Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О МАЛЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ВДОЛЬ ОСИ КОТОРОЙ ТЕЧЕТ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

Б. И. Рабинович

(Киев)

Рассматривается цилиндрическая оболочка с круговым контуром, имеющая на одном конце плоское донышко, равномерно заполненное сверхзвуковыми источниками. Другой конец оболочки открыт, и через нее течет равномерный сверхзвуковой поток идеального газа, начинающийся от донышка. В предположении, что оболочка совершает малые установившиеся гармонические колебания в некоторой плоскости, исследуется динамическое взаимодействие между газом и стенками оболочки. Сжимаемость газа приводит к появлению дополнительных нестационарных сил, роль которых в общем балансе зависит от числа Струхаля; иными словами, главный вектор газодинамических сил оказывается при колебаниях оболочки смещенным и повернутым относительно ее продольной оси.

§ 1. Постановка задачи. Введем следующие обозначения: поверхность донышка оболочки S_1, боковая поверхность оболочки S_2, ее радиус R_0, длина образующей h, объем, занятый газом внутри оболочки Q, скорость перемещения газа c, массовая плотность невозмущенного газа ρ_0, массовый секундный расход

$$\mu^\cdot = \left|\frac{d\mu}{dt}\right| = \rho_0 c S = \rho_0 c \pi R_0{}^2$$

Давление в окружающем пространстве примем равным давлению в струе газа.

Для описания возмущенного движения газа введем «связанную» систему координат $Oxyz$ с началом в центре круга S_1, осью Ox, параллельной образующей S_2, и осью Oy, лежащей в плоскости, в которой имеет место возмущенное движение, и соответствующую абсолютную систему координат $O^*x^*y^*z^*$, с которой $Oxyz$ совпадает при невозмущенном движении. Под невозмущенным движением в дальнейшем понимается либо состояние покоя, либо такое движение системы координат $O^*x^*y^*z^*$, полем сил инерции которого можно пренебречь при рассмотрении возмущений в газе. Движение $Oxyz$ относительно $O^*x^*y^*z^*$ будем характеризовать векторами скорости точки O $\mathbf{u}$ и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, которые предполагаются малыми величинами первого порядка:

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i}_2, \qquad \omega = \omega\mathbf{i}_3 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — орты системы координат $O^*y^*z^*$.

Величинами второго и более высокого порядка малости будем пренебрегать. Возмущенное движение оболочки в направлении оси O^*x^* представляет значительно меньший интерес, поэтому в дальнейшем предполагается, что $u_x = 0$.

При построении поля скоростей введем следующие допущения: 1) компоненты вектора скорости возмущения в любой точке области Q малы по сравнению с c; 2) движение газа потенциальное.

Будем рассматривать абсолютное движение газа, пользуясь связанными координатами, т. е. зафиксируем мысленно систему координат $Oxyz$ в тот момент, когда она в процессе возмущенного движения совпадает с $O^*x^*y^*z^*$. Тогда линеаризированное уравнение для потенциала скоростей Φ может быть записано в следующей известной форме:

$$-(M^2-1)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\frac{2M}{a}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial t}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0 \qquad (1.2)$$

где скорость звука a и число $M=c/a>1$ — некоторые постоянные и производная по времени вычисляется в системе координат $O^*x^*y^*z^*$. При формулировке граничных условий примем, что при поступательных перемещениях донышка S_1 и вращении его вокруг оси Oz прилегающие к S_1 частицы газа движутся вместе с S_1 как твердое тело. На поверхности S_2 должны совпадать нормальные компоненты скорости газа и поверхности S_2. В силу сверхзвукового характера потока эту цилиндрическую поверхность можно считать полубесконечной, так что какие-либо дополнительные условия на открытом конце полости отпадают.

Таким образом, в момент совпадения $Oxyz$ и $O^*x^*y^*z^*$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}=(\mathbf{u},\mathbf{s})+(\mathbf{R}\times\mathbf{s},\boldsymbol{\omega}),\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}=(\mathbf{R}\times\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\omega})\qquad \text{на } S_1$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}=(\mathbf{u},\boldsymbol{\nu})+(\mathbf{R}\times\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\omega})\ \text{на } S_2 \qquad (1.3)$$

Здесь ν — орт внешней нормали к Q, $\mathbf{s}$ — орт произвольного направления в плоскости S_1. При гармонических колебаниях можно положить

$$u(t)=u_0e^{i\sigma t},\qquad \omega(t)=\omega_0e^{i\sigma t} \qquad (1.4)$$

§ 2. Определение потенциала скоростей возмущенного движения газа. Будем искать потенциал скоростей в виде суммы слагаемых, соответствующих движению несжимаемой жидкости внутри бесконечно длинного цилиндра, получаемого из S_2, и бесконечного ряда, выражающего влияние системы волн, возникающих при возмущенном движении:

$$\Phi=yu+xy\omega+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\frac{\partial r_n(x,t)}{\partial t} \qquad (2.1)$$

где y и xy — гармонические функции, удовлетворяющие граничным условиям (1.3) на S_2, а $\psi_n (n=1,2,\ldots)$ — собственные функции уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2\psi_n}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi_n}{\partial z^2}+k_n^2\psi_n=0 \qquad (2.2)$$

Определенные в области S, представляющей собой поперечное сечение Q, при граничном условии на контуре C, ограничивающем S:

$$\partial\psi_n/\partial\nu=0 \qquad (2.3)$$

В рассматриваемом случае круговой области в качестве функций ψ_n, входящих в (2.1), введем следующие:

$$\psi_n=\frac{J_1(\xi_nR/R_0)}{J_1(\xi_n)}\cos\theta,\qquad k_n=\frac{\xi_n}{R_0}\qquad (n=1,2,\ldots) \qquad (2.4)$$

где J_1 — функция Бесселя 1-го рода первого порядка, θ — полярный угол, отсчитываемый от оси Oy, R — текущее значение радиуса, ξ_n — корни уравнения

$$J_n'(\xi) = 0 \tag{2.5}$$

Подставляя выражение (2.1) в уравнение (1.2) и предполагая возможным почленное дифференцирование ряда, входящего в (2.1), получим, принимая во внимание условия (2.1) и пренебрегая произвольной функцией координат, следующее дифференциальное уравнение и начальные условия для $r_n(x, t)$:

$$\left[a^2(M^2-1)\frac{\partial^2 r_n}{\partial x^2} + 2c\frac{\partial^2 r_n}{\partial x \partial t} + + \frac{\partial^2 r_n}{\partial t^2} + a^2 k_n^2 r_n\right]\psi_n + y(u^{\cdot} + 2c\omega + x\omega^{\cdot}) = 0 \tag{2.6}$$

$$r_n(0, t) = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 r_n(x, t)}{\partial x \partial t} = -2y\omega \qquad \text{при } x = 0 \tag{2.7}$$

Используя подстановку $r_n(x, t) = \zeta_n(x)e^{i\sigma t}$ и разложение функции $y = R\cos\theta$ в обобщенный ряд Фурье по функциям ψ_n

$$y = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{N_n^2}\psi_n \qquad \left(D_n = \frac{\pi R_0^3}{\xi_n^2}, \quad N_n^2 = \frac{\pi R_0^2(\xi_n^2-1)}{2\xi_n^2}\right) \tag{2.8}$$

приведем уравнение (2.6) и (2.7) к следующей эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений и начальных условий для функций $\zeta_n(x)$:

$$a^2(M^2-1)\frac{d^2\zeta_n}{dx^2} + 2ic\sigma_n\frac{d\zeta_n}{dx} + (\sigma_n^2 - \sigma^2)\zeta_n = -\frac{D_n\sigma}{N_n^2}\left[iu_0 + \left(ix + \frac{2c}{\sigma}\omega_0\right)\right] \tag{2.9}$$

$$\zeta_n(0) = 0, \qquad \zeta_n'(0) = \frac{2iD_n\omega_0}{N_n^2\sigma} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.10}$$

где

$$\sigma_n^2 = k_n^2 a^2 = \frac{\xi_n^2 a^2}{R_0^2} \tag{2.11}$$

Решение (2.9), удовлетворяющее (2.10), можно записать в виде

$$\zeta_n(x) = \frac{D_n}{N_n^2}\sum_{k=1}^{2}\alpha_k\zeta_{nk}(x) \tag{2.12}$$

где

$$\zeta_{n1}(x) = -\frac{\sigma^2}{\sigma_n^2-\sigma^2}\Big\{-1 + e^{-iM\delta\sigma x}\Big[\cos\delta\sqrt{\beta_n^2+\sigma^2}\,x + \\ + \frac{iM\sigma}{\sqrt{\beta_n^2+\sigma^2}}\sin\delta\sqrt{\beta_n^2+\sigma^2}\,x\Big]\Big\} \tag{2.13}$$

$$\zeta_{n2}(x) = \frac{\sigma}{\sigma_n^2-\sigma^2}\left(\sigma x - \frac{2ic\sigma_n^2}{\sigma_n^2-\sigma^2}\right) + \frac{ae^{-iM\delta\sigma x}}{(\sigma_n^2-\sigma^2)^2}\Big\{2iM\sigma_n^2\sigma\cos\delta\sqrt{\beta_n^2+\sigma^2}x - \\ - \frac{(M^2-1)(\sigma^4+2\sigma_n^4-\sigma^2\sigma_n^2)+2\sigma^2\sigma_n^2}{\sqrt{\beta_n^2+\sigma^2}}\sin\delta\sqrt{\beta_n^2+\sigma^2}x\Big\}$$

$$\alpha_1 = u_0, \qquad \alpha_2 = \omega_0, \qquad \delta = \frac{1}{a(M^2-1)}, \qquad \beta_n^2 = \sigma_n^2(M^2-1)$$

§ 3. Вычисление главного вектора и главного момента системы газодинамических сил. Главный вектор $\mathbf{P}$ и главный момент $\mathbf{M}_0$ системы газодинамических сил относительно точки O проще всего получить, используя функцию, характеризующую возмущения давления, и учитывая добавочное изменение количества движения и кинетического момента вследствие истечения газа из источников, заполняющих поверхность S_1:

$$\mathbf{P} = \iint\limits_{S_1+S_2} \delta p \boldsymbol{\nu} dS + \mathbf{P}^{(r)}, \qquad \mathbf{M}_0 = \iint\limits_{S_1+S_2} \delta p (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\nu}) dS + \mathbf{M}_0^{(r)} \tag{3.1}$$

где

$$\mathbf{P}^{(r)} = -\mathbf{c}\mu^{\cdot}, \qquad \mathbf{M}_0^{(r)} = c^2 \iint\limits_{S_1} (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\nu}) \, \delta\rho dS \tag{3.2}$$

а $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки поверхности $S_1 + S_2$. При этом вариации давления δp и плотности $\delta\rho$ нужно выразить через связанные координаты. Интеграл Лагранжа — Коши в подвижной системе $Oxyz$ имеет вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v_a^2}{2} - \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_l + \int \frac{dp}{\rho} = \chi(t)$$

где $\mathbf{v}_a$ — абсолютная скорость частицы газа, $\mathbf{v}_l$ — переносная скорость, $\chi(t)$ — произвольная функция времени.

В рассматриваемом случае $\mathbf{v}_a = \mathbf{c} + \nabla \Phi$, $\mathbf{v}_l = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$, поэтому выражение для δp приобретает после опускания несущественной функции времени следующую форму:

$$\delta p = -\rho_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + c \frac{\partial \Phi}{\partial x} + cy\omega \right) \tag{3.3}$$

где ρ_0 — массовая плотность невозмущенного газа. Выражение для вариации плотности $\delta\rho$ с той же степенью точности имеет вид

$$\delta\rho = \frac{\delta p}{a^2} = -\frac{\rho_0}{a^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + c \frac{\partial \Phi}{\partial x} + cy\omega \right) \tag{3.4}$$

В силу граничного условия (1.3) на поверхности S_1

$$\delta\rho = -\frac{\rho_0}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Подставляя δp из (3.3) в формулы (3.1) и выполняя интегрирование по поверхности $S_1 + S_2$, используя во второй из них интегрирование по частям, получим

$$\mathbf{P} = -\rho_0 \Big[\iint\limits_{S_1+S_2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \boldsymbol{\nu} dS + c \iint\limits_{S_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \boldsymbol{\nu} dS + hc\omega \oint\limits_{c} y \boldsymbol{\nu} ds \Big] - \mathbf{c}\mu^{\cdot} \tag{3.5}$$

$$\mathbf{M}_0 = -\rho_0 \Big[\iint\limits_{S_1+S_2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\nu}) dS + c \iint\limits_{S_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\nu}) dS -$$
$$- \iint\limits_{S_2} \Phi (\mathbf{c} \times \boldsymbol{\nu}) dS + c\omega \iint\limits_{S_2} y (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\nu}) dS + M^2 \iint\limits_{S_1} \frac{\partial \Phi}{\partial t} (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\nu}) dS \Big]$$

Подставляя далее Φ согласно (2.1) в (3.5), можно получить

$$\mathbf{P} = -\frac{d\mathbf{K}}{dt} - \mathbf{c}\mu^{\cdot} - 2\mu^{\cdot} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_0) - \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \iint\limits_{S_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial r_n}{\partial t} + c \frac{\partial r_n}{\partial x} \right) \psi_n \boldsymbol{\nu} dS \tag{3.6}$$

$$\mathbf{M}_0 = -\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} + \mu^{\cdot} (\omega \times \mathbf{R}_0) \times \mathbf{R}_0 - \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \iint\limits_{S_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial r_n}{\partial t} + c \frac{\partial r_n}{\partial x} \right) (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\nu}) \psi_n dS$$

Здесь

$$\mathbf{K} = \mu(\mathbf{u} + \omega \times \mathbf{R}_c) = \mu\left(u + \frac{h}{2}\,\omega\right)\mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{L}_0 = \mu\left[\mathbf{u} \times \mathbf{R}_c + \frac{2}{3}(\omega \times \mathbf{R}_c) \times \mathbf{R}_c\right] + \delta\mathbf{L}_0 =$$
$$= \mu\left[\frac{h}{2}u + \frac{h^2}{3}\omega + (1 + M^2)\frac{R_0^2 u}{h}\right]\mathbf{i}_3 \qquad (3.7)$$

где μ — масса газа, заполняющего объем Q, $\mathbf{R}_0$ — радиус-вектор центра выходного сечения, $\mathbf{R}_c$ — радиус-вектор центра инерции газовой массы Q

$$\mu = \pi R_0^2 h \rho_0, \qquad \mathbf{R}_0 = h\mathbf{i}_1, \qquad \mathbf{R}_c = \frac{h}{2}\,\mathbf{i}_1 \qquad (3.8)$$

При получении выражений (3.6) использованы формулы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^2 - 1} = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^2(\xi_n^2 - 2)} = \frac{1}{8} \qquad (3.9)$$

Введем в рассмотрение операторы

$$\Omega_{n1}(\zeta_{nk}) = \left[a^2(M^2-1)\frac{d}{dx} + ic\sigma\right]\zeta_{nk}(x)\Big|_{x=0}^{x=h} + \sigma_n^2\int_0^h \zeta_{nk}(x)\,dx$$
$$\Omega_{n2}(\zeta_{nk}) = h\left[a^2(M^2-1)\frac{d}{dh} + ic\sigma\right]\zeta_{nk}(h) + \sigma_n^2\int \zeta_{nk}(h)\,dh -$$
$$- \int_0^h \left\{\left[a^2(M^2-1)\frac{d}{dx} + ic\sigma\right]\zeta_{nk}(x)\,dx + \sigma_n^2\int \zeta_{nk}(x)\,dx\right\}dx \qquad (3.10)$$

и перейдем к скалярной форме уравнений (3.6). Заменив функции ψ_n соответствующими выражениями из (2.4) и принимая во внимание формулы (2.8), (2.11), (2.12) и (1.4), получим из (3.6) после выполнения некоторых квадратур:

$$P_y = 2\pi\rho_0 R_0^2 e^{i\sigma t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\xi_n^2 - 1}\sum_{k=1}^{2}\alpha_k\Omega_{n1}(\zeta_{nk}) + \frac{\mu\cdot c\omega_0 e^{i(\sigma t + {}^1/{}_2\pi)}}{\sigma} \qquad (3.11)$$
$$M_{0z} = 2\pi\rho_0 R_0^2 e^{i\sigma t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\xi_n^2 - 1}\sum_{k=1}^{2}\alpha_k\Omega_{n2}(\zeta_{nk}) - \frac{\pi\rho_0 R_0^4\sigma}{4}(M^2 + 1)\,e^{i(\sigma t + {}^1/{}_2\pi)}.$$

Возвращаясь к функциям $u(t)$ и $\omega(t)$ (1.4) и вводя для малого угла поворота системы координат $Oxyz$ относительно $O^*x^*y^*z^*$ обозначение

$$\vartheta = -\frac{\omega_0{}^{i(\sigma t + \pi/2)}}{\sigma} \qquad (3.12)$$

можно придать формулам (3.11) следующий вид:

$$P_y = -[\mu_{11}(\sigma)u^{\cdot} + \mu_{12}(\sigma)\omega^{\cdot} + \lambda_{11}(\sigma)u + \lambda_{12}(\sigma)\omega + c\mu^{\cdot}\vartheta]$$
$$M_{0z} = -[\mu_{21}(\sigma)u^{\cdot} + \mu_{22}(\sigma)\omega^{\cdot} + \lambda_{21}(\sigma)u + \lambda_{22}(\sigma)\omega] \qquad (3.13)$$

где

$$\mu_{jk} = \frac{2}{\sigma^2}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n \operatorname{Re}[\Omega_{nj}(\zeta_{nk})], \qquad \mu_n = \frac{\pi R_0^2\rho_0}{\xi_n^2 - 1} \qquad (3.14)$$
$$\lambda_{jk} = -\frac{2}{\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n J^m[\Omega_{nj}(\zeta_{nk})] \qquad (j, k = 1, 2),$$

Приведем выражения μ_{1k} и λ_{1k} $(k=1, 2)$, получающиеся из (3.14) после подстановки $\zeta_{n1}(x)$ и $\zeta_{n2}(x)$ из (2.13) и выполнения квадратур:

$$\begin{aligned}
\mu_{11}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \Big\{ & [P_{11}^{(n)}(\sigma) - Q_{11}^{(n)}(\sigma)]\, S_1^{(n)}(\sigma) - \\
& - [P_{11}^{(n)}(\sigma) + Q_{11}^{(n)}(\sigma)]\, S_2^{(n)}(\sigma) + \frac{2h}{R_0} P_{12}^{(n)}(\sigma) \Big\}
\end{aligned} \qquad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{11}(\sigma) = \sigma \sum_{h=1}^{\infty} \mu_n \Big\{ & -[P_{11}^{(n)}(\sigma) - Q_{21}^{(n)}(\sigma)]\, C_1^{(n)}(\sigma) + [P_{11}^{(n)}(\sigma) + \\
& + Q_{11}^{(n)}(\sigma)] C_2^{(n)}(\sigma) - 2Q_{11}^{(n)}(\sigma) \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{12}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n R_0 \Big\{ & [P_{12}^{(n)}(\sigma) + Q_{12}^{(n)}(\sigma)]\, C_1^{(n)}(\sigma) - \\
& - [P_{12}^{(n)}(\sigma) - Q_{12}^{(n)}(\sigma)]\, C_2^{(n)}(\sigma) - 2\Big[Q_{12}^{(n)}(\sigma) - \frac{h^2}{2R_0^2 (1-\zeta_n^2)} \Big] \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{12}(\sigma) = \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n R_0 \Big\{ & [P_{12}^{(n)}(\sigma) + Q_{12}^{(n)}(\sigma)]\, S_1^{(n)}(\sigma) - [P_{12}^{(n)}(\sigma) - \\
& - Q_{12}^{(n)}(\sigma)]\, S_2^{(n)}(\sigma) \Big\}
\end{aligned}$$

Здесь

$$S_{1,2}^{(n)}(\sigma) = \sin \delta\sigma_n (\zeta_n M \pm \sqrt{M^2 - 1 + \zeta_n^2})\, h$$

$$C_{1,2}^{(n)}(\sigma) = \cos \delta\sigma_n (\zeta_n M \pm \sqrt{M^2 - 1 + \zeta_n^2})\, h$$

$$P_{11}^{(n)}(\sigma) = -\frac{\zeta_n^2 [2(M^2-1) + 1 + \zeta_n^2]}{\xi_n (1-\zeta_n^2)^2 \sqrt{M^2 - 1 + \zeta_n^2}}, \quad Q_{11}^{(n)}(\sigma) = -\frac{M\zeta_n (1+\zeta_n^2)}{\xi_n (1-\zeta_n^2)^2} \qquad (3.16)$$

$$P_{12}^{(n)}(\sigma) = -\frac{M[(M^2-1)(\zeta_n^4 + \zeta_n^2 + 2) + 2\zeta_n^4]}{\xi_n \zeta_n^2 (1-\zeta_n^2)^3 \sqrt{M^2 = 1 + \zeta_n^2}} \qquad \left(\zeta_n = \frac{\sigma}{\sigma_n}\right)$$

$$Q_{12}^{(n)}(\sigma) = \frac{(M^2-1)(\zeta_n^4 - \zeta_n^2 + 4) + 2(1+\zeta_n^2)}{\zeta_n^2 (1-\zeta_n^2)^3}$$

Из (3.15) — (3.16) очевидно, что эффекты, связанные с нестационарностью процесса, являются несущественными, если величина ζ_1^2 пренебрежимо мала по сравнению с единицей, т. е., поскольку $\xi_1 \approx 1.8442$, при выполнении неравенства

$$\left(\frac{\sigma R_0}{1.844\, a}\right)^2 \ll 1 \qquad (3.17)$$

Полагая, например, $R_0 / a \sim 10^{-3}$ сек, получим для этого случая условие применимости гипотезы стационарности

$$\left(\frac{\sigma}{1.844}\right)^2 \ll 10^6$$

Заметные отклонения от нее должны в этом случае наблюдаться только при вынужденных колебаниях с частотами порядка сотен герц. Иными словами, сверхзвуковая газовая струя, протекающая через цилиндрический канал, может в широком диапазоне чисел Струхаля считаться «абсолютно жесткой» в поперечном направлении. Осуществив в (3.14) предельный переход $\sigma \to 0$, можно получить выражения, учитывающие в рамках гипотезы стационарности эффект донышка S_1.

Поступила 20 VI 1959