Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С. Н. Шиманов

(Свердловск)

В работе теория колебаний квазилинейных систем, движение которых описывают дифференциальные обыкновенные уравнения, обобщается на системы с запаздыванием по времени. Рассматривается случай резонанса в квазилинейных неавтономных системах с запаздыванием.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим систему, движение которой описывают дифференциально-разностные уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{r} a_\sigma x(t-\tau_\sigma) + f(t) + \mu X(t,\ x(t-\tau_1), \ldots,\ x(t-\tau_r),\ \mu) \qquad (1.1)$$

Здесь

$$x(t) = (x_1(t), \ldots,\ x_n(t)), \qquad a_\sigma = \|a_{\sigma sj}\| \quad (s,\ j = 1, \ldots,\ n)$$

a_σ — постоянные матрицы, $f(t) = (f_1(t), \ldots,\ f_n(t))$ — периодические и непрерывные функции времени t периода 2π, функции $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — периодические и непрерывные функции по отношению к t периода 2π; по отношению к $x_1(t-\tau_1), \ldots, x_n(t-\tau_r)$ эти функции допускают непрерывные частные производные в некоторой области G, определяемой неравенствами $|x(t-\tau_\sigma)| \leqslant R$, $|\mu| \leqslant \mu^*$, где R и μ^* — положительные постоянные. По отношению к параметру μ функции X_s допускают непрерывные производные в той же области; $\tau_1, \ldots,\ \tau_r$ — положительные постоянные такие, что

$$\tau_1 = 0 < \tau_2 < \tau_3 < \cdots < \tau_r < 2\pi$$

Задача состоит в определении периодических решений (периода 2π) системы (1.1), которые при $\mu = 0$ обращаются в периодическое решение $x_s^{(0)}$ порождающей системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{r} a\ x(t-\tau_\sigma) + f(t) \qquad (1.2)$$

Рассмотрим характеристическое уравнение однородной системы (1.2):

$$\Delta(\lambda) = \left| \sum_{\sigma=1}^{r} a_\sigma e^{-\tau_\sigma \lambda} - E\lambda \right| = 0 \qquad (1.3)$$

Назовем критическими те корни этого уравнения, которые либо равны нулю, либо равны $\pm N_j \sqrt{-1}$, где N_j — целые числа.

Будем различать два случая: нерезонансный, когда уравнение (1.3) не имеет критических корней или корней, близких (на величину порядкам алости μ) к числам вида $\pm N_j \sqrt{-1}$, и резонансный, когда среди корней уравнений (1.3) имеются критические корни. Задача будет состоять в определении периодических решений системы (1.1) в обоих случаях.

В такой постановке эта задача рассматривалась в работах [1—3] для квазилинейных систем, движение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Однако результаты этих работ в весьма общем виде можно перенести на системы с запаздыванием.

§ 2. Периодические решения системы (1.2). *1. Нерезонансный случай.*

а) Допустим, что все корни уравнения (1.3) имеют вещественные части, отличные от нуля.

Введем в рассмотрение функции

$$\Gamma_{js}(i\lambda) = \frac{\Delta_{js}(i\lambda)}{\Delta(i\lambda)} \tag{2.1}$$

где $\Delta(i\lambda)$ определено формулой (1.3) и $\Delta_{js}(i\lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента матрицы $\|\Delta(i\lambda)\|$, стоящего в j-колонне и s-строке. Очевидно, что и при сделанном нами предположении относительно корней уравнения (1.3) функции $\Gamma_{js}(i\lambda)$ будут непрерывны в промежутке $-\infty < \lambda < +\infty$ и при $|\lambda| \to \infty$ будут иметь порядок $O(|\lambda|^{-1})$; кроме того, функции $\Gamma'_{js}(i\lambda)$ тоже будут непрерывны и удовлетворяют условию $O(|\lambda|^{-1})$.

Определим функции

$$K_{js}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda}\Gamma_{js}(i\lambda)\,d\lambda, \qquad \overset{\circ}{K}_{js}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda}\Gamma'_{js}(i\lambda)\,d\lambda \tag{2.2}$$

При сделанных замечаниях о свойствах функций $\Gamma_{js}(i\lambda)$ можно показать, что интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K_{js}(t)|\,dt \tag{2.3}$$

имеют конечное значение.

Периодическое решение системы (1.2) определяют следующие функции:

$$x_s^*(t) = \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x)\,K_{sj}(x-t)\,dx \equiv \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} f_j(t+x)\,K_{sj}(x)\,dx \tag{2.4}$$
$$(s = 1, \ldots, n)$$

Это периодическое решение будет единственным. Его можно, конечно, всегда найти в виде формальных рядов Фурье, если допустить, что функции $f(t)$ разлагаются в ряды Фурье. Имеет место оценка

$$|x_s^*(t)| < AM, \qquad A = \max\left\{\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} |K_{sj}(x)|\,dx\right\} \tag{2.5}$$

где M определяется условием $|f_j(t)| < M$.

б) Допустим теперь, что имеется нерезонансный случай, но что среди корней уравнения (1.3) имеется конечное число простых чисто мнимых некритических корней вида $\omega_j i$, где $\omega_j \neq N_j$ (N_j — целые числа). В этом случае система (1.1) тоже имеет единственное периодическое решение, допускающее оценку типа (2.5).

Для построения этого решения определим функции $\Gamma_{sj}^*(i\lambda)$ следующим образом. Окружим числа $\omega_j i$ интервалами 2ε настолько малыми, чтобы в интервалах $[\omega_j - \varepsilon, \omega_j + \varepsilon]$ не было ни одного целого числа. Это всегда можно сделать, так как $\omega_j \sqrt{-1}$ — некритические корни. Пусть вне этих интервалов и на их границах $\Gamma_{sj}^*(i\lambda) = \Gamma_{sj}(i\lambda)$. Внутри указанных интервалов функции Γ_{sj}^* определяем так, чтобы они были непрерывны вместе с их первыми производными по λ на интервале $-\infty < \lambda < +\infty$. Это всегда можно сделать. Тогда периодическое решение $x_s^*(t)$ системы (1.1) в этом случае будет по-прежнему определять соотношения (2.2) и (2.4), в которых $\Gamma_{sj}(i\lambda)$ заменены на $\Gamma_{sj}^*(i\lambda)$. Для этого решения будут справедливы оценки (2.5).

2. Резонансный случай. Допустим теперь, что среди корней уравнения (1.3) имеется конечное число простых критических корней вида $N_j\sqrt{-1}$ ($j = 1, \ldots, k$) и остальные корни некритические удовлетворяют условию «а» или «б». В этом случае периодическое решение системы (1.2) можно разбить на две части: одно слагаемое не будет содержать критические гармоники $N_j\sqrt{-1}$, а другое решение будет состоять только из критических гармоник. Естественно, что в этом случае, вообще говоря, может не существовать периодическое решение. Для того чтобы система (1.2) допускала периодические решения, функции $f_j(t)$ должны удовлетворять k условиям того же типа, что и для обыкновенных уравнений.

Пусть

$$f_j(t) = \varphi_j(t) + \sum_{l=1}^{k} c_{jl} \exp(N_l t \sqrt{-1}) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{2.6}$$

Здесь функции $\varphi_j(t)$ не содержат резонансных гармоник,

$$c_{jl} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_j(t) \exp(-N_l t \sqrt{-1})\, dt \qquad (j = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, k) \tag{2.7}$$

Периодическое решение системы (1.2) $x_s^*(t)$ будем искать в виде суммы

$$x_s^* = x_{s1}^* + x_{s2}^*$$

где x_{s1}^* определяются из системы (1.1), в которой $f_s(t)$ заменены на $\varphi_s(t)$, а x_{s2}^* определяются из системы (1.1), в которой функции $f_s(t)$ заменены на второе слагаемое в (2.6).

Построим функции $\Gamma_{sj}^*(t)$, так же как и в «б», дополнив интервалы $[\omega_i - \varepsilon, \omega_i + \varepsilon]$ еще интервалами $[N_j - \varepsilon, N_j + \varepsilon]$. Вне этих интервалов $\Gamma_{sj}^*(i\lambda)$ равны $\Gamma_{sj}(i\lambda)$. Внутри указанных интервалов $\Gamma_{sj}^*(i\lambda)$ достраиваются так, чтобы они вместе со своими производными по λ были непрерывны на интервале $-\infty < \lambda < +\infty$. Тогда периодические функции x_{s1}^* будут определяться формулами (2.2) и (2.4), в которых Γ_{sj} следует заменить на Γ_{sj}^*, а функции $f_s(t)$ должны быть заменены на периодические функции $\varphi_s(t)$.

Функции $\varphi_s(t)$ имеют оценки

$$|\varphi_s(t)| < M(1+k) = M^* \qquad (M > |f_s(t)|) \tag{2.8}$$

где M — положительные постоянные. Для периодических функций x_{s1}^* будут справедливы оценки (2.5), в которых M должно быть заменено на M^*, а Γ_{sj} на Γ_{sj}^*. Заметим, что оценка (2.8) может быть существенно улучшена в случае предположения о дифференцируемости по t функций $f(t)$.

Периодические функции $x_{s2}^*(t)$ будем искать в виде тригонометрических сумм

$$x_{s2}^*(t) = \sum_{j=1}^{k} C_{sj} \exp(N_j \sqrt{-1} t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.9}$$

Постоянные C_{sj} удовлетворяют системе линейных неоднородных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{\sigma=1}^{r} a_{\sigma sl} \exp(-\tau_\sigma N_j \sqrt{-1}) - \delta_{sl} N_j \sqrt{-1} \right) C_{lj} = c_{sj} \qquad \binom{s = 1, \ldots, n}{j = 1, \ldots, k} \tag{2.10}$$

Система (2.10) допускает решение, а система (1.2) допускает периодическое решение, если выполнены условия

$$\int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^{n} b_{lj} \exp(-N_j \sqrt{-1}) f_l(t)\, dt = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k) \tag{2.11}$$

Здесь $b_{lj} \exp(-N_j \sqrt{-1})$ $(j = 1, \ldots, k)$ представляют собой периодические решения «сопряженной» системы, однородной системе (1.2) вида

$$\frac{dx}{dt} = -\sum_{\sigma=1}^{r} a_\sigma' x(t + \tau_\sigma) \tag{2.12}$$

где a_σ' — транспонированная матрица a_σ. Очевидно, что b_{lj} удовлетворяют следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{\sigma=1}^{r} - a_{\sigma ls} \exp(\tau_\sigma N_j \sqrt{-1}) - \delta_{sl} N_j \sqrt{-1} \right) b_{lj} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.13}$$

Допустим, что условия (2.11) выполнены. Тогда система (2.10) совместна. Ее решение мы найдем следующим образом.

Так как $N_j \sqrt{-1}$ — простой корень уравнения (1.3), то среди первых миноров найдется по крайней мере один, отличный от нуля. Допустим, что этот минор соответствует элементу, расположенному в пересечении первой строки и первой колонки $\Delta_{11} \neq 0$. Отбросив первое уравнение и положив $C_{1j} = 0$, найдем остальные $C_{2j}, \ldots, C_{nj}$ по правилу Краммера из последних $n-1$ уравнения (2.10). Легко заметить, что все C_{sj} будут иметь оценку

$$|C_{sj}| < B_j M \qquad (M > |f_j(t)|)$$

где B_j зависит от вида матриц a_σ и корня $N_j \sqrt{-1}$ уравнения (13).

Поэтому решение x_{s2}^* будет определяться вполне определенным оператором L_s^* от f:

$$x_{s2}^* = L_s^* (t,\ f) \tag{2.14}$$

Этот оператор обладает свойствами

$$L_s^* (t, f^{(1)} + f^{(2)}) = L_s^* (t, f^{(1)}) + L_s^* (t, f^{(2)}) \tag{2.15}$$

$$L_s^* (t, cf) = cL_s^* (t, f) \qquad (c = \text{const}) \tag{2.16}$$

$$| L_s^* (t, f) | < \sum_{j=1}^{k} B_j M \tag{2.17}$$

Наконец, линейная однородная система (1.2) в случае резонанса имеет периодическое решение периода 2π вида

$$x_s = \sum_{j=1}^{k} M_j d_{sj} \exp (N_j \sqrt{-1} t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.18}$$

где $M_1, \ldots, M_k$ — произвольные постоянные d_{sj} — k — частных решений k линейных однородных систем (2.10) (в которых $c_{sj} = 0$).

Ранее найденное частное решение $x_s{}^*{}_1 (t)$ тоже может быть представлено при помощи вполне определенного оператора L_s^{**}, удовлетворяющего условиям (2.15) и (2.16) и оценке

$$| L_s^{**} (t, \varphi) | < AM \tag{2.19}$$

где постоянные определены в формулах (2.5), (2.8).

Вводя определенный оператор $L_s = L_s^* + L_s^{**}$, мы приходим к следующему выводу.

В случае резонанса, когда уравнение (1.3) имеет k простых критических корней, периодическое решение системы (1.2) существует, если выполнены условия (2.11).

Это периодическое решение будет содержать k произвольных постоянных $M_1, \ldots, M_k$ и может быть представлено в виде

$$x_s^* (t) = \sum_{j=1}^{k} M_j \varphi_{sj} (t) + L_s (t, f_1, \ldots, f_n), \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.20}$$

где φ_{sj} — периодические решения однородной системы (1.2), L_s — вполне определенный оператор, удовлетворяющий условиям (2.15) и (2.16) и оценке

$$| L_s (t, f_1, \ldots, f_n) | < \left(\sum_{j=1}^{k} B_j + A(1 + k) \right) M = A_1 M \tag{2.21}$$

Замечание. В случае, когда критические корни $N_j \sqrt{-1}$ кратные, число периодических решений однородных систем (1.2) и (2.12) будет $m < k$. Условия (2.11) будут по-прежнему условиями существования периодического решения системы (1.2), но число их будет уже равно m. При выполнении этих условий периодическое решение по-прежнему может быть представлено в виде (2.20), где, однако, произвольных постоянных M_i будет m и операторы L_s будут иметь другой вид, но будут обладать теми же свойствами линейности и однородности и оценкой типа (2.21).

§ 3. Периодическое решение системы (1.1) в нерезонансном случае.
Теорема 1. Если среди корней характеристического уравнения нет критических, а число чисто мнимых некритических корней конечно, то система (1.1) допускает единственное периодическое решение периода 2π, которое определено в области $|\mu| \leqslant \eta$ (где η — достаточно малое положительное число) и обращается при $\mu = 0$ в порождающее периодическое решение системы (1.2).

Доказательство теоремы 1 проводится без труда обычным методом последовательных приближений.

Заметим, что теорема остается справедливой и тогда, когда число мнимых некритических корней бесконечно, если только найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что в интервалах $(\omega_j - \varepsilon,\ \omega_j + \varepsilon)$ на мнимой оси нет ни одного корня мнимого некритического.

§ 4. Периодическое решение системы (1.1) в резонансном случае.
Предположим, что система (1.2) допускает порождающее периодическое решение вида

$$x_s^0 = M_1^0\varphi_{si}(t) + \ldots + M_k^0\varphi_{sk}(t) + \varphi_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

где $M_1^0, \ldots, M_k^0$ — постоянные, φ_{si} — частные периодические решения однородной системы (1.2), $\varphi_s(t)$ — периодическое решение системы (1.2). Последнее имеет место, если выполнены условия (2.11). Допустим, что постоянные $M_j^{(0)}$ таковы, что $\{x_s^{(0)}\}$ расположено в области G. Тогда справедлива следующая теорема, которая является обобщением предложения И. Г. Малкина [2] на системы с запаздыванием.

Теорема 2. Для того, чтобы система (1.1) допускала периодическое решение $x_s(t, \mu)$, которое при $\mu = 0$ обращается в порождающее решение (4.1), необходимо, чтобы постоянные $M_1^{(0)}, \ldots, M^{(0)}$ удовлетворяли системе уравнений

$$P_j(M_1^0, \ldots, M_k^0) \equiv -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{s=1}^{n} X_s(t,\ x^{(0)}(t-\tau_1), \ldots, x^{(0)}(t-\tau_r), 0)\,\psi_{sj}\,dt$$
$$(j = 1, \ldots, k) \tag{4.2}$$

где ψ_{sj} — периодические решения «сопряженной» системы (2.13).

Если при этом якобиан

$$\frac{\partial(P_1, \ldots, P_k)}{\partial(M_1, \ldots, M_k)} \neq 0 \quad \text{при } M = M^{(0)} \tag{4.3}$$

отличен от нуля, то система (1.1) имеет единственное периодическое решение $x_s(t, \mu)$, которое при $\mu = 0$ обращается в порождающее периодическое решение (4.1).

Решение определено в области $|\mu| \leqslant \eta$, где $\eta > 0$ и достаточно мало.

Это предложение получается как простое следствие из более общего условия существования периодического решения для системы (1.1), которое является обобщением условий, полученных в нашей работе [3]. Получим эти условия.

§ 5. Вспомогательная система и ее периодические решения. 1. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{r} a_\sigma x(t-\tau_\sigma) + f(t) + \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(t) W_j \tag{5.1}$$

где $\varphi_j = \{\varphi_{1j}, \ldots, \varphi_{nj}\}$ — периодические решения однородной системы, а W_j — постоянные.

Покажем, что постоянные W_j можно всегда выбрать таким образом, чтобы условия существования периодического решения для системы дифференциальных уравнений (5.1) будут всегда выполняться.

В самом деле, эти условия для системы (5.1) имеют вид:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^{n} \psi_{sj} f_s(t)\, dt + d_{1j} W_1 + \ldots + d_{kj} W_k = 0 \qquad (j=1,\ldots,k) \tag{5.2}$$

где ψ_{sj} — периодические решения «сопряженной» системы (2.12), а d_{ij} определяется равенствами

$$d_{ij} = \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^{n} \varphi_{si} \psi_{sj}\, dt \tag{5.3}$$

Для этого достаточно показать, что определитель $|d_{ij}|\,(i, j = 1,\ldots,n)$ отличен от нуля.

Если $d_{i1} = \ldots = d_{ik} = 0$, то это бы означало, что критическому корню $N_i\sqrt{-1}$ соответствует не одно, а два частных решения. Поэтому не все d_{ij} равны нулю.

Допустим теперь, что $|d_{ij}| = 0$. Покажем, что это ведет к противоречию. В самом деле, тогда найдутся числа $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$ такие, что

$$\Lambda_1 d_{1j} + \ldots + \Lambda_k d_{kj} = 0 \qquad (j = 1,\ldots,k) \tag{5.4}$$

Но тогда система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{r} a_\sigma x(t-\tau_\sigma) + \Lambda_1\varphi_1 + \ldots + \Lambda_k\varphi_k \tag{5.5}$$

будет допускать периодическое решение $\varphi(t)$, а однородная система (1.2), помимо k периодических решений, соответствующих k критическим корням, будет допускать решение с вековыми членами, тоже соответствующее критическим корням:

$$x(t) = \varphi(t) + (\Lambda_1\varphi_1(t) + \ldots + \Lambda_k\varphi_k(t))\, t$$

Последнее невозможно в силу сделанных нами предположений, так как $x(t)$ не зависит от $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ и является $k+1$ решением, соответствующим k критическим корням. Поэтому определитель $|d_{ij}|$ отличен от нуля.

2. Рассмотрим вспомогательную систему интегро-дифференциальных уравнений с запаздыванием вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{r} a_\sigma x(t-\tau_\sigma) + f(t) + \mu X(t, x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_r), \mu) + \sum_{j=1}^{k} \varphi_j W_j \tag{5.6}$$

Здесь постоянные W_j определяются однозначно из системы линейных неоднородных уравнений

$$\mu \int_0^{2\pi} X(t, x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_r), \mu)\psi_j dt + \sum_{i=1}^{k} W_i d_{ij} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k) \tag{5.7}$$

Предполагается, что условия (2.11) выполнены для f_s.

Лемма. Система интегро-дифференциальных уравнений с запаздыванием определяет семейство периодических решений, зависящее от k произвольных постоянных параметров $M_1, \ldots, M_k$ и параметра μ вида

$$x_s^*(t, M, \mu) = M_1\varphi_{s1} + \ldots + M_k\varphi_{sk} + \varphi_s + \mu x_s^*(t, M_1, \ldots, M_k, \mu) \qquad (s = 1, \ldots, k) \tag{5.8}$$

где $x_s^*(t, M, \mu)$ — непрерывные функции параметров $M_1, \ldots, M_k$, определенные в некоторой окрестности фиксированной точки $M_1^{(0)}, \ldots, M_k^{(0)}$, и параметра μ при $|\mu| \leqslant \mu^*$ (μ^* — некоторое положительное число). Эти функции допускают непрерывные частные производные по $M_1, \ldots, M_k$. Они периодические и непрерывные функции времени t периода 2π.

В случае, когда X_s — аналитические относительно x и μ в G, функции x^* тоже будут аналитическими относительно $M_1, \ldots, M_m$ в некоторой окрестности точки $M_1^{(0)}, \ldots, M_m^{(0)}$ и при $|\mu| \leqslant \mu^*$.

Доказательство этого предложения осуществляется методом последовательных приближений.

В качестве первого приближения берем порождающее периодическое решение $x_s^{(0)}$ и постоянные $W_j^{(0)}$, определяемые системой (5.6) и (5.7) при $\mu = 0$. При этом находим, что $x_s^{(0)}$ определяются формулами (4.1), а $W_j^{(0)} = 0$. Тогда l-приближение определяется из системы линейных уравнений

$$\frac{dx^{(l)}}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{r} a_\sigma x^{(l)}(t-\tau_\sigma) + f(t) + \mu X(t, x^{(l-1)}(t-\tau_1), \ldots, x^{(l-1)}(t-\tau_r), \mu) + \sum_{j=1}^{k} \varphi_j W_j^{(l)}$$

$$\mu \int_0^{2\pi} X(t, x^{(l-1)}(t-\tau_1), \ldots, x^{(l-1)}(t-\tau_r), \mu)\psi_j dt + \sum_{i=1}^{k} W_i^{(l)} d_{ij} = 0$$

При доказательстве того, что все приближения расположены в области G, и при построении мажорирующих рядов используем оценки, полученные в § 2 настоящей работы.

При доказательстве сходимости последовательностей $x^{(l)}$ и $W_i^{(l)}$ получается оценка числа μ^*.

§ 6. Условия существования периодических решений системы (1.1) необходимые и достаточные. Допустим, что мы нашли периодическое решение x_s^* вспомогательной системы (5.6), (5.7). Соответствующие ему постоянные W_i найдутся из уравнений (5.7).

Введем обозначение

$$W_j^* \equiv \mu P_j^* \ (M_1,\ldots,M_k,\mu) = -\frac{\mu}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{s=1}^{n} X_s\,(t, x^*(t-\tau_1)\ldots x^*(t-\tau_r),\mu)\psi_{sj}\,dt$$

$$(j=1,\ldots,k) \qquad (6.1)$$

Функции P_i^*, так же как и x_s^* и W_j^*, будут определены в некоторой области

$$|\mu|\leqslant\mu^*, \qquad |M_i - M_i^{(0)}|\leqslant H \qquad (i=1,\ldots,k)$$

где H — некоторое положительное число, определяемое в процессе доказательства сходимости последовательных приближений $x^{(l)}$, $W^{(l)}$ так, чтобы $x^{(l)}$ были расположены в области G.

Теорема 3. Для того, чтобы система (1.1) имела периодическое решение периода 2π, обращающееся в порождающее решение, необходимо и достаточно, чтобы уравнения

$$P_j^*\,(M_1,\ldots,M_k,\mu) = 0 \qquad (j=1,\ldots,k) \qquad (6.2)$$

допускали решение $M_i(\mu)$ в некоторой окрестности $|\mu|\leqslant\eta_1\leqslant\mu^*$, которое удовлетворяет условию $M_i(0) = M_i^{(0)}$.

Доказательство. Пусть система (6.2) допускает решение $M_j(\mu)$ ($M_j(0) = M_j^{(0)}$). Тогда система функций

$$x_s(t) = x_s^*\,(t, M_1(\mu),\ldots,M_k(\mu),\ \mu) \qquad (s=1,\ldots,n)$$

будет периодическим решением системы (1.1). Отсюда вытекает достаточность.

Предположим, что система (1.1) допускает периодическое решение указанного вида. Оно непременно будет принадлежать семейству (5.8). Подставив его в (5.6) и (5.7), найдем, что P_j^* должны быть равны нулю. Отсюда вытекает необходимость условия (6.2).

В частности, чтобы система (1.1) допускала периодическое решение, обращающееся в порождающее, необходимо, чтобы постоянные $M_1^{(0)},\ldots$ $\ldots, M_k^{(0)}$ удовлетворяли уравнениям (4.2). Из теорем о неявных функциях в применении к уравнениям (6.2) вытекает достаточность условия (4.3).

Поступила 25 II 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А. и Витт А. А. К математической теории захватывания. Ж. прикл. физики, т. VII, вып. 4, 1930.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
3. Шиманов С. Н. Колебания квазилинейных неавтономных систем с неаналитической характеристикой нелинейности. ПММ, т. XXI, вып. 2, 1957.