятельство, что при увеличении  $D\zeta_0$  вероятность хлопка убывает. Это объясняется тем, что,



Фиг. 6

уменьшая  $D\zeta_0$ , мы делаем мало вероятными большие по модулю значения  $\zeta_0$  (напоминаем, что закон распределения был принят симметричным). Но при больших положительных  $\zeta_0$  хлопок вообще не происходит, а при больших отрицательных  $\zeta_0$  хлопок мало вероятен, ибо дохлопковое состояние равновесия в этом случае имеет более низкий уровень энергии, чем послехлопковое.

В заключение отметим, что при использовании изложенной выше методики, очевидно, придется все возможные реальные условия эксплуатации оболочек разбить на расчетные случаи по уровню «спокойности» работы и для каждого расчетного случая установить экспериментально  $\mu$ .

Поступила 14 I 1959

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В о л ь м и р А. С. Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1956.
2. М у ш т а р и Х. М., Г а л и м о в К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Таткнигоиздат, 1957.
3. В о р о в и ч И. И. Некоторые вопросы устойчивости оболочек в большом. Докл. АН СССР, т. СХХII, № 1, 1958.
4. Ф е д о с ь е в В. И. Об устойчивости сферической оболочки, находящейся под действием внешнего равномерно распределенного давления. ПММ, т. XVIII, вып. 1, 1954.
5. М и х л и н С. Г. Вариационные методы в математической физике. Гостехиздат, 1957.
6. В о р о в и ч И. И. Погрешность прямых методов в нелинейной теории оболочек. Докл. АН СССР, т. СХХII, № 9, 1958.
7. Ч а н д р а с е к а р С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. ГИИЛ, 1947.