Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ К ПРИВЕДЕНИЮ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ К КАНОНИЧЕСКИМ ПЕРЕМЕННЫМ

О. И. Комарницкая
(Ленинград)

При исследовании на устойчивость систем автоматического регулирования часто пользуются каноническими переменными, при этом иногда необходимо не только привести уравнения к каноническим переменным, но и знать матрицу преобразования.

А. И. Лурье [1] дал формулы преобразования переменных в случае простых корней характеристического уравнения, применение которых см., например, в работе А. М. Летова [2].

В настощей работе предлагается способ построения матрицы преобразования, который основан на теории вычетов и позволяет найти коэффициенты преобразования при любой структуре корней характеристического уравнения.

1. Пусть дана система линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = \sum_{\tau=1}^{n} a_{i\tau} x_\tau \tag{1.1}$$

характеристическое уравнение системы

$$D(\lambda) = 0 \tag{1.2}$$

имеет различные корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда общее решение системы (1.1) может быть записано в виде [3]

$$x_i = \sum_{\rho=1}^{n} \frac{1}{D'(\lambda_\rho)} \sum_{\mu=1}^{n} C_\mu D_{\mu i}(\lambda_\rho) \exp \lambda_\rho t \tag{1.3}$$

где $D(\lambda)$, $D_{\mu i}(\lambda)$ — характеристический определитель и алгебраические дополнения его элементов.

Составим преобразование, коэффициентами которого будут коэффициенты при $\exp \lambda_\rho t$ $(\rho = 1, \ldots, n)$ в выражении (1.3),

$$x_i = \sum_{\rho=1}^{n} \frac{1}{D'(\lambda_\rho)} \sum_{\mu=1}^{n} C_\mu D_{\mu i}(\lambda_\rho) z_\rho \tag{1.4}$$

Покажем, что переменные z_i будут каноническими. Для доказательства продифференцируем (1.4) и подставим в (1.1). При преобразовании полученного выражения используем очевидное равенство

$$\sum_{\tau=1}^{n} a_{i\tau} D_{\mu\tau}(\lambda) = \delta_{\mu i} D(\lambda) + \lambda D_{\mu i}(\lambda) \tag{1.5}$$

где $\delta_{\mu i}$ — символ Кроникера, а также следствие из этого равенства

$$\sum_{\tau=1}^{n} a_{i\tau} D_{\mu\tau}(\lambda_\rho) = \lambda_\rho D_{\mu i}(\lambda_\rho) \tag{1.6}$$

где λ_ρ — корень уравнения (1.2). В результате получим однородную систему алгебраических уравнений

$$\sum_{\rho=1}^{n} \frac{1}{D'(\lambda_\rho)} \sum_{\mu=1}^{n} C_\mu D_{\mu i}(\lambda_\rho)(\dot{z}_\rho - \lambda_\rho z_\rho) = 0 \tag{1.7}$$

относительно выражений, стоящих в круглых скобках.

Если произвольные постоянные G_μ выбраны так, что ни один столбец и ни одна строка определителя системы (1.7) не обращаются в нуль, то определитель системы (1.7) как определитель фундаментальной системы решений отличен от нуля. Поэтому система (1.7) имеет единственное нулевое решение, т. е.

$$\dot{z}_\rho = \lambda_\rho z_\rho \qquad (\rho = 1, \ldots, n)$$

Отсюда следует, что переменные z_ρ канонические. Преобразование можно значительно упростить посредством рационального выбора произвольных постоянных C_μ. Если найдется такая строка характеристического определителя, алгебраические дополнения элементов которой все отличны от нуля, то удобно положить все $C_\mu = 0$, кроме C_ξ, где ξ — номер этой строки, а C_ξ подобрать так, чтобы коэффициенты преобразования получались возможно проще.

Предположим теперь, что такой строки не найдется, т. е. среди алгебраических дополнений элементов каждой строки есть равные нулю. Выберем одну строку (лучше ту, среди алгебраических дополнений элементов которой меньше нулей). Пусть она имеет номер ξ. Возьмем вторую строку, у которой стоит отличное от нуля алгебраическое дополнение на том месте, где у строки с номером ξ стоит первый нуль. Пусть ее номер η_1. Так проследим номера строк, у которых на месте второго, третьего и т. д. нулей ξ-той строки стоят дополнения, отличные от нуля. Пусть их номера η_i $(i = 1, \ldots, k)$, где k не превосходит количества равных нулю алгебраических дополнений в строке с номером ξ. В этом случае удобно положить $C_\xi \neq 0$ и $C_{\eta_i} \neq 0$, а остальные $C_\mu = 0$.

2. Пусть характеристическое уравнение (1.2) имеет один n-кратный корень Λ кратности n относительно элементарных делителей.

В качестве коэффициентов преобразования используем в этом случае коэффициенты при функциях

$$\frac{t^k}{k!} \exp \Lambda t \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

в общем решении, записанном в виде суммы вычетов.

Тогда, учитывая структуру корней, получим преобразование:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n-j)!} \frac{d^{n-j}}{d\lambda^{n-j}} \left[\frac{1}{D(\lambda)} \sum_{\mu=1}^{n} C_\mu D_{\mu i}(\lambda)(\lambda - \Lambda)^n\right]_{\lambda=\Lambda} z_j \tag{2.1}$$

Продифференцируем (2.1) и подставим в (1.1); используя (1.5), имеем

$$\frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} \left[\frac{1}{D(\lambda)} \sum_{\mu=1}^{n} C_\mu D_{\mu i}(\lambda)(\lambda - \Lambda)^n\right]_{\lambda=\Lambda} (\dot{z}_1 - \Lambda z_1) + \tag{2.2}$$

$$+ \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{(n-j)!} \frac{d^{n-j}}{d\lambda^{n-j}} \left[\frac{1}{D(\lambda)} \sum_{\mu=1}^{n} C_\mu D_{\mu i}(\lambda)(\lambda - \Lambda)^n\right]_{\lambda=\Lambda} (\dot{z}_j - z_{j-1} - \Lambda z_j) = 0$$

Определитель системы (2.2) в силу тех же соображений, что в п. 1, отличен от нуля, поэтому она имеет единственное решение

$$\dot{z}_1 = \Lambda z_1, \qquad \dot{z}_j = z_{j-1} + \Lambda z_j \qquad (j=2,\ldots,n)$$

Отсюда видим, что z_i — канонические переменные.

3. Пусть характеристическое уравнение (1.2) имеет различные корни $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ и корень Λ кратности k, простой относительно элементарных делителей ($m+k=n$). Составим формулы преобразования по тому же закону, как и раньше, учитывая коэффициенты общего решения для данного случая структуры корней:

$$x_i = \sum_{\rho=1}^{m} \frac{1}{D'(\lambda_\rho)} \sum_{\mu=1}^{n} C_\mu D_{\mu i}(\lambda_\rho) z_\rho + \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \frac{D_{\nu i}(\Lambda)}{D'(\Lambda)} z_{m+\nu} \tag{3.1}$$

Здесь коэффициенты C_ν выбраны из числа C_μ и все отличны от нуля. Повторив рассуждения, покажем, что переменные z_i — канонические.

4. Теперь предположим, что (1.2) имеет кратный корень Λ, которому соответствуют две группы решений, т. е. корень Λ повторяется два раза; в первый раз он имеет кратность k_1 относительно элементарных делителей, а второй—кратности k_2. Положим, что $k_2 > k_1$. Выпишем для этого случая решение системы (1.1) в виде суммы вычетов

$$x_i = \sum_{j=1}^{k_2} \left\{ \frac{1}{(k_2-j)!} \frac{d^{k_2-j}}{d\lambda^{k_2-j}} \left[\frac{1}{D(\lambda)} \sum_{\mu=1}^{n} C_\mu D_{\mu i}(\lambda)(\lambda-\Lambda)^{k_2} \right]_{\lambda=\Lambda} \right\} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \exp \Lambda t \tag{4.1}$$

При помощи подбора C_μ разобьем решение на две части, из которых первая содержит t^{j-1} $(j=1,\ldots,k_2)$, а вторая — t^{j-1} $(j=1,\ldots,k_1)$. Учитывая сделанное разбиение, выражение в фигурных скобках равенств (4.1) возьмем в качестве коэффициентов преобразования

$$\begin{aligned} x_i = & \sum_{j=1}^{k_2} \frac{1}{(k_2-j)!} \frac{d^{k_2-j}}{d\lambda^{k_2-j}} \left[\frac{1}{D(\lambda)} \sum_{\mu=1}^{n} C_\mu D_{\mu i}(\lambda)(\lambda-\Lambda)^{k_2} \right]_{\lambda=\Lambda} z_j + \\ & + \sum_{j=1}^{k_1} \frac{1}{(k_2-j)!} \frac{d^{k_2-j}}{d\lambda^{k_2-j}} \left[\frac{1}{D(\lambda)} \sum_{\mu=1}^{n} G_\mu D_{\mu i}(\lambda)(\lambda-\Lambda)^{k_2} \right]_{\lambda=\Lambda} z_{k_2+j} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Постоянные C_μ и G_μ подчинены тем же ограничениям, что и раньше, но, кроме того, потребуем, чтобы G_μ удовлетворяли $k_2 - k_1$ условиям

$$\frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}} \left[\frac{1}{D(\lambda)} \sum_{\mu=1}^{n} G_\mu D_{\mu i}(\lambda)(\lambda-\Lambda)^{k_2} \right]_{\lambda=\Lambda} = 0 \qquad (j=1,\ldots,k_2-k_1) \tag{4.3}$$

Тогда переменные z_i будут каноническими.

5. Сделаем теперь самые общие предположения относительно структуры корней уравнения (1.2). Пусть (1.2) имеет m различных корней $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$. Корню λ_α $(\alpha=1,\ldots,m)$ отвечает s_α групп решений, т. е. корень λ_α повторяется s_α раз и при i-м повторении он имеет кратность k_i^α относительно элементарных делителей характеристической матрицы

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{i=1}^{s_\alpha} k_i^\alpha = n \right)$$

Будем считать, что k_i^α занумерованы так, что $k_i^\alpha \leqslant k_{i+1}^\alpha$, т. е. число решений в группе возрастает с увеличением номера группы.

Тогда получим следующие формулы преобразования:

$$x_i = \sum_{\alpha=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{k_{s\alpha}^{\alpha}} \frac{1}{(k_{s_\alpha}^{\alpha}-j)!}\frac{d^{k_{s_\alpha}^{\alpha}-j}}{d\lambda^{k_{s_\alpha}^{\alpha}-j}}\left[\frac{1}{D(\lambda)}\sum_{\mu=1}^{n} C_\mu D_{\mu i}(\lambda)(\lambda-\lambda_\alpha)^{k_{s_\alpha}^{\alpha}}\right]_{\lambda=\lambda_\alpha} z_j^{\alpha} +\right.$$

$$+\sum_{\beta_\alpha=1}^{s_\alpha-1}\sum_{j=k_{s_\alpha}^{\alpha}-k_{\beta_\alpha}^{\alpha}+1}^{k_{s_\alpha}^{\alpha}} \frac{1}{(2k_{s_\alpha}^{\alpha}-k_{\beta_\alpha}^{\alpha}-j)!}\frac{d^{2k_{s_\alpha}^{\alpha}-k_{\beta_\alpha}^{\alpha}-j}}{d\lambda^{2k_{s_\alpha}^{\alpha}-k_{\beta_\alpha}^{\alpha}-j}}\times$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{D(\lambda)}\sum_{\mu=1}^{n} G_\mu^{\beta_\alpha} D_{\mu i}(\lambda)(\lambda-\lambda_\alpha)^{k_{s_\alpha}^{\alpha}}\right]_{\lambda=\lambda_\alpha}\right\} \tag{5.1}$$

причем C_μ и $G_\mu^{\beta_\alpha}$ выбираются так, что ни один столбец и ни одна строка определителя преобразования не равны нулю, и, кроме того, постоянные $G_\mu^{\beta_\alpha}$ подчинены условиям

$$\frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}}\left[\frac{1}{D(\lambda)}\sum_{\mu=1}^{n} G_\mu^{\beta_\alpha} D_{\mu i}(\lambda)(\lambda-\lambda_\alpha)^{k_{s_\alpha}^{\alpha}}\right]_{\lambda=\lambda_\alpha}=0$$

$$(j=1,\ldots,k_{s_\alpha}^{\alpha}-k_{\beta_\alpha}^{\alpha};\ \beta_\alpha=1,\ldots,s_\alpha-1;\ \alpha=1,\ldots,m)$$

6. Для системы (1.1) можно записать формулы обратного преобразования, выражающие канонические переменные z_i через исходные x_j. При построении этого преобразования используется идея Ляпунова [4].

Система, присоединенная к (1.1), имеет вид

$$\dot{y}_i = -\sum_{\tau=1}^{n} a_{\tau i} y_i \tag{6.1}$$

Характеристическое уравнение системы (6.1) имеет ту же структуру корней, что и (1.2), только сами корни отличаются знаками от корней (1.2). Будем считать, что относительно корней характеристического уравнения сделаны самые общие предположения, как в случае 5. Общее решение системы (6.1) в виде суммы вычетов запишется так:

$$y_i = \sum \frac{1}{\Delta(\lambda)}\sum_{\mu=1}^{n} C_\mu \Delta_{\mu i}(\lambda)\exp\lambda t \tag{6.2}$$

где $\sum f(\lambda)$ — символ, обозначающий сумму вычетов функции $f(\lambda)$ во всех особых точках, лежащих на конечном расстоянии, $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_{\mu i}(\lambda)$ — характеристический определитель системы (6.1) и алгебраические дополнения его элементов. В качестве коэффициентов для j-й линейной формы обратного преобразования возьмем элементы j-го столбца матрицы коэффициентов общего решения (6.2), записанного с учетом групп решений, отвечающих корням характеристического уравнения. Тогда формулы обратного преобразования будут следующие:

$$z_j^{\alpha} = \frac{1}{(j-1)!}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}}\left[\frac{1}{\Delta(\lambda)}\sum_{\mu=1}^{n} C_\mu \Delta_{\mu\nu}(\lambda)(\lambda+\lambda_\alpha)^{k_{s_\alpha}^{\alpha}}\right]_{\lambda=-\lambda_\alpha} x_\nu$$

$$z_{j^*}^{\alpha} = \frac{1}{(j-1)!}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}}\left[\frac{1}{\Delta(\lambda)}\sum_{\mu=1}^{n} G_\mu^{\beta_\alpha}\Delta_{\mu\nu}(\lambda)(\lambda+\lambda_\alpha)^{k_{s_\alpha}^{\alpha}}\right]_{\lambda=-\lambda_\alpha} x_\nu \tag{6.3}$$

$$(j^* = K_1^{\alpha}+\ldots+K_{\beta_\alpha}^{\alpha}+j;\quad j=K_{s_\alpha}^{\alpha}-K_{\beta_\alpha}^{\alpha}+1,\ldots,K_{s_\alpha}^{\alpha};\ \beta_\alpha=1,\ldots,s_\alpha-1;\ \alpha=1,\ldots,m)$$

где C_μ и $G_\mu^{\beta_\alpha}$ выбираются так, чтобы ни один столбец и ни одна строка определителя преобразования не обратились в нуль и, кроме того, $G_\mu^{\beta_\alpha}$ удовлетворяли требованиям

$$\frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}}\left[\frac{1}{\Delta(\lambda)}\sum_{\mu=1}^{n} G_\mu^{\beta_\alpha}\Delta_{\mu\nu}(\lambda)(\lambda+\lambda_\alpha)^{k_{s_\alpha}{}^\alpha}\right]_{\lambda=-\lambda_\alpha}=0 \qquad (6.4)$$

$$j=1,\ldots,k_{s_\alpha}{}^\alpha-k_{\beta_\alpha}{}^\alpha, \qquad \beta_\alpha=1,\ldots,s_\alpha-1;\ \alpha=1,\ldots,m$$

То, что переменные z_i, найденные по формулам (6.3), канонические, доказывается непосредственным дифференцированием и использованием (6.4) для присоединенной системы.

Пример (см. Н. Г. Четаев [5]).

$$\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=-x_1-2x_2,\ \dot{x}_3=x_4,\ \dot{x}_4=-x_3-2x_4+\mu(x_1+x_2) \qquad (6.5)$$

где μ — некоторый параметр.

Характеристическое уравнение системы (6.5) имеет корень $\lambda=-1$ четвертой кратности, причем элементарные делители характеристической матрицы будут $(\lambda+1)^3$ и $(\lambda+1)$ [8], т. е. корню $\lambda=-1$ отвечают две группы решений.

Алгебраические дополнения элементов первой строки характеристического определителя все отличны от нуля. Поэтому в формулах преобразования можно положить $C_1=1$, $C_2=C_3=C_4=0$. Формулы преобразования будут следующие:

$$x_i=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[\frac{D_{1i}(\lambda)}{D(\lambda)}(\lambda+1)^3\right]_{\lambda=-1}z_1+\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{D_{1i}(\lambda)}{D(\lambda)}(\lambda+1)^3\right]_{\lambda=-1}z_2+$$
$$+\left[\frac{D_{1i}(\lambda)}{D(\lambda)}(\lambda+1)^3\right]_{\lambda=-1}z_3+\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[\frac{1}{D(\lambda)}\sum_{\mu=1}^{4}G_\mu D_{\mu i}(\lambda)(\lambda+1)^3\right]_{\lambda=-1}z_4$$

$$(i=1,2,3,4)$$

причем G_μ подчинены условиям

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{1}{D(\lambda)}\sum_{\mu=1}^{4}G_\mu D_{\mu i}(\lambda)(\lambda+1)^3\right]_{\lambda=-1}=0, \qquad \left[\frac{1}{D(\lambda)}\sum_{\mu=1}^{4}G_\mu D_{\mu i}(\lambda)(\lambda+1)^3\right]_{\lambda=-1}=0$$

Подставив сюда алгебраические дополнения, получим

$$x_1=-z_1-z_2-G_1z_4,\quad x_3=-\mu z_3-G_3z_4,\quad x_2=z_2-G_2z_4,\quad x_4=-\mu z_2+\mu z_3-G_4z_4$$

Условия, налагаемые на G_μ, примут вид: $G_1+G_2=0$ и $G_3+G_4=0$. Положим $G_1=-G_2=1$, $G_3=G_4=0$. Тогда окончательно будем иметь

$$x_1=-z_1-z_2-z_4,\qquad x_2=z_2+z_4,\qquad x_3=-\mu z_3,\quad x_4=-\mu z_2+\mu z_3$$

Построим обратное преобразование для системы (6.5). Характеристическое уравнение системы, присоединенной к (6.5), будет иметь корень $\lambda=1$ четвертой кратности и той же структуры, что и корень $\lambda=-1$ для характеристического уравнения системы (6.5).

Алгебраические дополнения элементов четвертой строки характеристического определителя присоединенной системы все отличны от нуля, поэтому положим $C_4=1$, $C_1=C_2=C_3=0$. В этом случае формулы (6.3) запишутся так:

$$z_k=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{\nu=1}^{4}\frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}}\left[\frac{\Delta_{4\nu}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}(\lambda-1)^3\right]_{\lambda=1}x_\nu \qquad (k=1,2,3)$$
$$z_4=\frac{1}{2!}\sum_{\nu=1}^{4}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[\frac{1}{\Delta(\lambda)}\sum_{\mu=1}^{4}G_\mu\Delta_{\mu\nu}(\lambda)(\lambda-1)^3\right]_{\lambda=1}x_\nu$$

где G_μ должны удовлетворять условиям

$$\left[\frac{1}{\Delta(\lambda)}\sum_{\mu=1}^{4} G_\mu \Delta_{\mu\nu}(\lambda)(\lambda-1)^3\right]_{\lambda=1}=0, \qquad \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{1}{\Delta(\lambda)}\sum_{\mu=1}^{4} G_\mu \Delta_{\mu\nu}(\lambda)(\lambda-1)^3\right]_{\lambda=1}=0$$

Согласно последним формулам получим

$$z_1=\mu x_1+\mu x_2,\quad z_2=\mu x_1+\mu x_2-x_3-x_4,\quad z_3=-x_4,\quad z_4=-G_1x_1-G_2x_2-G_3x_3-G_4x_4$$

Причем $G_3=G_4$, $G_1-G_2+\mu G_4=0$.

Положим $G_3=G_4=1$, $G_2=0$, $G_1=-\mu$, тогда для z_4 будем иметь $z_4=-\mu x_1-x_3-x_4$.

7. Теперь рассмотрим уравнения системы прямого автоматического регулирования. Будем считать, что она записана в виде

$$\dot{x}_i=\sum_{\tau=1}^{n} a_{i\tau}x_\tau+h_i f(\sigma), \qquad \sigma=\sum_{\tau=1}^{n}\beta_\tau x_\tau \tag{7.1}$$

где $a_{i\tau}$, h_i, β_τ — постоянные, физический смысл которых см. [1]. Составим для системы (7.1) соответствующую однородную систему

$$\dot{x}_i=\sum_{\tau=1}^{n} a_{i\tau}x_\tau \tag{7.2}$$

Легко показать, что систему (7.1) приводит к каноническим переменным то же преобразование, что и однородную систему(7.2). Преобразование для системы (7.2) уже построено и имеет вид (5.1).

Пример (см. Е. П. Попов [6]). Рассмотрим уравнения системы регулирования курса самолета

$$\dot{x}_1=-x_1+f(\sigma),\qquad \dot{x}_2=-f(\sigma),\qquad \dot{x}_3=(\gamma-1)x_1+\gamma x_2-rf(\sigma),\qquad \sigma=x_3 \tag{7.3}$$

где γ и r — постоянные, зависящие от коэффициентов уравнений чувствительных элементов, обратной связи и усилителя. Считаем, что рассматриваемые уравнения суть уравнения системы прямого регулирования, в противном случае уравнения уже имеют канонический вид. Характеристическое уравнение системы (7.3) имеет корни $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=0$, причем кратный корень — не простой относительно элементарных делителей. Алгебраическое дополнение $D_{12}(\lambda)=0$, но зато $D_{22}(\lambda)\neq 0$. Поэтому, учитывая предположения, сделанные относительно C_μ, положим $C_1=C_2=1$, $C_3=0$. Для системы (7.3) формулы преобразования будут следующие:

$$x_i=\frac{D_{1i}(-1)+D_{2i}(-1)}{D'(-1)}z_1+\left[\frac{d}{d\lambda}\frac{D_{1i}(\lambda)+D_{2i}(\lambda)}{D(\lambda)}\lambda^2\right]z_2+\left[\frac{D_{1i}(\lambda)+D_{2i}(\lambda)}{D(\lambda)}\lambda^2 z_3\right]_{\lambda=0}$$

$$(i=1,\,2,\,3)$$

Отсюда

$$x_1=z_1,\qquad x_2=-z_2,\qquad x_3=(\gamma-1)z_1-(\gamma-1)z_2-\gamma z_3$$

а канонический вид системы

$$\dot{z}_1=-z_1-f(\sigma),\qquad \dot{z}_2=f(\sigma)$$

$$\dot{z}_3=z_2-\frac{2\gamma-2-r}{\gamma}f(\sigma),\qquad \sigma=(\gamma-1)z_1-(\gamma-1)z_2-\gamma z_3$$

Поступила 29 X 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951.
2. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем, Гостехиздат, 1955.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Гостехиздат, 1951.
4. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1955.
6. Попов Е. П. Динамика систем автоматического регулирования. Гостехиздат, 1954.