Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

КОЛЕБАНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСА

А. П. Проскуряков

(Москва)

Метод построения периодических решений неавтономных систем с одной степенью свободы разработан для случая простых корней уравнений основных амплитуд [1]. В настоящей статье рассмотрен общий случай, когда корни этих уравнений могут быть также кратными. При наличии резонанса с неограниченной амплитудой колебаний построено решение, содержащее вековые члены.

1. Рассмотрим неавтономную колебательную систему с одной степенью свободы

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m^2x = f(t) + \mu F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \mu\right) \tag{1.1}$$

Допустим, что функция $f(t)$ является непрерывной периодической функцией времени t с периодом 2π, разложение которой в ряд Фурье не содержит гармоник m-го порядка (m — целое число). Функция $F(t, x, x^{\cdot}, \mu)$ предполагается аналитической по отношению к переменным $x, x^{\cdot}, \mu$ и непрерывной периодической функцией t с тем же периодом. Величина μ является малым параметром, который для определенности будем считать положительным.

Выделим из функции $F(t, x, x^{\cdot}, \mu)$ линейный член относительно x и гармоники m-го порядка:

$$F(t, x, x^{\cdot}, \mu) = F_1(t, x, x^{\cdot}, \mu) + cx + \nu\cos mt + \lambda\sin mt$$

Коэффициенты c, ν и λ предполагаются постоянными величинами, не зависящими от параметра μ, причем $c \neq 0$ и $\nu^2 + \lambda^2 \neq 0$. Таким образом, линейная система обладает на самом деле частотой k, причем k не является целым числом. «Расстройка» системы

$$m^2 - k^2 = c\mu \tag{1.2}$$

имеет при этом порядок малости параметра μ.

Порождающее уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m^2x = f(t) \tag{1.3}$$

имеет общее решение, которое удобно записать в следующей форме:

$$x_0(t) = \varphi(t) + A_0\cos mt + \frac{B_0}{m}\sin mt \tag{1.4}$$

Функция $\varphi(t)$ представляет вынужденные колебания системы (1.3) под действием силы, равной $f(t)$. Два последних слагаемых в формуле

(1.4) представляют свободные колебания той же системы. Таким образом, порождающее уравнение имеет семейство периодических решений, зависящее от двух произвольных постоянных A_0 и B_0.

Будем искать периодические решения основного уравнения (1.1) по методу малого параметра. В качестве начальных условий примем

$$x(0) = x_0(0) + \beta_1, \quad x^{\cdot}(0) = x_0^{\cdot}(0) + \beta_2 \tag{1.5}$$

где величины β_1 и β_2 являются функциями от μ, обращающимися в нуль при $\mu = 0$. Таким образом, решение уравнения (1.1) будет иметь вид:

$$x = x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$$

Определим структуру функции $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$. Предположим, что эта функция может быть разложена в ряд по целым степеням параметров β_1, β_2 и μ. Найдем те члены этого ряда, которые зависят от β_1 и β_2, но не зависят от μ. Легко видеть, что все эти члены, за исключением линейных относительно β_1 и β_2, обращаются в нуль. Это происходит потому, что коэффициенты при этих членах удовлетворяют линейным однородным дифференциальным уравнениям второго порядка при нулевых начальных условиях. После вычисления линейных членов ряда относительно β_1 и β_2 решение уравнения (1.1) может быть представлено в виде

$$x(t, \beta_1, \beta_2, \mu) = \varphi(t) + A_0 \cos mt + \frac{B_0}{m} \sin mt + \beta_1 \cos mt + \frac{\beta_2}{m} \sin mt +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n(t) + \frac{\partial C_n}{\partial \beta_1} \beta_1 + \frac{\partial C_n}{\partial \beta_2} \beta_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_n}{\partial \beta_1^2} \beta_1^2 + \frac{\partial^2 C_n}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} \beta_1 \beta_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_n}{\partial \beta_2^2} \beta_2^2 + \ldots \right] \mu^n \tag{1.6}$$

Необходимо заметить, что все $C_n(t)$ и их производные по β_1 и β_2 взяты при $\beta_1 = \beta_2 = \mu = 0$.

Нетрудно доказать, что для функции $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ и ее производных по времени t существует формула

$$\left(\frac{\partial^{k+l+n} x}{\partial \beta_1^k \partial \beta_2^l \partial \mu^n} \right)_{\beta_1=\beta_2=\mu=0} = \left(\frac{\partial^{k+l+n} x}{\partial A_0^k \partial B_0^l \partial \mu^n} \right)_{\beta_1=\beta_2=\mu=0} \tag{1.7}$$

При $n = 0$ эта формула очевидна. При $n \neq 0$ доказательство может быть проведено методом полной математической индукции аналогично тому, как это сделано для автономных систем [2]. При этом используется равенство

$$\left(\frac{\partial^{k+l+n+1} x}{\partial \beta_1^k \partial \beta_2^l \partial \mu^{n+1}} \right)_{\beta_1=\beta_2=\mu=0} = \frac{n+1}{m} \int_0^t \left(\frac{\partial^{k+l+n} F}{\partial \beta_1^k \partial \beta_2^l \partial \mu^n} \right)_{\beta_1=\beta_2=\mu=0} \sin m(t - t_1)\, dt_1$$

которое получается из рассмотрения коэффициента при $\beta_1^k \beta_2^l \mu^{n+1}$ в разложении функции $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$.

На основании доказанного выше свойства функции $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ формулу (1.6) можно переписать в следующем виде:

$$x(t, \beta_1, \beta_2, \mu) = \varphi(t) + A_0 \cos mt + \frac{B_0}{m} \sin mt + \beta_1 \cos mt + \frac{\beta_2}{m} \sin mt +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n(t) + \frac{\partial C_n}{\partial A_0} \beta_1 + \frac{\partial C_n}{\partial B_0} \beta_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_n}{\partial A_0^2} \beta_1^2 + \frac{\partial^2 C_n}{\partial A_0 \partial B_0} \beta_1 \beta_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_n}{\partial B_0^2} \beta_2^2 + \ldots \right] \mu^n \tag{1.8}$$

Следовательно, для построения функции $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ нужно уметь вычислять коэффициенты $C_n(t)$ при μ^n. Остальные коэффициенты ряда находятся последовательным дифференцированием $C_n(t)$ по A_0 и B_0.

Коэффициенты $C_n(t)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 C_n(t)}{dt^2} + m^2 C_n(t) = H_n(t), \qquad H_n(t) = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}F}{d\mu^{n-1}}\right]_{\beta_1=\beta_2=\mu=0}$$

при начальных условиях $C_n(0) = 0$, $C_n^{\bullet}(0) = 0$.

Величина $dF/d\mu$ является полной частной производной функции $F(t, x, x^{\bullet}, \mu)$ по параметру μ. Получаем

$$C_n(t) = \frac{1}{m}\int_0^t H_n(t_1)\sin m(t - t_1)\,dt_1, \quad C_n^{\bullet}(t) = \int_0^t H_n(t_1)\cos m(t - t_1)\,dt_1 \quad (1.9)$$

В раскрытом виде первые три функции $H_n(t)$ будут иметь вид [2]:

$$H_1(t) = F(t, x_0, x_0^{\bullet}, 0) \quad (1.10)$$

$$H_2(t) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 C_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x^{\bullet}}\right)_0 C_1^{\bullet} + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right)_0 \quad (1.11)$$

$$H_3(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 C_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^{\bullet 2}}\right)_0 C_1^{\bullet 2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2}\right)_0 + \quad (1.12)$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x^{\bullet}}\right)_0 C_1 C_1^{\bullet} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu}\right)_0 C_1 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^{\bullet} \partial \mu}\right)_0 C_1^{\bullet} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 C_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x^{\bullet}}\right)_0 C_2^{\bullet}$$

Значок 0 у скобок означает, что в производные от функции F вместо x, $x^{\bullet}$ и μ нужно подставить соответственно x_0, $x_0^{\bullet}$ и 0.

2. Условия периодичности для функции $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ и ее первой производной по времени могут быть представлены, учитывая начальные условия (1.5), в следующем виде:

$$x(2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu) = \varphi(0) + A_0 + \beta_1, \qquad x^{\bullet}(2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu) = \varphi^{\bullet}(0) + B_0 + \beta_2 \quad (2.1)$$

Подставим в левые части этих равенств значения $x(2\pi)$ и $x^{\bullet}(2\pi)$ на основании формулы (1.8). Получим после некоторых сокращений

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n(2\pi) + \frac{\partial C_n}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial C_n}{\partial B_0}\beta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_n}{\partial A_0^2}\beta_1^2 + \right. \quad (2.2)$$

$$\left. + \frac{\partial^2 C_n}{\partial A_0 \partial B_0}\beta\,\beta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_n}{\partial B_0^2}\beta_2^2 + \ldots\right]\mu^n = 0$$

и аналогичную формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n^{\bullet}(2\pi) + \frac{\partial C_n^{\bullet}}{\partial A_0}\beta_1 + \frac{\partial C_n^{\bullet}}{\partial B_0}\beta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_n^{\bullet}}{\partial A_0^2}\beta_1^2 + \right. \quad (2.3)$$

$$\left. + \frac{\partial^2 C_n^{\bullet}}{\partial A_0 \partial B_0}\beta_1\beta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_n^{\bullet}}{\partial B_0^2}\beta_2^2 + \ldots\right]\mu^n = 0$$

В формулах (2.2) и (2.3) функции C_n и $C_n^{\bullet}$ и их частные производные по A_0 и B_0 взяты при $t = 2\pi$, $\beta_1 = \beta_2 = \mu = 0$.

Предположим, что величины β_1 и β_2 могут быть разложены в ряды по целым степеням параметра μ

$$\beta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mu^n, \qquad \beta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mu^n$$

Подставим значения β_1 и β_2 в левые части равенств (2.2) и (2.3) и разложим их в ряды по μ. Затем приравниваем нулю коэффициенты этих рядов и сгруппируем полученные равенства попарно. Члены, не зависящие от μ, дадут следующие равенства:

$$C_1(2\pi) = 0, \qquad C_1^{\bullet}(2\pi) = 0 \tag{2.4}$$

Коэффициенты при μ в первой степени

$$C_2(2\pi) + \frac{\partial C_1}{\partial A_0} A_1 + \frac{\partial C_1}{\partial B_0} B_1 = 0, \qquad C_2^{\bullet}(2\pi) + \frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial A_0} A_1 + \frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0} B_1 = 0 \tag{2.5}$$

Коэффициенты при μ^2

$$\begin{aligned} C_3(2\pi) &+ \frac{\partial C_2}{\partial A_0} A_1 + \frac{\partial C_2}{\partial B_0} B_1 + \frac{\partial C_1}{\partial A_0} A_2 + \frac{\partial C_1}{\partial B_0} B_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2} A_1^2 + \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0 \partial B_0} A_1 B_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2} B_1^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} C_3^{\bullet}(2\pi) &+ \frac{\partial C_2^{\bullet}}{\partial A_0} A_1 + \frac{\partial C_2^{\bullet}}{\partial B_0} B_1 + \frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial A_0} A_2 + \frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0} B_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1^{\bullet}}{\partial A_0^2} A_1^2 + \frac{\partial^2 C_1^{\bullet}}{\partial A_0 \partial B_0} A_1 B_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1^{\bullet}}{\partial B_0^2} B_1^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Коэффициенты при μ^3

$$\begin{aligned} &C_4(2\pi) + \frac{\partial C_3}{\partial A_0} A_1 + \frac{\partial C_3}{\partial B_0} B_1 + \frac{\partial C_2}{\partial A_0} A_2 + \frac{\partial C_2}{\partial B_0} B_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_2}{\partial A_0^2} A_1^2 + \frac{\partial^2 C_2}{\partial A_0 \partial B_0} A_1 B_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_2}{\partial B_0^2} B_1^2 + \frac{\partial C_1}{\partial A_0} A_3 + \frac{\partial C_1}{\partial B_0} B_3 + \\ &+ \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2} A_1 A_2 + \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0 \partial B_0} (A_1 B_2 + A_2 B_1) + \frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2} B_1 B_2 + \\ &+ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^3} A_1^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0^2 \partial B_0} A_1^2 B_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 C_1}{\partial A_0 \partial B_0^2} A_1 B_1^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 C_1}{\partial B_0^3} B_1^3 = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

и аналогичное равенство, в котором все C_n всюду заменены на $C_n^{\bullet}$. Дальнейшие равенства также легко могут быть выписаны.

Равенства (2.4) представляют собой уравнения, из которых находятся постоянные A_0 и B_0. Если корни этих уравнений простые, то функциональный определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \partial C_1 / \partial A_0 & \partial C_1 / \partial B_0 \\ \partial C_1^{\bullet} / \partial A_0 & \partial C_1^{\bullet} / \partial B_0 \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

не равен нулю. В этом случае из уравнений (2.5) можно определить A_1 и B_1. Далее из уравнений (2.6) и (2.7) находятся A_2 и B_2 и т. д. Все уравнения по отношению к коэффициентам A_n и B_n являются линейными с одним и тем же определителем, равным Δ_1.

3. Если корни уравнений (2.4) двукратные, то

$$\Delta_1 = 0 \tag{3.1}$$

В этом случае для существования периодических решений с конечной амплитудой необходимо выполнение дополнительного условия

$$\frac{\partial C_1 / \partial A_0}{\partial C_1^{\bullet} / \partial A_0} = \frac{\partial C_1 / \partial B_0}{\partial C_1^{\bullet} / \partial B_0} = \frac{C_2}{C_2^{\bullet}} \tag{3.2}$$

Используя условие (3.1), из уравнений (2.6) и (2.7) можно исключить A_2 и B_2. Решая полученное таким образом уравнение совместно с уравнениями (2.5), можно определить A_1 и B_1.

Например, для коэффициента A_1 находим квадратное уравнение

$$P_0 A_1^2 + P_1 A_1 + P_2 = 0 \tag{3.3}$$

Коэффициенты этого уравнения имеют следующие значения:

$$P_0 = \frac{\partial C_1}{\partial B_0}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}\left(\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0}\right)^2 - \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0 \partial B_0}\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial A_0}\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}\left(\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial A_0}\right)^2\right] -$$
$$- \frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1^{\bullet}}{\partial A_0^2}\left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^2 - \frac{\partial^2 C_1^{\bullet}}{\partial A_0 \partial B_0}\frac{\partial C_1}{\partial A_0}\frac{\partial C_1}{\partial B_0} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1^{\bullet}}{\partial B_0^2}\left(\frac{\partial C_1}{\partial A_0}\right)^2\right]$$

$$P_1 = \frac{\partial C_1}{\partial B_0}\left[C_2^{\bullet}\left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial A_0} - \frac{\partial^2 C_1^{\bullet}}{\partial B_0^2}\frac{\partial C_1}{\partial A_0} - \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0 \partial B_0}\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0} + \frac{\partial^2 C_1^{\bullet}}{\partial A_0 \partial B_0}\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0}\left(\frac{\partial C_2}{\partial A_0}\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0} - \frac{\partial C_2^{\bullet}}{\partial A_0}\frac{\partial C_1}{\partial B_0} - \frac{\partial C_2}{\partial B_0}\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial A_0} + \frac{\partial C_2^{\bullet}}{\partial B_0}\frac{\partial C_1}{\partial A_0}\right)\right]$$

$$P_2 = \frac{\partial C_1}{\partial B_0}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}C_2^{\bullet 2} - \frac{\partial C_2}{\partial B_0}\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0}C_2^{\bullet} - \left(\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0}\right)^2 C_3\right] -$$
$$- \frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1^{\bullet}}{\partial B_0^2}C_2^2 - \frac{\partial C_2^{\bullet}}{\partial B_0}\frac{\partial C_1}{\partial B_0}C_2 + \left(\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)^2 C_3^{\bullet}\right]$$

Заметим, что коэффициенты уравнения (3.3) могут быть представлены и в других равнозначных видах. Зная коэффициент A_1, нетрудно найти коэффициент B_1 по одному из уравнений (2.5).

Для определения коэффициентов A_2 и B_2 умножим уравнение (2.8) на $C_2^{\bullet}$, а аналогичное ему уравнение, полученное заменой всех C_n на $C_n^{\bullet}$, умножим на C_2 и сложим оба уравнения. Далее сложим уравнения (2.6) и (2.7). Полученная таким образом система уравнений для A_2 и B_2 является линейной. Составим определитель этой системы. После некоторых преобразований получим

$$\Delta_2^{*} = (C_2 + C_2^{\bullet})\,\Delta_2 \tag{3.4}$$

где

$$\Delta_2 = \frac{\partial C_2}{\partial A_0}\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0} - \frac{\partial C_2^{\bullet}}{\partial A_0}\frac{\partial C_1}{\partial B_0} - \frac{\partial C_2}{\partial B_0}\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial A_0} + \frac{\partial C_2^{\bullet}}{\partial B_0}\frac{\partial C_1}{\partial A_0} + \tag{3.5}$$
$$+ A_1\left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0} - \frac{\partial^2 C_1^{\bullet}}{\partial A_0^2}\frac{\partial C_1}{\partial B_0} - \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0 \partial B_0}\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial A_0} + \frac{\partial^2 C_1^{\bullet}}{\partial A_0 \partial B_0}\frac{\partial C_1}{\partial A_0}\right) +$$
$$+ B_1\left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0 \partial B_0}\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0} - \frac{\partial^2 C_1^{\bullet}}{\partial A_0 \partial B_0}\frac{\partial C_1}{\partial B_0} - \frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial A_0} + \frac{\partial^2 C_1^{\bullet}}{\partial B_0^2}\frac{\partial C_1}{\partial A_0}\right)$$

Нетрудно убедиться, что системы уравнений, из которых находятся остальные коэффициенты A_n и B_n $(n = 3, 4, \ldots)$, также будут линейными. Определителем этих систем будет определитель Δ_2^{*}.

Если уравнение (3.3) имеет два вещественных корня, то будут существовать два периодических решения, отвечающих одной паре двойных корней уравнения основных амплитуд. В этом случае можно говорить о бифуркации решения порождающего уравнения.

Условием трехкратности корней уравнений основных амплитуд (2.4) является равенство нулю функционального определителя, который равен удвоенному коэффициенту P_0 в уравнении (3.3).

В этом случае один из корней уравнения (3.3) обращается в бесконечность. Следовательно, одно из решений уравнения (1.1) будет периодическим, а второе — неограниченным.

Во всех случаях, когда существует периодическое решение уравнения (1.1), оно может быть представлено в виде ряда по целым степеням параметра μ:

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots \tag{3.6}$$

Порождающее решение $x_0(t)$ определяется формулой (1.4). Коэффициенты $x_n(t)$ вычисляются по формулам

$$x_1(t) = A_1 \cos mt + \frac{B_1}{m} \sin mt + C_1(t) \tag{3.7}$$

$$x_2(t) = A_2 \cos mt + \frac{B_2}{m} \sin mt + A_1 \frac{\partial C_1(t)}{\partial A_0} + B_1 \frac{\partial C_1(t)}{\partial B_0} + C_2(t) \tag{3.8}$$

$$x_3(t) = A_3 \cos mt + \frac{B_3}{m} \sin mt + A_2 \frac{\partial C_1(t)}{\partial A_0} + B_2 \frac{\partial C_1(t)}{\partial B_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1(t)}{\partial A_0^2} A_1^2 +$$
$$+ \frac{\partial^2 C_1(t)}{\partial A_0 \partial B_0} A_1 B_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1(t)}{\partial B_0^2} B_1^2 + A_1 \frac{\partial C_2(t)}{\partial A_0} + B_1 \frac{\partial C_2(t)}{\partial B_0} + C_3(t) \tag{3.9}$$

и т. д. Вопрос о радиусе сходимости ряда (3.6) в данной статье не рассматривается.

4. Рассмотрим устойчивость периодических решений уравнения (1.1) в случае кратных корней уравнений основных амплитуд. Уравнение в вариациях для уравнения (1.1) будет

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + m^2 y - \mu \left(\frac{\partial F}{\partial x^\cdot}\right)_0 \frac{dy}{dt} - \mu \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 y = 0 \tag{4.1}$$

Обозначим через $y_1(t)$ и $y_2(t)$ частные решения уравнения в вариациях, образующие фундаментальную систему. Эти решения удовлетворяют начальным условиям

$$y_1(0) = 1, \qquad y_1^\cdot(0) = 0, \qquad y_2(0) = 0, \qquad y_2^\cdot(0) = 1$$

Рассмотрим характеристическое уравнение для уравнения в вариациях

$$\rho^2 - 2A^* \rho + B^* = 0$$

Коэффициенты этого уравнения, как известно, равны

$$A^* = \frac{1}{2} [y_1(2\pi) + y_2^\cdot(2\pi)], \qquad B^* = y_1(2\pi) y_2^\cdot(2\pi) - y_2(2\pi) y_1^\cdot(2\pi)$$

Для того чтобы периодическое решение уравнения (1 1) было асимптотически устойчиво, необходимо и достаточно выполнение неравенства $|\rho| < 1$. Для уравнения в вариациях (4.1) это условие сводится к двум следующим условиям [1]:

$$B^* - 2A^* + 1 > 0. \qquad |B^*| < 1 \tag{4.2}$$

Будем искать $y_1(t)$ и $y_2(t)$ в виде рядов

$$y_1(t) = y_{10}(t) + \mu y_{11}(t) + \mu^2 y_{12}(t) + \ldots$$
$$y_2(t) = y_{20}(t) + \mu y_{21}(t) + \mu^2 y_{22}(t) + \ldots$$

Для функций $y_{10}(t)$, $y_{11}(t)$, $y_{12}(t)$ имеем уравнения

$$\frac{d^2y_{10}}{dt^2}+m^2y_{10}=0,\quad \frac{d^2y_{11}}{dt^2}+m^2y_{11}=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 y_{10}+\left(\frac{\partial F}{\partial x^{\cdot}}\right)_0 y_{10}^{\cdot}$$

$$\frac{d^2y_{12}}{dt^2}+m^2y_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right)_0 y_{10}^2+\left(\frac{\partial^2F}{\partial x\partial x^{\cdot}}\right)_0 y_{10}y_{10}^{\cdot}+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2F}{\partial x^{\cdot 2}}\right)_0 y_{10}^{\cdot 2}+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 y_{11}+\left(\frac{\partial F}{\partial x^{\cdot}}\right)_0 y_{11}^{\cdot}$$

Аналогичные уравнения будут для $y_{20}(t)$, $y_{21}(t)$, $y_{22}(t)$. Начальные условия для всех этих функций будут

$$y_{10}(0)=1,\quad y_{10}^{\cdot}(0)=0,\quad y_{1n}(0)=0,\quad y_{1n}^{\cdot}(0)=0$$
$$y_{20}(0)=0,\quad y_{20}^{\cdot}(0)=1,\quad y_{2n}(0)=0,\quad y_{2n}^{\cdot}(0)=0\qquad (n=1,2,3\ldots)$$

Решая эти уравнения, находим

$$y_{10}(t)=\cos mt,\qquad y_{11}(t)=\frac{\partial C_1(t)}{\partial A_0}$$
$$y_{12}(t)=\frac{\partial C_2(t)}{\partial A_0}+A_1\frac{\partial^2C_1(t)}{\partial A_0^2}+B_1\frac{\partial^2C_1(t)}{\partial A_0\partial B_0}$$
$$y_{20}(t)=\frac{1}{m}\sin mt,\qquad y_{21}(t)=\frac{\partial C_1(t)}{\partial B_0}$$
$$y_{22}(t)=\frac{\partial C_2(t)}{\partial B_0}+A_1\frac{\partial^2C_1(t)}{\partial A_0\partial B_0}+B_1\frac{\partial^2C_1(t)}{\partial B_0^2}\tag{4.3}$$

После некоторых вычислений левая часть первого неравенства (4.2) будет иметь вид:

$$B^*-2A^*+1=[y_{11}(2\pi)\,y_{21}^{\cdot}(2\pi)-y_{11}^{\cdot}(2\pi)\,y_{21}(2\pi)]\,\mu^2+$$
$$+[y_{11}(2\pi)y_{22}^{\cdot}(2\pi)-y_{11}^{\cdot}(2\pi)\,y_{22}(2\pi)+y_{12}(2\pi)\,y_{21}^{\cdot}(2\pi)-$$
$$-y_{12}^{\cdot}(2\pi)\,y_{21}(2\pi)]\,\mu^3+\ldots=\Delta_1\mu^2+\Delta_2\mu^3+\ldots\tag{4.4}$$

Величины Δ_1 и Δ_2 определяются формулами (2.9) и (3.5). Для простых корней уравнений основных амплитуд одно из условий асимптотической устойчивости будет

$$\Delta_1>0\tag{4.5}$$

В случае двукратных корней это условие заменится другим:

$$\Delta_2>0\tag{4.6}$$

В обоих случаях к этим условиям необходимо добавить второе условие (4.2), которое приводится к неравенству

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{\cdot}}\right)_0 dt<0\tag{4.7}$$

5. Рассмотрим некоторые непериодические решения уравнения (1.1). Если параметры A_0 и B_0 не являются корнями уравнений (2.4), то функции $x_n(t)$, входящие в разложение (3.6), в общем случае имеют вид:

$$x_1(t)=x_1^{(0)}(t)+tx_1^{(1)}(t)$$
$$x_2(t)=x_2^{(0)}(t)+tx_2^{(1)}(t)+t^2x_2^{(2)}(t)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n(t)=x_n^{(0)}(t)+tx_n^{(1)}+\ldots+t^nx_n^{(n)}(t)$$

где все $x_n^{(k)}(t)$ — периодические функции от t с периодом 2π. Таким образом, решение уравнения (1.1) в этом случае имеет следующую структуру:

$$x(t) = \Phi_0^{(1)}(t, \mu) + \mu t\, \Phi_1^{(1)}(t, \mu) + \mu^2 t^2 \Phi_2^{(1)}(t, \mu) + \ldots \tag{5.1}$$

Под функциями $\Phi_n^{(1)}(t, \mu)$ в формуле (5.1) подразумеваются периодические функции от t с периодом 2π, не обращающиеся в общем случае в нуль при $\mu = 0$. Все коэффициенты A_n и B_n, входящие в начальные данные, могут быть в этом случае заданы заранее.

Каждому простому вещественному корню уравнений основных амплитуд отвечает единственное периодическое решение уравнения (1.1). Если же корни этих уравнений кратные, но условия (3.2) не выполняются, то из уравнений (2.5) получаются бесконечные значения для коэффициентов A_1 и B_1. В этом случае периодического решения уравнения (1.1) не существует. Будем искать решение, содержащее вековые члены.

Вековые члены не могут появиться в коэффициенте при μ в первой степени разложения (3.6), так как уравнения основных амплитуд находятся из условия периодичности этого коэффициента. Следовательно, вековые члены могут впервые появиться в коэффициенте при μ^2.

Функции $C_n(t)$, через которые выражаются коэффициенты $x_n(t)$ периодического решения (3.6) уравнения (1.1), являются периодическими. Это достигается тем, что на величины $C_n(2\pi)$ и $C_n^{\bullet}(2\pi)$ и их производные по A_0 и B_0 накладываются специальные условия. Если этих условий не выдвигать, то, как нетрудно проверить, функции $C_n(t)$, определяемые формулой (1.9), могут быть представлены в следующем виде:

$$C_n(t) = C_n^0(t) + \frac{t}{2\pi}\left[C_n(2\pi)\cos mt + \frac{C_n^{\bullet}(2\pi)}{m}\sin mt\right] \tag{5.2}$$

где $C_n^0(t)$ — периодическая часть функции.

В рассматриваемом случае функция $x_2(t)$ на основании формул (3.8) и (5.2) будет иметь вид (значок нуль у $C_1(t)$ и $C_2(t)$ опущен)

$$x_2(t) = A_2\cos mt + \frac{B_2}{m}\sin mt + A_1\frac{\partial C_1(t)}{\partial A_0} + B_1\frac{\partial C_1(t)}{\partial B_0} +$$

$$+ C_2(t) + \frac{t}{2\pi}\left(M\cos mt + \frac{N}{m}\sin mt\right) \tag{5.3}$$

Здесь

$$M = A_1\frac{\partial C_1}{\partial A_0} + B_1\frac{\partial C_1}{\partial B_0} + C_2, \qquad N = A_1\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial A_0} + B_1\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0} + C_2^{\bullet} \tag{5.4}$$

Коэффициенты A_n и B_n, начиная с A_1 и B_1, могут быть заранее заданы Однако коэффициенты A_1 и B_1 определяются, если на функцию $x_3(t)$ наложить дополнительное условие. Рассмотрим уравнение для функции $x_3(t)$. Обозначая правую часть этого уравнения через $G_3(t)$, выделим входящие в нее непериодические члены

$$C_3(t) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x^{\bullet}}\right)_0 x_2^{\bullet} + \ldots = \frac{t}{2\pi}\left[M\left(\frac{\partial F}{\partial A_0}\right)_0 + N\left(\frac{\partial F}{\partial B_0}\right)_0\right] + \ldots$$

Потребуем, чтобы функция $x_3(t)$ не содержала вековых членов с t^2. Это приводит к условиям

$$\int_0^{2\pi}\left[M\left(\frac{\partial F}{\partial A_0}\right)_0+N\left(\frac{\partial F}{\partial B_0}\right)_0\right]\sin mt dt=0,$$

$$\int_0^{2\pi}\left[M\left(\frac{\partial F}{\partial A_0}\right)_0+N\left(\frac{\partial F}{\partial B_0}\right)_0\right]\cos mt\, dt=0$$

Эти условия равносильны двум уравнениям, определяющим коэффициенты A_1 и B_1:

$$M\frac{\partial C_1}{\partial A_0}+N\frac{\partial C_1}{\partial B_0}+C_2=0,\qquad M\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial A_0}+N\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0}+C_2^{\bullet}=0 \tag{5.5}$$

Введем следующее обозначение:

$$S=\frac{\partial C_1}{\partial A_0}+\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0}=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{\bullet}}\right)_0 dt \tag{5.6}$$

Решения уравнений (5.5) будут

$$A_1=-\frac{C_2}{S},\qquad B_1=-\frac{C_2^{\bullet}}{S} \tag{5.7}$$

Величины M и N равны:

$$M=\frac{1}{S}\left(\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial B_0}C_2-\frac{\partial C_1}{\partial B_0}C_2^{\bullet}\right),\qquad N=\frac{1}{S}\left(-\frac{\partial C_1^{\bullet}}{\partial A_0}C_2+\frac{\partial C_1}{\partial A_0}C_2^{\bullet}\right) \tag{5.8}$$

Интересно отметить, что тот же результат получится, если не накладывать на функцию $x_3(t)$ никаких условий, а вместо этого ограничить функцию $x_{n+1}(t)$ теми же членами, которые будет содержать предшествующая ей функция $x_n(t)$, т. е. членами с t^{n-1}.

Коэффициенты A_2, B_2 и последующие не могут быть определены из каких-либо условий, накладываемых на функции $x_n(t)$, так как эти условия приводят к неограниченным значениям A_2 и B_2. Указанные коэффициенты могут быть только заданы наперед.

Формулы (5.7) и (5.8) имеют смысл только при условии необращения в нуль величины S, определяемой формулой (5.6). Таким образом, указанный вид решения непригоден, в частности, для консервативных систем.

Итак, в рассматриваемом случае решение уравнения (1.1) имеет следующую структуру:

$$x(t)=\Phi_0^{(2)}(t,\mu)+\mu^2 t\Phi_1^{(2)}(t,\mu)+\mu^3 t^2\Phi_2^{(2)}(t,\mu)+\ldots \tag{5.9}$$

где функции $\Phi_n^{(2)}(t,\mu)$ определены аналогично функции $\Phi_n^{(1)}(t,\mu)$ в формуле (5.1).

Если выполняются условия (3.2), то величины M и N обращаются в нуль и функция $x_2(t)$ становится периодической. Коэффициенты A_1 и B_1, определяемые формулами (5.7), удовлетворяют уравнениям (2.5). Однако они не удовлетворяют бесконечной системе уравнений, определяющих совокупность коэффициентов A_n и B_n. Как показано выше, при наличии условий (3.2) для определения коэффициентов A_1 и B_1 служат уравнение (3.3) и одно из уравнений (2.5). При наличии трехкратных корней уравнений (2.4) одно из решений уравнения (1.1) становится неограниченным. При этом вековые члены могут появиться не раньше как в функции $x_3(t)$.

Рассмотренные случаи, когда коэффициенты A_0 и B_0 удовлетворяют уравнениям (2.4), но решение уравнения (1.1) содержит вековые члены, являются резонансными. Помимо рассмотренных, можно указать также другие виды резонанса, когда, например, коэффициенты A_1 и B_1 имеют конечное значение, а коэффициенты A_2 и B_2 становятся неограниченными и т. д. Это будет в случае выполнения условий (3.2) при наличии кратных корней уравнений (2.4), но при обращении в нуль определителя Δ_2^*.

Как следует из предыдущего основным отличием резонансных решений от просто непериодических решений является появление у резонансных решений вековых членов в коэффициентах разложения (3.6) при μ^2 и более высоких степенях параметра μ, в то время как у нерезонансных непериодических решений эти члены появляются уже в коэффициенте при μ в первой степени.

6. Рассмотрим примеры[1]. Предварительно заметим, что все изложенные выше результаты остаются в силе и при резонансе n-го рода.

1°. Колебания вблизи резонанса в регенеративном приемнике. В этом случае уравнение колебаний может быть приведено к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\mu\left[\nu\cos t+\lambda\sin t+cx+(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\frac{dx}{dt}\right] \tag{6.1}$$

Имеем уравнения основных амплитуд

$$\begin{aligned}\nu+cA_0+\alpha B_0+\frac{1}{4}\gamma B_0(A_0^2+B_0^2)&=0\\ \lambda+cB_0-\alpha A_0-\frac{1}{4}\gamma A_0(A_0^2+B_0^2)&=0\end{aligned} \tag{6.2}$$

Условие двукратности корней уравнений (6.2) приводит к следующему соотношению между коэффициентами:

$$27\gamma^2(\nu^2+\lambda^2)^2+16\alpha\gamma(\alpha^2+9c^2)(\nu^2+\lambda^2)+64c^2(\alpha^2+c^2)^2=0 \tag{6.3}$$

При этом корни уравнений (6.2) будут

$$A_0=\frac{9\gamma\lambda(\nu^2+\lambda^2)+32\alpha c^2\lambda-8c(3c^2-\alpha^2)\nu}{6\alpha\gamma(\nu^2+\lambda^2)+16c^2(\alpha^2+c^2)}$$

$$B_0=-\frac{9\gamma\nu(\nu^2+\lambda^2)+32\alpha c^2\nu+8c(3c^2-\alpha^2)\lambda}{6\alpha\gamma(\nu^2+\lambda^2)+16c^2(\alpha^2+c^2)}$$

При наличии соотношения (6.3) существует резонансное решение с вековыми членами. Периодического решения существовать не будет.

2°. Резонанс 2-го рода в регенеративном приемнике. Уравнение колебаний возьмем в таком виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=-3\nu\cos 2t-3\lambda\sin 2t+\mu\left[cx+(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\frac{dx}{dt}\right] \tag{6.4}$$

Имеем амплитудные уравнения

$$\begin{aligned}cA_0+\alpha B_0+\frac{1}{2}\beta(\lambda A_0-\nu B_0)+\frac{1}{2}\gamma B_0\left[\nu^2+\lambda^2+\frac{1}{2}(A_0^2+B_0^2)\right]&=0\\ cB_0-\alpha A_0-\frac{1}{2}\beta(\nu A_0+\lambda B_0)-\frac{1}{2}\gamma A_0\left[\nu^2+\lambda^2+\frac{1}{2}(A_0^2+B_0^2)\right]&=0\end{aligned} \tag{6.5}$$

Условие, при котором существуют двукратные корни этих уравнений:

$$\beta^2(\nu^2+\lambda^2)-4c^2=0 \tag{6.6}$$

[1] Все примеры взяты из книги И. Г. Малкина [1].

Рассмотрим частные случаи (коэффициенты α и γ разных знаков), $A_0^2 > 0$, $B_0^2 > 0$).

а) $\nu = 0$. Тогда возможны два подслучая:

$$A_0 = 0, \qquad B_0^2 = -2\lambda^2 - 4\frac{\alpha}{\gamma}, \qquad \beta\lambda = 2c$$

$$B_0 = 0, \qquad A_0^2 = -2\lambda^2 - 4\frac{\alpha}{\gamma}, \qquad \beta\lambda = -2c$$

При этих условиях будут существовать резонансные решения вида (5.9). При наличии дополнительного соотношения между коэффициентами

$$5\beta^2(32\alpha - \gamma\lambda^2) = \gamma(60\alpha^2 + 26\alpha\gamma\lambda^2 - 7\gamma^2\lambda^4)$$

выполняются условия (3.2) и, следовательно, будет существовать периодическое решение.

б) $\lambda = 0$. Также возможны два подслучая:

$$A_0 = B_0, \qquad B_0^2 = -\nu^2 - 2\frac{\alpha}{\gamma}, \qquad \beta\nu = 2c$$

$$A_0 = -B_0, \qquad B_0^2 = -\nu^2 - 2\frac{\alpha}{\gamma}, \qquad \beta\nu = -2c$$

Это соответствует резонансным решениям с вековыми членами. При выполнении условия

$$5\beta^2(32\alpha - \gamma\nu^2) = \gamma(60\alpha^2 + 26\alpha\gamma\nu^2 - 7\gamma^2\nu^4)$$

будет существовать периодическое решение.

3°. *Задача Дюффинга в квазилинейной постановке.* Уравнение колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \mu(\nu\cos t + \lambda\sin t + cx + \gamma x^3) \tag{6.7}$$

Уравнения основных амплитуд

$$\nu + cA_0 + \frac{3}{4}\gamma A_0(A_0^2 + B_0^2) = 0, \qquad \lambda + cB_0 + \frac{3}{4}\gamma B_0(A_0^2 + B_0^2) = 0 \tag{6.8}$$

Условие кратности корней приводит к следующему соотношению между коэффициентами уравнений:

$$81\gamma(\nu^2 + \lambda^2) + 16c^3 = 0 \tag{6.9}$$

Коэффициенты c и γ должны быть разных знаков. При этом корни уравнений (6.8) равны

$$A_0 = -\frac{3}{2}\frac{\nu}{c}, \qquad B_0 = -\frac{3}{2}\frac{\lambda}{c}$$

Периодического решения при наличии условия (6.9) не существует.

Рассмотренные примеры показывают, что явление резонанса проявляется, как правило, при $c \neq 0$, т. е. при отличной от нуля «расстройке» системы (1.2). В случае основного резонанса это означает, что частота собственных колебаний линейной системы при резонансе обычно не совпадает с частотой возмущающей силы. В случае резонанса n-го рода частота собственных колебаний при резонансе обычно не является $1/n$ от частоты возмущающей силы (n — целое число).

Поступила 30 IV 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
2. Проскуряков А. П. Построение периодических решений автономных систем с одной степенью свободы в случае произвольных вещественных корней уравнения основных амплитуд. ПММ, т. XXII, вып. 4, стр. 510—518, 1958.