Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

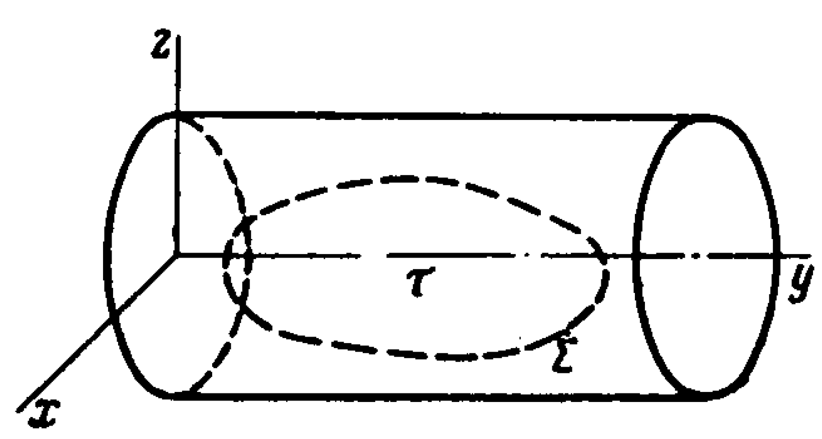
К ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ, ИМЕЮЩИХ ЖИДКИЕ ПОЛОСТИ

Н. Н. Моисеев

(Москва)

В современной технике встречаются разнообразные задачи, требующие исследования совместных колебаний упругого тела и жидкости. В общей постановке исследование такой задачи достаточно сложно. Здесь излагается приближенная теория, основанная на следующих упрощающих допущениях: а) линейность задачи: все смещения и скорости предполагаются бесконечно малыми, соответственно этому уравнения движения и граничные условия линеаризуются; б) схема балки: реальное упругое тело заменяется балкой с прямолинейной осью жесткости, предполагается справедливость гипотезы плоских сечений; в) жидкость — идеальная и несжимаемая, ее движение — безвихревое; г) массовая сила — сила тяжести; д) внешние силы консервативны. Здесь приводятся: вывод общих уравнений, разрешимость основных задач, анализ спектра, формулировка вариационных принципов и их обоснование.

§ 1. Плоские изгибные колебания балки, полость которой целиком заполнена жидкостью. 1. Введем систему координат следующим образом (фиг. 1): ось y направим вдоль оси жесткости, оси x и z расположим в сечении, перпендикулярном оси y, так, чтобы система координат была правой. Длину балки обозначим через l, через $m(y)$ — погонную массу, через $c(y)$ — жесткость на изгиб. Будем рассматривать лишь тот случай, когда колебания происходят в плоскости yz. Через $z(y, t)$ обозначим прогиб.



Фиг. 1

Пусть τ — объем, который занимает жидкость, Σ — поверхность, его ограничивающая, $\varphi(x, y, z, t)$ — потенциал скоростей абсолютного движения жидкости. Функция φ — гармоническая в τ. На Σ она удовлетворяет условию

$$\partial\varphi / \partial n = v_n \tag{1.1}$$

где v_n — проекция скоростей точек Σ на внешнюю нормаль к Σ. В данном случае

$$v_n = \frac{\partial z}{\partial t}(\mathbf{z}^0 \cdot \mathbf{n}^0) = \frac{\partial z}{\partial t}\gamma(x, y, z)$$

Здесь $\mathbf{n}^0$ — орт внешней нормали, $\gamma = \cos(\mathbf{z}^0\mathbf{n}^0)$.

Пусть $H(P, Q)$ — функция Грина задачи Неймана для области τ. Введем оператор Неймана

$$\mathrm{H}\, u = \int_\Sigma H(P, Q)\, u(Q)\, ds_Q, \qquad \varphi = \mathrm{H}\frac{\partial Z}{\partial t}\gamma \tag{1.2}$$

Составим выражения кинетической и потенциальной энергий балки с жидкостью

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l mZ_t^2\,dy + \frac{1}{2}\rho\int_\tau (\nabla HZ_t\gamma)^2\,d\tau, \qquad \Pi = \frac{1}{2}\int_0^l cZ_{yy}{}^2\,dy + \frac{1}{2}\int_0^l \beta Z^2\,dy \quad (1.3)$$

где ρ — плотность жидкости. Первое слагаемое в последнем равенстве — это потенциальная энергия упругих сил, второе — внешних сил, которые предполагаются консервативными.

2. Поставим задачу об отыскании свободных колебаний балки. Для этого сначала положим

$$Z(y;\,t) = \cos\omega t\vartheta(y), \qquad \varphi = -\omega\sin\omega t\Phi(x,\,y,\,z), \qquad \Phi = H\vartheta\gamma \quad (1.4)$$

Имея в виду применить метод Ритца, выпишем уравнение принципа Гамильтона

$$\delta L = \delta\int_0^t (T - \Pi)\,dt = 0 \quad (1.5)$$

Подставляя в это уравнение выражение функций Z и φ согласно (1.4), а также $t = 2\pi/\omega$ и отбрасывая несущественный множитель, приведем выражение L к виду

$$L = \omega^2\left\{\int_0^l m\vartheta^2\,dy + \rho\int_\tau (\nabla H\vartheta\gamma)^2 d\tau\right\} - \int_0^l c\vartheta''^2\,dy\int_0^l \beta\vartheta^2 dy \quad (1.6)$$

Пусть теперь $\{\psi_n\}$ — некоторая полная и ортонормированная на $[O,\,l]$ система функций. Тогда согласно методу Ритца мы должны принять

$$\vartheta = \sum a_n\psi_n \quad (1.7)$$

где a_n — числа, подлежащие определению. Подставляя ряд (1.7) в выражение функционала L, получим

$$L = \omega^2\sum_{n,\,m} a_n a_m(\alpha_{nm} + \gamma_{nm}) - \sum_{n,\,m} a_n a_m(c_{nm} + \beta_{nm})$$

где

$$\alpha_{nm} = \int_0^l m\psi_n\psi_m\,dy, \qquad c_{nm} = \int_0^l c\psi_n''\psi_m''\,dy$$

$$\gamma_{nm} = \rho\int_\tau \nabla H\psi_n\gamma\cdot\nabla H\psi_m\gamma\,d\tau, \qquad \beta_{nm} = \int_0^l \beta\psi_n\psi_m\,dy \quad (1.8)$$

Таким образом, уравнение (1.5) будет приведено к системе алгебраических уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial a_n} = \sum_m a_m\{\omega^2(\alpha_{nm} + \gamma_{nm}) - (c_{nm} + \beta_{nm})\} \qquad (n = 1,\,2,\,\ldots) \quad (1.9)$$

Характеристическое уравнение этой системы

$$|\,\omega^2(\alpha_{nm} + \gamma_{nm}) - (c_{nm} + \beta_{nm})\,| = 0 \quad (1.10)$$

будет уравнением частот.

Коэффициенты γ_{nm} могут быть названы коэффициентами присоединенных масс жидкости относительно системы функций ψ_n. Таким образом, инерционные свойства жидкости определяются симметричной матрицей бесконечного порядка. Из того факта, что в общем случае $\gamma_{nm} \neq 0$, если $n \neq m$, следует, что наличие жидкости внутри полости изменяет не только собственные частоты, но и формы главных колебаний.

3. В предыдущем разделе была изложена формальная схема применения метода Ритца и было установлено, что задача гидромеханики может быть решена независимо от решения задачи динамики системы. (Функции $\mathrm{H}\,\phi_n\gamma$ зависят только от геометрии полости и выбора функций ϕ_n; они не зависят от движения балки).

При реализации изложенной выше схемы вычислений встречаются два вопроса. Во-первых, как разумно определять систему функций ϕ_n, и, во-вторых, как эффективно строить функции $\mathrm{H}\,\phi_n\gamma$.

Что касается второго вопроса, то очень трудно дать какие-либо общие рекомендации. Говоря о первом вопросе, можно во многих случаях рекомендовать выбирать в качестве функций $\{\phi_n\}$ собственные функции оператора

$$\mathrm{L}\,u \equiv [cu_{yy}]_{yy} + \beta u = \lambda^2 mu \tag{1.11}$$

удовлетворяющие таким граничным условиям, которые соответствуют условиям закрепления балки. Если, например, оба конца балки свободны, то

$$u''(l) = u''(0) = 0, \quad u'''(l) = u'''(0) = 0 \tag{1.12}$$

Нетрудно проверить, что в случае краевых условий (1.12) оператор L — самосопряженный и собственные функции уравнения (1.11) обладают следующими свойствами: они ортонормированы с весом $m(y)$

$$\int_0^l m(y)\,u_n(y)\,u_m(y)\,dy = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases} \tag{1.13}$$

и кроме того

$$\int_0^l c(y)\,u_n''(y)\,u_m''(y)\,dy + \int_0^l \beta u_n u_m\,dy = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \lambda_n & (m = 0) \end{cases} \tag{1.14}$$

где λ_n — n-е собственное число оператора L.

Эти свойства позволяют сильно упростить систему (1.9), так как в этом случае

$$\beta_{nm} + c_{nm} = \delta_{nm}\lambda_n^2, \qquad \alpha_{nm} = \delta_{nm} \qquad (\delta_{nm} \text{ — символ Кронеккера}) \tag{1.15}$$

Характеристическое уравнение (1.10) примет тогда вид:

$$\begin{vmatrix} \omega^2(1+\gamma_{11}) - \lambda_1^2 & \omega^2\gamma_{12} & \omega^2\gamma_{13} & \cdots \\ \omega^2\gamma_{21} & \omega^2(1+\gamma_{22}) - \lambda_2^2 & \omega^2\gamma_{23} & \cdots \\ \omega^2\gamma_{31} & \omega^2\gamma_{32} & \omega^2(1+\gamma_{33}) - \lambda_3^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \tag{1.16}$$

Бесконечная система (1.9) и определитель (1.10) или (1.16) всегда являются сходящимися. Этот факт следует из общей теории (см. § 3).

Если балка однородная и внешние силы равномерно распределены по размаху (функции $c\,(y)$, $\beta\,(y)$ и $m\,(y)$ — постоянные), то построение системы $\{\psi_n\}$ элементарно. Если параметры балки меняются вдоль ее размаха, то построение системы координатных функций значительно усложняется.

4. Н. Е. Жуковский показал, что в динамическом отношении твердое тело, внутри которого находится полость, целиком (без свободной поверхности) заполненная идеальной и несжимаемой жидкостью, подобно некоторому твердому телу без жидкости. Масса такого «эквивалентного» твердого тела равна суммарной массе твердого тела и жидкости, а тензор инерции определяется плотностью жидкости и геометрией полости.

Интересно выяснить, в какой степени этот факт переносится на изучаемое явление: можно ли утверждать, что в динамическом отношении балка с жидкостью эквивалентна некоторой балке без жидкости, но с другим распределением масс по сечениям.

Для того чтобы ответить на этот вопрос, составим дифференциальные уравнения движения изучаемой системы.

Составим выражение действия по Гамильтону

$$L = L_1 + L_2$$

где

$$L_1 = \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^l \{mZ_t^2 - cZ_{yy}^2 - \beta Z^2\}\, dy\, dt, \qquad L_2 = \frac{1}{2}\rho\int_0^t\int_\tau (\nabla\, \mathrm{H}\, \gamma Z_t)\, d\tau\, dt$$

Вариация первого функционала вычисляется стандартным способом; она равна

$$\delta L_1 = -\int_0^t\int_0^l \{mZ_{tt} + (cZ_{yy})_{yy} + \beta Z\}\, \delta Z\, dy\, dt \tag{1.17}$$

Вычислим вариацию второго функционала

$$\delta L_2 = \rho\int_0^t\int_\tau (\nabla\, \mathrm{H}\, \gamma Z_t)\cdot(\nabla\, \mathrm{H}\, \gamma\delta Z_t)\, d\tau\, dt$$

Применим формулу Грина

$$\delta L_2 = \rho\int_0^t\int_\Sigma \mathrm{H}\, \gamma Z_t \frac{\partial}{\partial n_\Sigma} \nabla\, \mathrm{H}\, \gamma\delta Z_t\, d\Sigma\, dt$$

Так как по определению оператора H имеем $\partial \mathrm{H}\, u / \partial n_\Sigma = u$, то выражение L_2 может быть упрощено:

$$\delta L_2 = \rho\int_{y_1}^{y_2} dy \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\delta Z F\,(y,\, t)\, dt \qquad \left(F\,(y,\, t) = \int_{l_y} (\mathrm{H}\, \gamma Z_t)\, \gamma\, dl\right) \tag{1.18}$$

Здесь через l_y обозначен периметр сечения нормального оси y, ордината которого равна y. Интегрируя (1.18) по частям по t и принимая во внимание изохронность вариации, получим

$$\delta L_2 = -\rho\int_0^t\int_{y_1}^{y}\int_{l_y} (\mathrm{H}\, \gamma Z_{tt})\, \gamma\, dl\delta Z\, dy\, dt \tag{1.19}$$

В этом выражении интегрирование по y мы можем считать происходящим в пределах от нуля до l. Для этого достаточно положить $\mathrm{H} \equiv 0$ для значений y, лежащих вне интервала $[y_1, y_2]$.

Согласно принципу Гамильтона

$$\delta L_1 + \delta L_2 = 0$$

Подставляя в это уравнение выражения для вариаций L_1 и L_2 и используя произвол величины δZ, придем к следующему интегро-дифференциальному уравнению изгибных колебаний балки, внутри которой находится жидкость:

$$\rho \int_{l_y} (H\gamma Z_{tt}) \gamma \, dl + m Z_{tt} + (c Z_{yy})_{yy} + \beta Z = 0 \tag{1.20}$$

Первый интеграл учитывает инерцию жидкости. Если он равен нулю, то мы имеем уравнение изгибных колебаний балки без жидкости. Оно хорошо изучено. В этом случае ускорения в каком-либо сечении однозначно определяются величинами упругой силы и внешней силы в этом сечении. Что же касается первого члена, то его величина определяется характером ускорений всех сечений балки. Другими словами, гипотеза плоских сечений заведомо не верна для жидкости (частицы жидкости перемещаются вдоль оси y). Следовательно, никакой эквивалентной балки в общем случае ввести не удается.

5. Упрощения, которые вносит в расчеты приведение задачи о балке с жидкостью к задаче об эквивалентной обычной балке, настолько значительны, что естественно выяснить те условия, когда такая замена не приводит к большим ошибкам. Подробное изложение этого вопроса требует довольно много места. Поэтому мы приведем здесь лишь окончательный результат.

Гипотеза плоских сечений может быть использована лишь в том случае, когда длина балки велика по сравнению с ее другими размерами. Кроме того, необходимо, чтобы поверхность полости мало отличалась от цилиндрической поверхности, образующая которой параллельна оси балки (оси y). Однако и в этом случае гипотеза плоских сечений может дать более или менее точный результат только для расчета первых собственных колебаний.

Предположим теперь, что гипотеза плоских сечений справедлива. Это значит, что жидкость движется только в плоскости сечений, нормальных к оси балки. Обозначим через $\varphi_y(x, z)$ потенциал скоростей течения жидкости в сечении, ордината которого равна y, через H_y — оператор Неймана для этого сечения (плоская фигура, ограниченная контуром l_y). Тогда

$$\varphi_y = H_y \gamma_y Z_t$$

Здесь $\gamma_y = \cos(\mathbf{n}_l{}^0 \mathbf{z}^0)$ — направляющий косинус нормали к l_y, в плоскости xZ. Введем понятие присоединенной погонной массы жидкости

$$m_{\text{ж}}(y) = \rho \int_{l_y} \gamma_y H_y \gamma_y \, dl$$

Тогда кинетическая энергия системы балки + жидкость может быть записана в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \{m(y) + m_{\text{ж}}(y)\} Z_t^2 \, dy \tag{1.21}$$

Это выражение показывает, что в исследуемом случае задача сводится к изучению изгибных колебаний «эквивалентной балки», обладающей той же жесткостью на изгиб, но с измененной погонной массой

$$m^* = m + m_{\text{ж}}$$

§ 2. Изгибные колебания балки в том случае, когда находящиеся внутри нее жидкие массы имеют свободную поверхность. 1. В предыдущем параграфе было установлено, что если жидкость целиком заполняет полость, то она не добавляет новых степеней свободы. Движение жидкости приводит в этом случае только к некоторому изменению величины собственных частот и форм главных колебаний по сравнению с теми, которые имела бы балка, если бы жидкость в ней отсутствовала.

Если же жидкость имеет свободную поверхность, на которой могут образовываться волны, то движение жидкости приводит к появлению дополнительного спектра собственных частот и главных колебаний.

Итак, пусть жидкость имеет свободную поверхность. Введем еще одну «неподвижную» систему координат $x_1y_1z_1$ так, что плоскость x_1y_1 совпадает со свободной поверхностью жидкости в положении равновесия. Ось oz_1 направим вертикально вверх (в общем случае по направлению массовых сил) так, как это показано на чертеже (фиг. 2).

Под областью τ теперь будем понимать объем, ограниченный смоченной поверхностью полости (поверхность Σ) и свободной поверхностью (плоская фигура S). В силу линейности задачи потенциал скоростей абсолютного движения жидкости можно записать так:

$$\varphi(P, t) = \int\limits_{\Sigma+S} H(P, Q)\, v_n(Q, t)\, ds_Q + \int\limits_S H(P, Q)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t} - v_n\right) ds_Q =$$

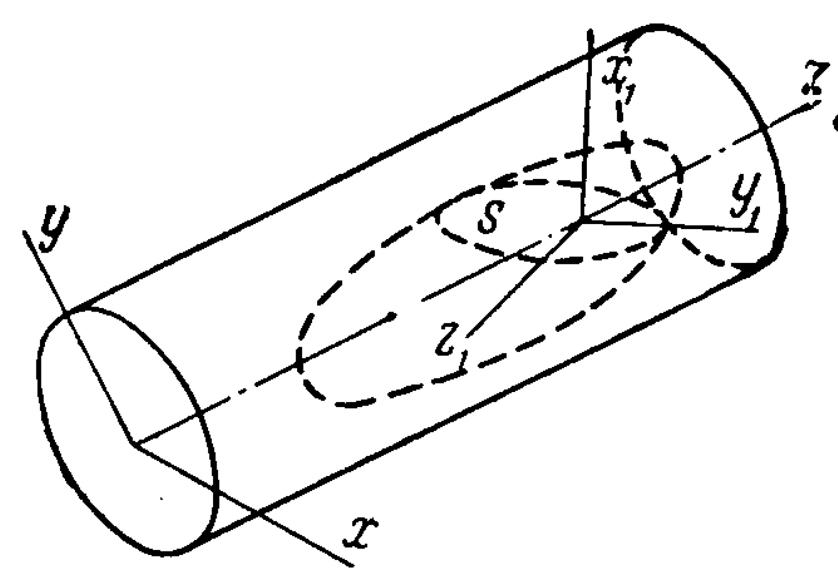
$$= \mathrm{H}\, v_n + \mathrm{H}^*\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t} - v_n\right) \tag{2.1}$$

где $z_1 = \zeta(t, x_1y_1)$ — уравнение свободной поверхности, а скорость v_n определяется формулой $v_n = Z_t \cos(nz) = Z_t\gamma$.

Оператор H был определен. Оператор H^* определяет в τ некоторую функцию, нормальная производная которой на Σ равна нулю, а на S равна $\partial\zeta / \partial t - v_n$.

Используя предположение о несжимаемости и гипотезу плоских сечений (из которой следует, что объем балки остается неизменным), установим, что

$$\int\limits_S \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t} - v_n\right) ds = 0$$



Фиг. 2

Отсюда следует, что функция $\mathrm{H}^*(\partial\zeta / \partial t - v_n)$ — гармоническая в τ.

Для дальнейшего удобно ввести величину

$$U = \zeta - Z\gamma = \zeta - z_1$$

U — это дополнительное перемещение жидкости за счет волн, образующихся на ее поверхности, z_1 — это перемещение точек плоскости S вследствие изгиба, вычисленное в координатах x_1, y_1, z_1.

Кинетическая энергия системы балка + жидкость в исследуемом случае будет иметь вид:

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_0^l mZ_t^2\, dy + \frac{1}{2}\rho\int\limits_\tau (\nabla \mathrm{H}\gamma Z_t)^2 d\tau +$$

$$+ \rho\int\limits_\tau (\nabla\, \mathrm{H}\, \gamma Z_t)(\nabla\, \mathrm{H}^* U_t)\, d\tau + \frac{1}{2}\rho\int\limits_\tau (\nabla\, \mathrm{H}^* U_t)^2\, d\tau \tag{2.2}$$

Потенциальная энергия этой системы равна сумме потенциальных энергий упругих и внешних сил и потенциальной энергии жидкости (которая определяется изменением аппликаты центра тяжести жидких масс):

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l c\,(Z_{yy})^2\,dy + \frac{1}{2}\int_0^l \beta Z^2\,dy + \rho g \int_\tau z_1\,d\tau$$

В этой сумме вычислим последний интеграл:

$$\int z_1\,d\tau = \frac{1}{2}\int_S \zeta^2\,dx_1\,dy_1 - \frac{1}{2}\int_S z_1^{*2}\,dx_1 dy_1$$

Здесь $z_1 = z_1^*(x_1, y_1, t)$ — уравнение поверхности Σ в системе координат $x_1 y_1 z_1$. Так как $\zeta = U + z_1$, то

$$\int_\tau z_1\,d\tau = \frac{1}{2}\int_S U^2\,dx_1\,dy_1 + \int_S UZ_\gamma\,dx_1\,dy_1 + J$$

Последнее слагаемое этой суммы имеет следующую структуру:

$$J = \int_{y_1}^{y_2} Z^2(y, t)\,F(y)\,dy$$

где $F(y)$ — известная функция (которая от времени не зависит). Таким образом, это слагаемое имеет ту же структуру, что и потенциальная энергия внешних сил. Так оно и должно быть, ибо J определяет ту часть энергии силы тяжести, которая зависит только от прогиба. Поэтому величину J мы можем включить в выражение потенциальной энергии внешних сил, изменив надлежащим образом функцию β. Таким образом, мы будем иметь

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l cZ_{yy}^2\,dy + \frac{1}{2}\int_0^l \beta Z^2\,dy + \frac{1}{2}\rho g\int_S U^2\,ds + \rho g\int_S UZ\gamma\,ds \qquad (2.3)$$

2. Уравнения движения проще всего составить, если воспользоваться принципом Гамильтона

$$\delta L = 0, \qquad L = L_1 + L_2 \qquad (2.4)$$

где

$$L_1 = \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^l mZ_t^2\,dy\,dt + \frac{1}{2}\rho\int_0^t\int_\tau (\nabla \mathrm{H}\gamma Z_t)^2\,d\tau\,dt - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^l [cZ_{yy}^2 + \beta Z^2]\,dy$$

$$L_2 = \rho\int_0^t\int_\tau (\nabla \mathrm{H}\gamma Z_t)(\nabla \mathrm{H}^* U_t)\,d\tau\,dt + \frac{1}{2}\rho\int_0^t\int_\tau (\nabla \mathrm{H}^* U_t)^2\,d\tau\,dt -$$

$$- \frac{1}{2}\rho g\int_0^t\int_S U^2\,ds\,dt - \rho g\int_0^t\int_S UZ\gamma\,ds\,dt$$

Вариация первого функционала была вычислена в предыдущем параграфе:

$$\delta L_1 = -\int_0^t\int_0^l \left\{mZ_{tt} + (cZ_{yy})_{yy} + \beta Z + \rho\int_{l_y} \gamma H\,\gamma Z_{tt}\,dl\right\}\delta Z\,dy\,dt \qquad (2.5)$$

Вычислим вариацию второго функционала:

$$\delta L_2 = \rho \int_0^t \int_\tau (\nabla H\, \gamma Z_t)(\nabla H^*\, \delta U_t)\, d\tau\, dt + \rho \int_0^t \int_\tau (\nabla H\, \gamma \delta Z_t)(\nabla H^*\, U_t)\, dt\, d\tau +$$

$$+ \rho \int_0^t \int_\tau \nabla H^*\, U_t \cdot \nabla H^* \delta U_t\, d\tau\, dt -$$

$$- \rho g \int_0^t \int_S U \delta U\, ds\, dt - \rho g \int_0^t \int_S U \gamma \delta Z\, ds\, dt - \rho g \int_0^t \int_S \gamma Z\, \delta U\, ds\, dt \qquad (2.6)$$

Воспользуемся формулой Грина и тем, что

$$\frac{\partial H v}{\partial n} = v \qquad (P \in \Sigma + S), \qquad \frac{\partial H^* v}{\partial n} = \begin{cases} v & (P \in S) \\ 0 & (P \in \Sigma) \end{cases}$$

Это позволяет представить выражение (2.6) в следующем виде:

$$\delta L_2 = \rho \int_0^t \int_{\Sigma+S} \gamma H^*\, U_t\, \delta Z_t\, ds\, dt + \rho \int_0^t \int_S H \gamma Z_t\, \delta_t U\, ds\, dt + \rho \int_0^t \int_S \mathrm{H}^* U_t\, \delta U_t\, ds\, dt -$$

$$- \rho g \int_0^t \int_S U \delta U\, ds\, dt - \rho g \int_0^t \int_S \gamma U\, \delta Z\, ds\, dt - \rho g \int_0^t \int_S \gamma Z\, \delta U\, ds\, dt$$

Интегрируя по частям (по t) и пользуясь изохронностью вариаций, будем иметь

$$\delta L_2 = -\rho \int_0^t \int_S \{\mathrm{H} \gamma Z_{tt} + H^* U_{tt} + gU + g\gamma Z\}\, \delta U\, ds\, dt -$$

$$- \rho \int_0^t \int_{\Sigma+S} \gamma \mathrm{H}^*\, U_{tt}\, \delta Z\, ds\, dt - \rho g \int_0^t \int_S \gamma U\, \delta Z\, ds\, dt \qquad (2.7)$$

Подставляя (2.5) и (2.7) в уравнение (2.4) и используя независимость вариаций, получим следующие уравнения:

$$m Z_{tt} + \rho \int_{l_y} \gamma \mathrm{H}\, \gamma Z_{tt}\, dl + \rho \int_{l_y} \gamma \mathrm{H}^*\, U_{tt}\, dl + (c Z_{yy})_{yy} + \beta Z + \rho g \int_d \gamma U\, dl = 0$$

$$\mathrm{H} \gamma Z_{tt} + \mathrm{H}^* U_{tt} + \rho g U + \rho g\, \gamma Z = 0 \qquad (2.8)$$

Здесь через d обозначена линия пересечения фигуры S с плоскостью нормального сечения.

Таким образом, движение системы балка—жидкость в данном случае описывается системой двух интегро-дифференциальных уравнений.

3. Для определения собственных частот и форм главных колебаний воспользуемся методом Ритца. Положим в уравнении (2.4) (2.9)

$$Z(y, t) = \cos \omega t \vartheta(y) \quad y \text{ на } [0; l], \qquad U(P, t) = \cos \omega t f(P) \quad P \text{ на } S$$

Задача определения собственных колебаний сводится к минимизации следующего функционала:

$$L^* = \omega^2 \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l m \vartheta^2 dy + \frac{1}{2} \rho \int_\tau (\nabla H \gamma \vartheta)^2\, d\tau + \rho \int_\tau (\nabla H \gamma \vartheta)(\nabla H^* f)\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \rho \int_\tau (\nabla H^* f)^2\, d\tau \right\} - \frac{1}{2} \int_0^l [(c \vartheta'')^2 + \beta \vartheta^2]\, dy - \frac{1}{2} g \rho \int f^2\, ds - \rho g \int_S \gamma f \vartheta\, ds \quad (2.10)$$

Для того чтобы решать эту вариационную задачу методом Ритца, необходимо выбрать две системы координатных функций $\psi_n(y)$ и $\chi_n(P)$, полных и ортонормированных на $[0, l]$ и S соответственно. Затем положим

$$\zeta = \Sigma a_n \psi_n, \qquad f = \Sigma b_n \chi_n$$

После чего эта задача обычным путем сводится к системе однородных алгебраических уравнений с симметричной матрицей.

Таким образом, задача исследования свободных колебаний балки, внутри которой находятся жидкие массы, имеющие свободную поверхность, сводится к построению операторов H и H* (для этого необходимо уметь численно решать задачу Неймана для области τ), построению систем функций ψ_n и χ_n и составлению и решению однородной системы алгебраических уравнений.

В предыдущих параграфах был проведен формальный анализ проблемы. На примере простейшего «одноразмерного» движения была показана возможность редукции задачи к алгебраической. Ниже рассматривается общий случай малых колебаний балки, причем основное внимание сосредоточивается на проблеме существования главных колебаний и свойствах спектра.

§ 3. Произвольные колебания балки. Некоторые общие вопросы теории. *1. Сведение к функциональному уравнению и некоторые упрощения.* Введем обозначение прогиба в плоскости xOy — $X(y, t)$ и угла кручения — $\theta(y, t)$. Кинетическую и потенциальную энергии балки без жидкости будем писать в виде

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}\int_0^l \left\{A_{11}X_t^2 + 2A_{12}X_tZ_t + 2A_{13}X_t\theta_t + A_{22}Z_t^2 + 2A_{23}Z_t\theta_t + A_{33}\theta_t^2\right\} dy \\ \Pi_1 &= \frac{1}{2}\int_0^l \{C_1X_{yy}^2 + C_2Z_{yy}^2 + C_3\theta_y^2 + B_1X^2 + B_2Z^2 + B_3\theta^2\}\, dy \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь C_i — жесткости на изгиб и кручение, B_i — функции, характеризующие внешние силы.

Нормальная составляющая скорости точек поверхности полости в нашем случае выражается формулой

$$v_n = X_i\gamma_1 + Z_t\gamma_2 + \theta_t\gamma_3$$

где

$$\gamma_1 = \cos(n\mathbf{x}^\circ), \quad \gamma_2 = \cos(n\mathbf{z}^\circ) \quad \gamma_3 = z\cos(n\mathbf{x}^\circ) - x\cos(n\mathbf{z}^\circ)$$

Введем упругое перемещение точек плоскости:

$$d_n = X\gamma_1 + Z\gamma_2 + \theta\gamma_3$$

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем параграфе, введем функцию $U(P, t)$:

$$U(P, t) = \zeta(P, t) - d_n(P, t) \qquad (P \in S)$$

Повторяя затем рассуждения предыдущих параграфов, мы можем выписать выражения для энергий, функционала L и интегро-дифференциальные уравнения движения

$$T = T_1 + \frac{1}{2}\rho\int_\tau \{\nabla H X_t\gamma_t + \nabla H Z_t\gamma_2 + \nabla H\theta_t\gamma_3 + \nabla H^* U_t\}^2 d\tau$$
$$\Pi = \Pi_1 + \frac{1}{2}\rho g\int_S U^2 ds + \rho g\int_S U\{X\gamma_1 + Z\gamma_2 + \theta\gamma_3\} ds \tag{3.2}$$

$$L = \int_0^t (T - \Pi)\,dt \tag{3.3}$$

$$A_{11}X_{tt} - \rho\int_{l_y}\gamma_1 H X_{tt}\gamma_1\,dl + A_{12}Z_{tt} + \rho\int_{l_y}\gamma_1 H Z_{tt}\gamma_2\,dl + A_{13}\theta_{tt} + \tag{3.4}$$
$$+\rho\int_{l_y}\gamma_1 H\theta_{tt}\gamma_3\,dl + \rho\int_{l_y}\gamma_1 H^* U_{tt}\,dl + (C_1X_{yy})_{yy} + \beta_1 X + \rho g\int_d \gamma_1 U\,dl = 0$$

$$A_{12}X_{tt} + \rho\int_{l_y}\gamma_2 H X_{tt}\gamma_1\,dl + A_{22}Z_{tt} + \rho\int_{l_y}\gamma_2 H Z_{tt}\gamma_2\,dl + A_{23}\theta_{tt} + \tag{3.5}$$
$$+\rho\int_{l_y}\gamma_2 H\theta_{tt}\gamma_3\,dl + \rho\int_{l_y}\gamma_2 H^* U_{tt}\,dl + (C_2Z_{yy})_{yy} + \beta_2 Z + \rho g\int_d \gamma_2 U\,dl = 0$$

$$A_{13}X_{tt} + \rho\int_{l_y}\gamma_3 H X_{tt}\gamma_1\,dl + A_{23}Z_{tt} + \rho\int_{l_y}\gamma_3 H Z_{tt}\gamma_2\,dl + A_{33}\theta_{tt} + \tag{3.6}$$
$$+\rho\int_{l_y}\gamma_3 H\theta_{tt}\gamma_3\,dl + \rho\int_{l_y}\gamma_3 H^* U_{tt}\,dl - (C_3\theta_y)_y + \beta_3\theta + \rho g\int_d \gamma_3 U\,dl = 0$$

$$H X_{tt}\gamma_1 + H Z_{tt}\gamma_2 + H\theta_{tt}\gamma_3 + H^* U_{tt} + \rho g\gamma_1 X + \rho g\gamma_2 Z + \rho g\gamma_3\theta + \rho g U = 0 \tag{3.7}$$

Для исследования существования периодических решений системы (3.4) — (3.7) и изучения свойств спектра целесообразно записать эту систему в операторной форме.

Введем следующие функциональные пространства

а) Пространства E_1 и E_2 функций $u_1(y)$ и $u_2(y)$ с суммируемым квадратом на $[0\,l]$ и обладающих четвертыми обобщенными производными и со скалярным произведением

$$(u_i, v_i)_i = \int_0^l u_i v_i\,dy \qquad (i = 1, 2) \tag{3.8}$$

б) Пространство E_3 функций $u_3(y)$ с суммируемым квадратом на $[0l]$, обладающих вторыми обобщенными производными и со скалярным произведением типа (3.8).

в) Гильбертово пространство E_4 функций $u_4(P)$, $P \in S$ с суммируемым квадратом на S и со скалярным произведением вида:

$$(u_4, v_4)_4 = \int_S u_4 v_4\,dx_1\,dy_1 \tag{3.9}$$

г) Прямую сумму пространств $E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{4}(u_i v_i)$$

Здесь x — вектор с компонентами u_1, u_2, u_3, u_4.

Функции u_i должны удовлетворять еще некоторым граничным условиям, которые определяются характером закрепления балки. Мы не будем детализировать эти условия. Будем считать их однородными и такими, чтобы они обеспечивали самосопряженность операторов, описывающих упругие колебания балки без жидкости.

Введем операторы L_{ij} и M_{ij}, действующие из E_j в E_i:

$$\mathrm{L}_{ij}u_j = A_{ij}u_j + \rho \int\limits_{l_y} \gamma_i \mathrm{H} \gamma_j u_j \, dl \quad (i, j = 1, 3, 2), \qquad \mathrm{L}_{4j}u_j = \mathrm{H}\gamma_j u_j \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\mathrm{L}_{i4}u_4 = \rho \int\limits_{l_y} \gamma_i \mathrm{H}^* u_4 \, dl \quad (i = 1, 2, 3), \qquad \mathrm{L}_{44}u_4 = \mathrm{H}^* u_4$$

$$\mathrm{M}_{ii}u_i = (c_i u_{iyy})_{yy} + \beta_i u_i \qquad (i = 1, 2), \quad \mathrm{M}_{j4}u_4 = \rho g \int\limits_{d} \gamma_i u_4 \, dl \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$\mathrm{M}_{33}u_3 = -(c_3 u_{3y})_y + \beta_3 u_3, \qquad \mathrm{M}_{44}u_4 = \rho g u_4, \quad \mathrm{M}_{4j}u_j = \rho g \gamma_j u_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

Так как H — интегральный оператор (1.2), ядро которого — функция Грина, то, для того чтобы операторы L_{ij} и M_{ij} действовали из L_j в L_i, необходимо наложить некоторые ограничения на функции A_{ij}, C_i и B_i. Мы не будем останавливаться на этих вопросах и примем раз навсегда, что всем нужным условиям эти функции удовлетворяют.

Введем еще операторы L и M следующими равенствами:

$$\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \mathrm{L}_{11} \ldots \mathrm{L}_{14} \\ \ldots\ldots \\ \mathrm{L}_{41} \ldots \mathrm{L}_{44} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{11} & 0 & 0 & \mathrm{M}_{14} \\ 0 & \mathrm{M}_{22} & 0 & \mathrm{M}_{24} \\ 0 & 0 & \mathrm{M}_{33} & \mathrm{M}_{34} \\ \mathrm{M}_{41} & \mathrm{M}_{42} & \mathrm{M}_{43} & \mathrm{M}_{44} \end{pmatrix}$$

В этих обозначениях система (3.4—3.7) примет вид:

$$\mathrm{L}x_{tt} + \mathrm{M}x = 0 \tag{3.10}$$

Выясним некоторые свойства операторов L и M. Оператор L самосопряженный, т. е.

$$(\mathrm{L}x, y) = (x, \mathrm{L}y) \quad \text{или} \quad \sum_{i,\, j=1}^{4} (\mathrm{L}_{ij}u_j, v_i)_i = \sum_{i,\, j=1} (u_i, \mathrm{L}_{ij}v_j)_i \tag{3.11}$$

Справедливость такого рода равенств устанавливается простой проверкой.

Итак, оператор L — самосопряженный. Однако он не является вполне непрерывным; это обстоятельство усложняет доказательство.

Перейдем теперь к рассмотрению оператора M. Вычислим $(\mathrm{M}x, x)$:

$$(\mathrm{M}x, x) = \int\limits_0^l (c_1 u_{1yy})_{yy} u_1 \, dy + 2\rho g \int\limits_0^l u_1 \int\limits_d \gamma_1 u_4 \, dl \, dy + \int\limits_0^l \beta_1 u_1^2 \, dy +$$

$$+ \int\limits_0^l (c_2 u_{2yy})_{yy} u_2 \, dy + 2\rho g \int\limits_0^l u_2 \int\limits_d \gamma_2 u_4 \, dl \, dy + \int\limits_0^l \beta_2 u_2^2 \, dy + \int\limits_0^l (-c_3 u_{3y})_y u_3 \, dy +$$

$$+ 2\rho g \int\limits_0^l u_3 \int\limits_d \gamma_3 u_3 \, dl \, dy + \int\limits_0^l \beta_3 u_3^2 \, dy + \rho g \int\limits_S u_4^2 \, ds$$

Сравнивая это выражение с равенством (3.2), имеем

$$(\mathrm{M}x \cdot x) = 2\Pi \tag{3.12}$$

Примечание. Для того чтобы убедиться в справедливости формулы (3.12), надо воспользоваться самосопряженностью граничных условий для функций u_i $(i = 1, 2, 3)$.

Для того чтобы задача имела смысл, необходимо, чтобы функционал П был положительно-определенным. Вопросы об условиях, которым для этого должны удовлетворять функции c_i, γ_i и β_i, не являются тривиальными. Однако это исследование сильно упрощается благодаря следующему факту.

Теорема. Для того чтобы функционал П был положительно-определенным, необходима и достаточна положительная определенность функционала П*, где

$$\Pi^* = \Pi_1 - \rho g \int_S \gamma_1 \gamma_2 Z X \, ds - \rho g \int_S \gamma_1 \gamma_3 X \theta \, ds - \rho g \int_S \gamma_2 \gamma_3 Z \theta \, ds - \\ - \frac{1}{2} \rho g \int \gamma_1^2 X^2 \, ds - \frac{1}{2} \rho g \int_S \gamma_2^2 Z^2 \, ds - \frac{1}{2} \rho g \int_S \gamma_3^2 \theta^2 \, ds \qquad (3.13)$$

а функционал Π_1 определяется формулой (3.1).

Для того чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, достаточно в выражении потенциальной энергии сделать замену:

$$U = v - \gamma_1 X - \gamma_2 Z - \gamma_3 \theta \qquad (3.14)$$

После этого функционал П примет вид:

$$\Pi = \Pi^* + \frac{1}{2} \rho g \int_S v^2 \, ds$$

Эта теорема, которая является обобщением аналогичной теоремы теории движения твердого тела с жидкостью (см. [2]), носит принципиальный характер. Она показывает, что вопрос об устойчивости балки, внутри которой находятся жидкие массы, имеющие свободную поверхность, сводится к исследованию устойчивости той же балки без жидкости, но под действием другой системы внешних сил. Потенциальная энергия измененной системы сил отличается от потенциальной энергии исходной системы слагаемыми, которые однозначно определяются плотностью жидкости и геометрией полости.

Положительная определенность функционала П* будет, таким образом, означать, что в положении равновесия потенциальная энергия системы балка + жидкость имеет минимум и, следовательно, это положение равновесия будет устойчивым. (Строго говоря, это утверждение еще должно быть доказано, и оно будет доказано ниже.)

В дальнейшем будем считать, что функционал П*, а следовательно, и оператор М — положительно-определенные.

Оператор М — самосопряженный. Этот факт устанавливается непосредственной проверкой.

2. *Исследование квадратичного функционала* П*. Исследовать необходимые и достаточные условия для положительной определенности функционала П* в общем случае довольно сложно. Однако весьма просто составить только достаточные условия, при этом они будут иметь простой физический смысл.

Рассмотрим сначала простейший случай только крутильных колебаний балки. Функционал П* тогда будет иметь вид:

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \int_0^l \{c_3 \theta_y^2 + \beta_3 \theta^2 - b_3 \theta^2\} \, dy \qquad \left(b_3(y) = \rho g \int_d \gamma_3^2 \, dl\right) \qquad (3.15)$$

Если предположить, что C_3 нигде в нуль не обращается, то одно из достаточных условий можно выписать сразу (см., например, [4], стр. 122):

$$\beta_3 > b_3 \tag{3.16}$$

Используя выражение $\gamma_3 = z\cos nx - x\cos nz$, выражение (3.15) можно привести к виду

$$b_3(y) = \rho g\,\{J_{zz}(y)\cos^2(nz) + J_{xx}\cos^2(nx) - 2J_{zx}\cos(nx)\cos(nz)\} \tag{3.17}$$

Здесь через J_{xx}, J_{zz}, J_{xz} обозначены моменты инерции отрезка d.

Если ось балки горизонтальна, то $\mathbf{z}^\circ = \mathbf{n}^\circ$ и тогда

$$b(y) = \rho g J_{xx} \tag{3.18}$$

Если ось балки вертикальна, то $\mathbf{y}^\circ = \mathbf{n}^\circ$ и тогда $b(y) = 0$, т. е. жидкость не влияет на знакоопределенность П. Таким образом, для положительной определенности функционала П* (а следовательно, и для устойчивости положения равновесия) достаточно выполнения условия, которое однозначно определяется геометрическими характеристиками свободной поверхности и плотностью жидкости.

Если балка совершает только изгибные колебания в одной из плоскостей, то подобные условия выводятся аналогично. В этом случае

$$\Pi^* = \frac{1}{2}\int_0^l \{c_1 X_{yy}{}^2 + (\beta_1 - b_1)X^2\}\,dy \qquad \left(b_1(y) = \rho g \int_d \gamma_1{}^2\,dl\right)$$

Так как $\gamma_1 = \cos nx$, то $b_1 = \rho g d \cos^2 nx$. Для дальнейшего обозначим

$$J_{ik} = \rho g \int_d \gamma_i \gamma_k\,dl$$

Критерий вида (3.16) легко получить и для общего случая. Для этого представим функционал П* в виде суммы:

$$\Pi^* = \Pi_1{}^* + \Pi_2{}^*$$

где

$$\Pi_1{}^* = \frac{1}{2}\int_0^l \{c_1 X_{yy}^2 + c_2 Z_{yy}^2 + c_2 \theta_y{}^2\}\,dy$$

$$\Pi_2{}^* = \frac{1}{2}\int_0^l \{\beta_1 - J_{11}\}X^2\,dl + \frac{1}{2}\int_0^l \{\beta_2 - J_{22}\}Z^2\,dl + \frac{1}{2}\int_0^l \{\beta_3 - J_{33}\}\theta^2\,dl -$$
$$- \rho g \int_0^l\int_d \gamma_1\gamma_2 XZ\,dl\,dy - \rho g \int_0^l\int_d \gamma_1\gamma_3 X\theta\,dl\,dy - \rho g \int_0^l\int_d \gamma_2\gamma_3 Z\theta\,dl\,dy$$

Для положительной определенности функционала $\Pi_1{}^*$ достаточно, чтобы для любого $y \in [0, l]$ функции c_i удовлетворяли неравенствам $c_i > \delta_i$, где δ_i — произвольные сколь угодно малые положительные числа. Для положительной определенности функционала $\Pi_2{}^*$ достаточно, например, выполнения следующих условий:

$$\beta_1 - J_{11} > \alpha_1, \qquad (\beta_1 - J_{11})(\beta_2 - J_{22}) - \rho^2 g^2 J_{12} > \alpha_2 \tag{3.19}$$

$$\begin{vmatrix} \beta_1 - J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & \beta_2 - J_{22} & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & \beta_3 - J_{33} \end{vmatrix} > \alpha_3 \tag{3.20}$$

где α_3 — любые сколь угодно малые положительные числа.

Эти условия аналогичны неравенствам Сильвестра. Они накладывают ограничения на геометрические характеристики, и им можно придать наглядную форму. Покажем это на примере изгибных колебаний в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях.

В этом случае условиям (3.20) можно придать следующий вид [1]

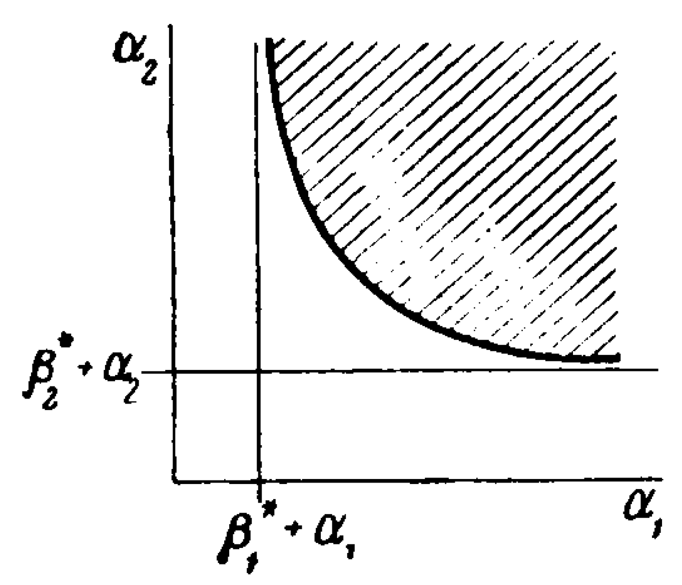
$$\beta_1 > \beta_1^* + \alpha_1, \qquad \beta_2 > \beta_2^* + \alpha_2, \qquad (\beta_1 - \beta_1^*)(\beta_2 - \beta_2^*) - (\beta + \alpha_3) > 0$$

Здесь

$$\beta_1^* = \rho g d \cos nx, \qquad \beta_2^* = \rho g d \cos nz, \qquad \beta = \rho^2 g^2 \cos nx \cos nz$$

Следовательно, для выполнения этих условий величины β_1 и β_2 должны быть таковыми, чтобы для любого $y \in [0l]$ точка $\beta_1\beta_2$ находилась в заштрихованной области плоскости $\beta_1 0 \beta_2$ (фиг. 3).

Условия, которые только что обсуждались, очень грубые. Интуитивно совершенно ясно, что если жесткость положительна, то для обеспечения положительной определенности Π^* вовсе не необходимо требование, чтобы внешние силы носили восстанавливающий характер.



Фиг. 3

Рассмотрим колебания с «одной степенью свободы», например крутильные колебания. Имеем

$$\Pi^* = \int_0^l c_3 \theta_y^2 dy + \int_0^l r(y)\,\theta^2 dy \qquad \left(r(y) = \beta_3 - \rho g \int_d \gamma^2 dl\right)$$

и пусть функция $r \geqslant -\delta$ для y на $[0l]$, где δ — некоторое положительное число. Тогда

$$\Pi^* \geqslant \int_0^l c_3 \theta_y^2 dy - \delta \,\|\theta\|^2$$

Оценим снизу первое слагаемое в правой части. Так как

$$\theta - \theta_0 = \int_0^y \theta_y dy = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{c_3}}\,\theta_y \sqrt{c_3}\, dy$$

то

$$(\theta - \theta_0)^2 \leqslant \int_0^l \frac{dy}{c_3} \cdot \int_0^l c_3 \theta_y^2 dy$$

Но всегда можно считать, что

$$\int_0^l \theta dy = 0$$

поэтому предыдущее неравенство позволяет получить

$$\int_0^l c_3 \theta_y^2 dy \geqslant \|\theta\|^2 + l\theta_0^2 \left[l \left(\int_0^l \frac{dy}{c_3} \right)^{-1} \right]$$

$$\Pi^* \geqslant \|\theta\|^2 + l\theta_0^2 \left[l \left(\int_0^l \frac{dy}{c_3} \right)^{-1} \right] - \delta \,\|\theta\|^2$$

Отсюда следует, что для положительной определенности функционала Π^* достаточно, чтобы функция c_3 удовлетворяла наравенству

$$\frac{1}{l}\left(\int_0^l \frac{dy}{c_3(y)} \right)^{-1} - \delta > 0 \qquad (3.21)$$

Это условие налагает на жесткость c_3 ограничение снизу. Оно будет наверняка выполнено, если потребовать, чтобы функция c_3 удовлетворяла неравенству

$$c_3(y) > \eta \tag{3.22}$$

где η — надлежащим образом выбранное положительное число.

Условие вида (3.22) может быть получено и в случае произвольных малых колебаний. Может быть доказано следующее утверждение.

Для положительной определенности функционала Π^* достаточно, чтобы функции C_i удовлетворяли неравенствам

$$\min C_i > \eta_i, \qquad y \in [0l] \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{3.23}$$

где η_i — некоторые вполне определенные положительные числа; они зависят от характера внешних сил и от геометрии жидких полостей и плотности жидкости.

3. *Доказательство существования главных колебаний.* Задача определения собственных колебаний сводится к исследованию спектра операторного уравнения

$$\mathrm{L}\, x = \frac{1}{\omega} \mathrm{M}\, x$$

где операторы L и M — самосопряженные, а M — положительно-определенный. Оператор L не является вполне непрерывным. Это обстоятельство требует некоторых дополнительных выкладок.

В выражениях T и Π произведем замену (3.14) и составим новые уравнения движения. В простейшем случае чисто изгибных колебаний эта система имеет вид:

$$AX_{tt} + \rho \int\limits_{l-d} \gamma_1 \mathrm{H}_1 \gamma_1 X_{tt} dl + \rho \int\limits_{l-d} \gamma_1 \mathrm{H}^* v_{tt} dl + (c_1 X_{yy})_{yy} + \beta_1{}^* X = 0$$

$$\mathrm{H}_1 \gamma_1 X_{tt} + \mathrm{H}^* v_{tt} + \rho g v = 0 \tag{3.24}$$

Здесь

$$\mathrm{H}_1 = \mathrm{H} - \mathrm{H}^*, \qquad \mathrm{H}^* u = \int\limits_S H(P, Q)\, u(Q)\, ds_Q, \qquad \beta_1{}^* = \beta_1 - \rho g \int\limits_d \gamma_1{}^2 dl$$

Напомним, что $H(P, Q)$—функция Грина задачи Неймана для области τ. Особенностью преобразованной системы (3.24) по сравнению с системой (3.3) — (3.7) является то, что в ее первых трех уравнениях не содержится членов, в которые входит v (в первые уравнения входят только производные этой функции по t).

Введем пространство $E^* = E_1 + E_2 + E_3 +$ и пусть $w^* \in E^*$.

Тогда систему уравнений движения в общем случае можно записать так:

$$Bw_{tt}{}^* + Dv_{tt} + Nw^* = 0, \qquad \rho H_1 \Gamma_1 w_{tt}{}^* + \rho H^* v_{tt} + \rho g v = 0 \tag{3.25}$$

Здесь

$$B = (L_{ij}); \qquad \mathrm{D}\, v = \rho \int\limits_{l-d} \Gamma \mathrm{H}^* v dl, \qquad \Gamma = \begin{Vmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{Vmatrix}, \qquad \Gamma_1 = \| \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \|$$

Операторы L_{ij}^* $(i = 1, 2, 3)$ отличаются от операторов L_{ij} тем, что под знаком интеграла оператор H заменен на H_1 и интегрирование распространено по $l - d$.

Симметричный оператор N определяется матрицей $\|\beta_{ij}\|$, где числа $\beta_{ij}\,(i \neq j)$ определяются формулами

$$\beta_{ij} = -\rho g \int\limits_d \gamma_i \gamma_j dl$$

Нетрудно проверить, что оператор

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{D} \\ \rho \mathrm{H}_1 \Gamma_1 & \mathrm{H}^* \end{Vmatrix}$$

так же как и оператор L, самосопряженный. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно проверить справедливость равенств

$$(\Lambda w, w_1) = (\mathrm{L}\, x, x_1), \qquad (w, \Lambda w_1) = (x, \mathrm{L}\, x_1), \qquad (w \in E) \qquad \left(w = \begin{Vmatrix} w^* \\ v \end{Vmatrix}\right)$$

Элементы w и x связаны соотношением (3.14).

Оператор N — неограниченный, положительно-определенный. Его обратный N^{-1} — вполне непрерывный интегральный оператор. Структуру этого оператора проще всего увидеть на каком-нибудь частном случае. Например, если рассматриваются чисто крутильные колебания, то уравнение $\mathrm{N}u = f$ имеет вид:

$$-(C_3 \theta_y)_y + \beta\theta = f$$

и, следовательно,

$$\theta(P) = \int\limits_0^l G(P, Q) f(Q)\, dQ$$

где G — функция Грина, учитывающая соответствующие граничные условия и обладающая слабой особенностью.

Для отыскания периодических решений положим

$$w^* = w \cos \omega_n t, \qquad v = y \cos \omega_n t \tag{3.26}$$

Система (3.25) примет вид:

$$Bw + Dy = \frac{1}{\omega_n^2} Nw, \qquad \rho \mathrm{H}_1 \Gamma_1 w + \rho \mathrm{H}^* y = \frac{1}{\omega^2} \rho g y \tag{3.27}$$

Сделаем здесь замену переменных $\varphi = N^{1/2} w$ и $\psi = \sqrt{\rho g}\, y$. Получим

$$N^{-1/2} B N^{-1/2} \varphi + N^{-1/2} D \frac{\psi}{\sqrt{\rho g}} = \frac{1}{\omega^2} \varphi$$

$$\frac{\rho}{\sqrt{\rho g}} H_1 \Gamma_1 N^{-1/2} \varphi + \frac{\rho}{\sqrt{\rho g}} H^* \frac{\psi}{\sqrt{\rho g}} = \frac{1}{\omega^2} \psi \tag{3.28}$$

Так как оператор B — ограниченный, то $N^{-1/2} B N^{-1/2}$ — вполне непрерывный (поскольку N^{-1} — вполне непрерывный). Операторы D, H_1 и H^* — вполне непрерывные как интегральные со слабой особенностью. Следовательно, оператор, определяющий левую часть системы (3.28), вполне непрерывный. Аналогично нетрудно проверить, что оператор

$$\mathrm{R} = \begin{Vmatrix} N^{-1/2} B N^{-1/2} & N^{-1/2} D \dfrac{1}{\sqrt{\rho g}} \\ \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho g}} H_1 \Gamma_1 N^{-1/2} & \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho g}} H^* \dfrac{1}{\sqrt{\rho g}} \end{Vmatrix}$$

самосопряженный.

Таким образом, мы пришли к задаче о собственных значениях

$$R f = \lambda f$$

для вполне непрерывного самосопряженного оператора R.

На основании известных теорем линейного анализа мы можем утверждать справедливость следующей основной теоремы.

Теорема. Если квадратичная форма П — положительно-определенна, то система (3.3) — (3.7) имеет периодические решения (главные колебания) вида (3.26), где ω_n — положительные числа (собственные частоты), образующие счетную последовательность такую, что $\omega_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Эта теорема содержит в себе как частный случай для данной задачи теорему Лагранжа о минимуме потенциальной энергии. Доказанная теорема означает, что если потенциальная энергия системы балка — жидкость в положении равновесия имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво в том смысле, что все главные колебания этой системы ограничены.

4. *Доказательство полноты*. Система главных колебаний полна в E. Для того чтобы в этом убедиться, запишем основное операторное уравнение в виде

$$M^{-1} L x = \lambda x$$

Введем норму Фридрихса $(x, y)_F = (M x, y)$. Для доказательства полноты в норме Фридрихса достаточно показать, что из условия $M^{-1} L h = 0$ сразу следует $h \equiv 0$. Рассмотрим

$$(M^{-1} L h \cdot h)_F = (L h \cdot h)$$

Скалярное произведение, стоящее справа, — это кинетическая энергия. Следовательно, если $h \neq 0$, то это выражение не может быть равным нулю. Следовательно, и $M^{-1} L h \neq 0$.

Полнота системы главных колебаний позволяет разыскивать решение задачи Коши в виде ряда, составленного из главных колебаний.

На этом заканчивается доказательство существования полной системы главных колебаний изучаемой системы. Одновременно доказанные предложения обосновывают применение метода Ритца, схема которого подробно обсуждалась в первых параграфах этой работы.

Краткое резюме некоторых результатов этой статьи было опубликовано в Докл. АН СССР (см. [5]).

За ряд замечаний и советов автор выражает свою признательность А. А. Абрамову и М. А. Неймарку.

Поступила 18 VI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. 2, Гостехиздат, 1949.
2. Моисеев Н. Н. Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность. Мат. сб., т. 32, № 1, 1953.
3. Моисеев Н. Н. Некоторые вопросы теории колебаний сосудов с жидкостью. Инж. сб., т. 19, 1953.
4. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. ГИТТЛ, 1957.
5. Моисеев Н. Н. К теории упругих колебаний тел с жидкостью. ДАН СССР, т. 127, № 1, 1958.