

## ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ

Е. А. Барбашин, В. А. Табуева

(Свердловск)

Проводится качественное исследование нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. Это уравнение, в частности, описывает движение материальной точки по некоторой замкнутой кривой, причем предполагается, что на движение точки влияет подталкивающая сила. Наличие подталкивающей силы обеспечивает при выполнении некоторых дополнительных условий существование по крайней мере одного устойчивого предельного цикла.

Простым примером, иллюстрирующим содержание статьи, может служить маятник подверженный действию подталкивающей силы.

Рассмотрим уравнение колебаний маятника

$$\begin{aligned} \theta'' + a\theta' + b \sin \theta &= L + \delta M & (1) \\ \delta &= 1 \text{ при } \theta' > 0, \quad \delta = -1 \text{ при } \theta' \leq 0 \end{aligned}$$

где  $a, b, L, M$  — положительные постоянные, причем

$$0 < L + M < b$$

Постоянная  $L$  в уравнении (1) соответствует наличию внешнего момента; постоянная  $a$  характеризует величину сопротивления среды;  $M$  определяет наличие силы, подталкивающей маятник в направлении его движения.

Пусть  $\theta_0$  — наименьший положительный угол, удовлетворяющий условию  $\sin \theta_0 = (L + M)/b$ . Делая замену  $x = \theta - \theta_0$ , сведем уравнение (1) к виду

$$x'' + ax' + f(x) = 0 \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} f(x) &= b [\sin(x + \theta_0) - \sin \theta_0] \quad \text{при } x' > 0 \\ f(x) &= b [\sin(x + \theta_0) - \sin \theta_0] + 2M \quad \text{при } x' \leq 0 \end{aligned}$$

В предлагаемой статье изучаются колебания, определяемые уравнением

$$x'' + R(x, x') + f(x) = 0 \quad (3)$$

где

$$f(x) = f_1(x) \quad \text{при } x' > 0, \quad f(x) = f_2(x) \quad \text{при } x' \leq 0$$

На функции  $R(x, x')$ ,  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  накладываются ограничения так, чтобы уравнение (3) было обобщением уравнения (2).

Дифференциальное уравнение (3) эквивалентно системе уравнений

$$x' = y, \quad y' = -R(x, y) - f(x) \quad (4)$$

Функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  предположим непрерывными для всех  $x$ , непрерывно дифференцируемыми каждая в окрестности своих нулей; причем

во избежание критических случаев предположим также, что производные функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  не обращаются в нуль соответственно в нулях самих этих функций.

Пусть, кроме того, функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  удовлетворяют условиям

$$f_1(x + 2\pi) = f_1(x), \quad f_2(x + 2\pi) = f_2(x)$$

для всех  $x$

$$f_1(0) = f_1(x_1) = f_2(x_2) = 0, \quad x_1 > 0, \quad x_2 < 0 \quad (x_1 - x_2 = 2\pi) \quad (5)$$

$$f_2(\eta_0) = f_2(\eta_1) = f_2(\eta_2) = 0, \quad \eta_1 > 0, \quad \eta_2 < 0 \quad (\eta_1 - \eta_2 = 2\pi) \quad (6)$$

Здесь  $x_1$  и  $x_2$  — ближайшие к  $x = 0$  нули функции  $f_1(x)$ , а  $\eta_1$  и  $\eta_2$  — ближайшие к  $x = \eta_0$  нули функции  $f_2(x)$ , при этом

$$xf_1(x) > 0 \quad \text{в окрестности } x = 0, \quad (x - \eta_0)f_2(x) > 0 \quad \text{в окрестности } x = \eta_0$$

$$J_1 = \int_0^{2\pi} f_1(x) dx \leq 0 \quad (7)$$

В данной статье рассмотрим лишь один случай взаимного расположения нулей функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , а именно, предположим, что имеет место неравенство

$$x_2 < \eta_2 < \eta_0 < 0 < x_1 < \eta_1 \quad (8)$$

Очевидно, в приведенном в начале статьи примере наличие подталкивающей силы маятника обеспечивает именно указанное расположение нулей функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ . Схематично графики функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  представлены фиг. 1. Заметим, что графики этих функций могут, вообще говоря, пересекаться. Интеграл

$$J_2(\eta_1, \eta_2) = \int_{\eta_2}^{\eta_1} f_2(x) dx \quad (9)$$

может принимать любой знак, а также может быть равным нулю; этот факт для дальнейших рассуждений оказывается весьма существенным.

Функцию  $R(x, y)$  предположим непрерывной на всей плоскости  $xy$ , непрерывно дифференцируемой в окрестности точек  $(\eta_0, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(x_1, 0)$ ,  $(\eta_1, 0)$ , а также удовлетворяющей условиям

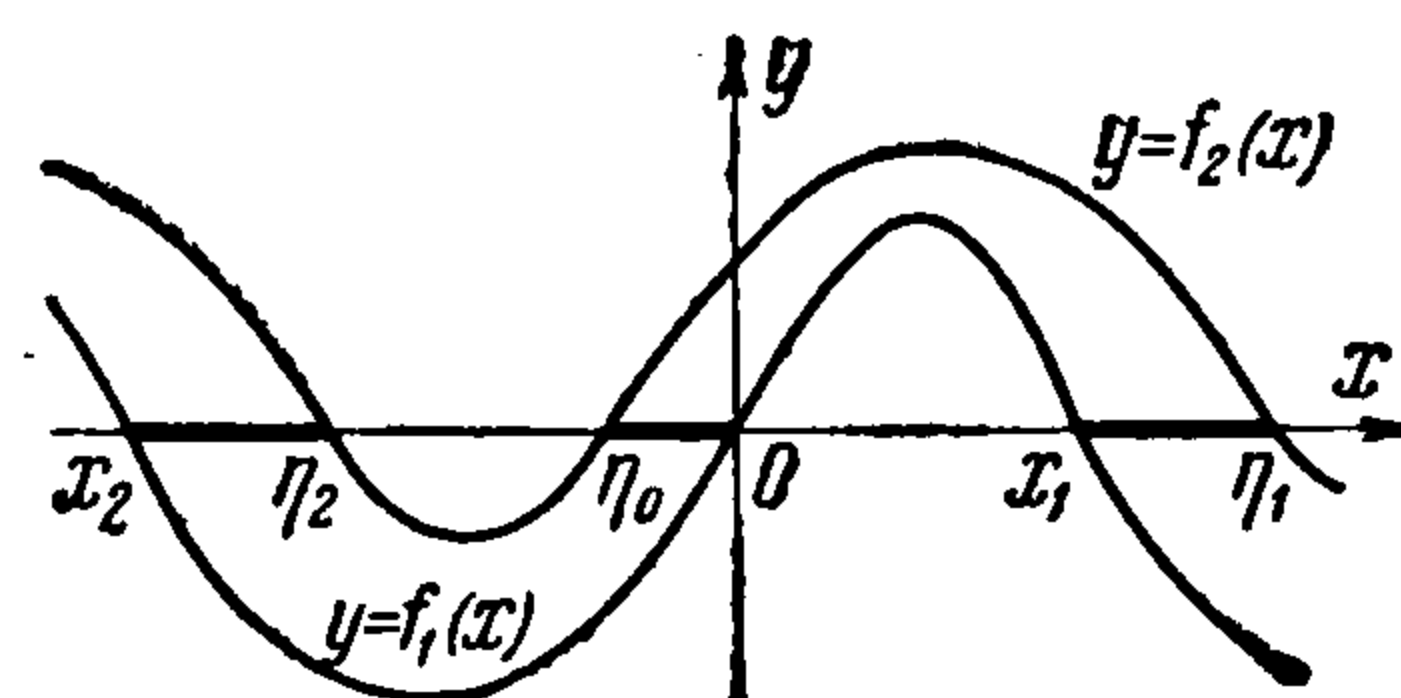
$$R(x + 2\pi, y) = R(x, y)$$

$$R(x, y) \quad \text{возрастает по } y \quad (10)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} R(x, y) > 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty, \quad R(x, 0) \equiv 0, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} R(x, y) < 0 \quad \text{при } y \rightarrow -\infty$$

Уравнение (3), удовлетворяющее условиям (5) — (8), в общем случае описывает движение материальной точки, подверженной действию подталкивающей силы, по некоторой замкнутой кривой.

Целью данной работы является качественное исследование системы (4) при предположениях (5) — (8), т. е. рассмотрение возможных разновидностей расположения интегральных кривых системы и изучение ее предельных траекторий.



Фиг. 1

Согласно предположениям относительно функции  $f(x)$  видим, что траектории исследуемой системы (4) для полуплоскости  $y > 0$  определяются системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -R(x, y) - f_1(x) \quad (11)$$

а для полуплоскости  $y \leq 0$  — системой

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -R(x, y) - f_2(x) \quad (12)$$

Возможное расположение траекторий системы (11) при предположениях (5), (10) подробно исследовано ранее [1]. При выполнении условия  $J_2(\eta_2, \eta_1) \leq 0$  и для системы (9) расположение ее траекторий легко устанавливается согласно теореме 1 той же работы [1]. Чтобы применить к системе (9) результаты цитируемой работы [1] в случае, когда  $J_2(\eta_2, \eta_1) > 0$ , достаточно сделать замену переменных, заменив  $y$  на  $-y$ , а  $x$  на  $\eta_0 - x$ . Введем обозначение

$$f_2(\eta_0 - x) = F(x), \quad -R(\eta_0 - x, -y) = R_1(x, y)$$

Тогда легко видеть, что для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-R_1(x, y) + F(x)}{y}$$

эквивалентного системе уравнений (12), выполняются предположения теоремы 1 работы [1], т. е. установленные в этой теореме результаты могут быть снова применены.

Для того чтобы исследовать расположение траекторий системы (4) во всей плоскости, достаточно «склеить» на оси  $x$  траектории системы (11) для полуплоскости  $y > 0$  с соответствующими траекториями системы (12) для полуплоскости  $y \leq 0$ . Остановимся на этом более подробно.

Фазовые траектории системы (4) определяются дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{R(x, y) + f(x)}{y} \quad (13)$$

где функции  $R(x, y)$  и  $f(x)$  удовлетворяют условиям (5) — (7).

Фазовое пространство системы (4) будем считать [1] развернутым на плоскость  $xy$ . Вследствие периодичности по  $x$  функций  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  и  $R(x, y)$  расположение интегральных кривых будет одинаково на полосах шириной  $2\pi$ , идущих вдоль оси  $y$ , плоскости  $xy$ .

Поэтому достаточно изучить расположение интегральных кривых уравнения (12) только, например, в полосе

$$x_2 \leq x \leq x_1 \quad \text{для } y > 0, \quad \eta_2 \leq x \leq \eta_1 \quad \text{для } y \leq 0$$

Существенное значение для расположения интегральных кривых системы (4) имеют особые точки систем (11) и (12), координаты которых находятся из уравнений  $f_1(x) = 0$ ,  $f_2(x) = 0$ ,  $y = 0$ . Для того чтобы движения системы (4) носили колебательный характер, предположим выполненными следующие условия:

$$[R_y'(\eta_0, 0)]^2 < 4f_2'(\eta_0), \quad [R_y'(0, 0)]^2 < 4f_1'(0).$$

Особые точки систем (11) и (12) разбивают отрезок  $[x_2, \eta_1]$  на несколько отрезков, из которых три отрезка  $[x_2, \eta_2]$ ,  $[\eta_0, 0]$  и  $[x_1, \eta_1]$  состоят целиком из неустойчивых точек (фиг. 2). Эти отрезки будем называть неустойчивыми отрезками системы (4).

Расположение сепаратрис системы (4), а также некоторых нужных нам интегральных кривых этой системы будем изучать при помощи изоклин уравнения (13). Изоклинами нулевого наклона являются кривые, определяемые уравнениями

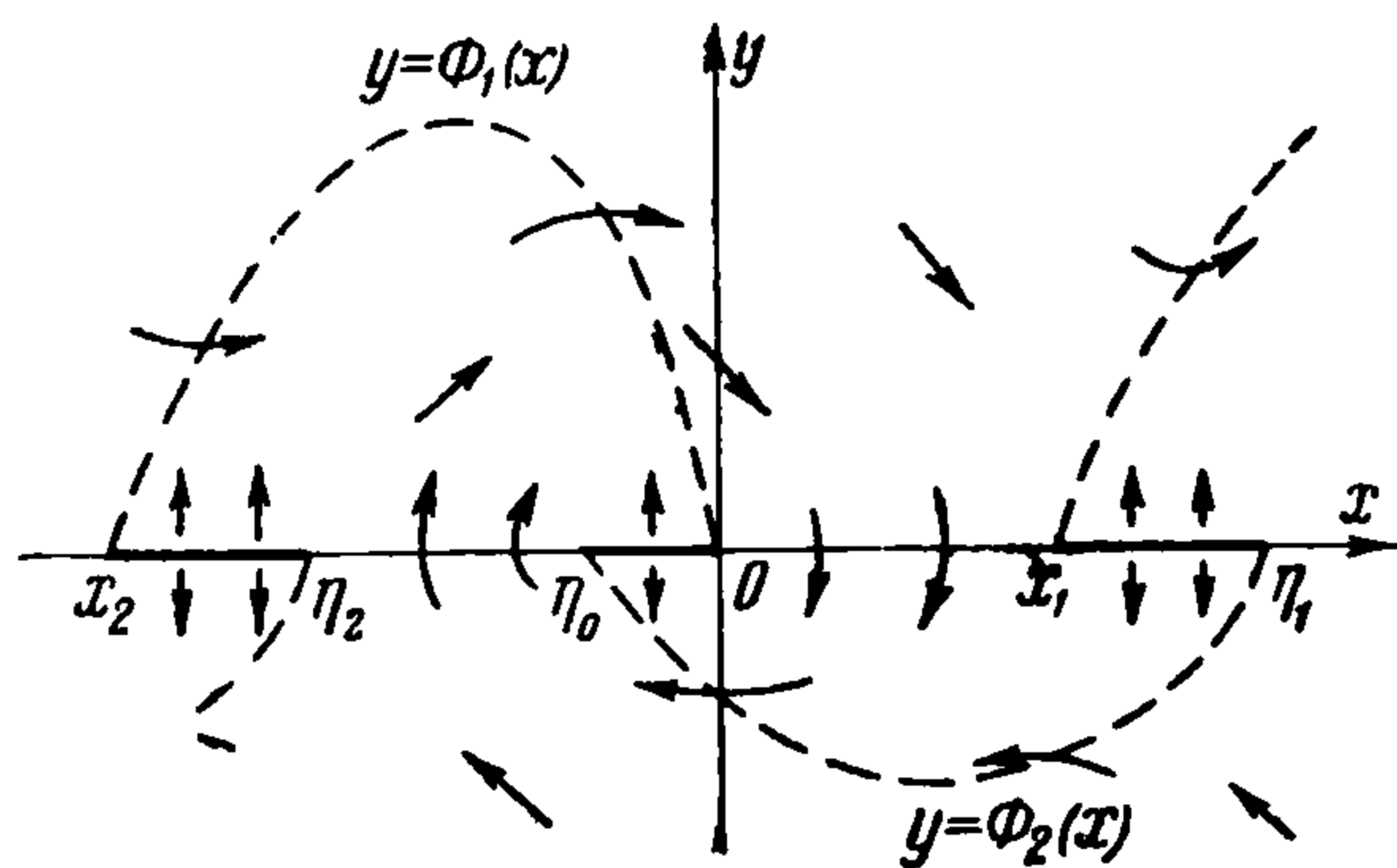
$$f_1(x) + R(x, y) = 0 \quad \text{для } y > 0, \quad f_2(x) + R(x, y) = 0 \quad \text{для } y \leq 0$$

Эти уравнения в силу приведенных ниже предположений относительно функций  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  и  $R(x, y)$  однозначно определяют зависимость ординат точек изоклины как функций их абсцисс:

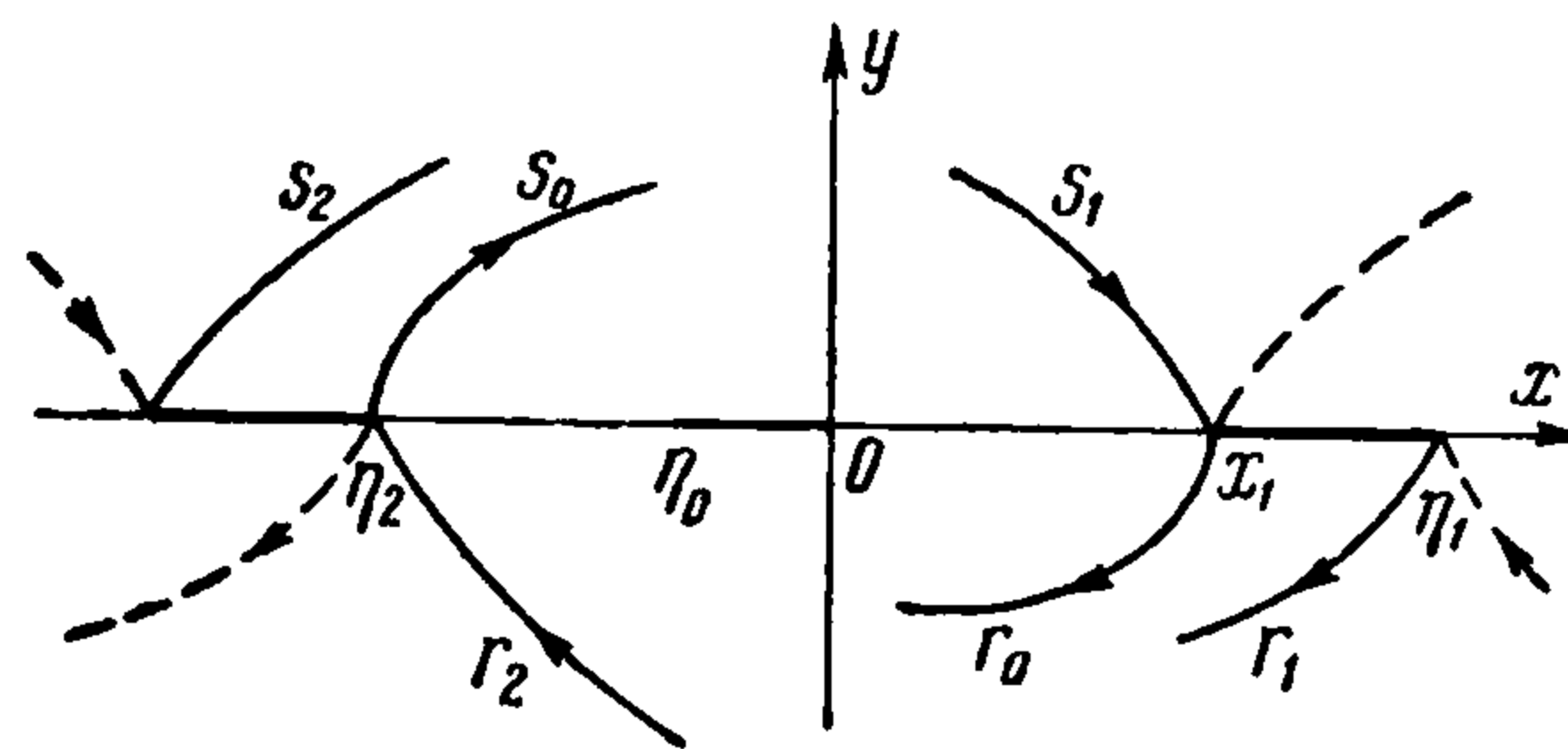
$$y = \Phi_1(x) \quad \text{для } y > 0, \quad y = \Phi_2(x) \quad \text{для } y \leq 0. \quad (14)$$

Причем, как легко установить, нули и интервалы знакопостоянства функций  $\Phi_1(x)$  и  $\Phi_2(x)$  совпадают с нулями и интервалами знакопостоянства

соответственно функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ . Изоклина нулевого



Фиг. 2



Фиг. 3

наклона (14) вместе с изоклиной вертикального наклона  $y = 0$  интегральных кривых разбивают плоскость  $xy$  на области знакопостоянства производной интегральных кривых системы (4). Поэтому поле направлений системы легко может быть построено (фиг. 2).

Изучение поля направлений системы (4), удовлетворяющей предположениям (5) — (10), и характера особых точек систем (11) и (12) позволяет заметить, что наличие неустойчивых отрезков системы (4) создает по сравнению с ранее [1] рассмотренным случаем большее число возможных качественных картин расположения интегральных кривых системы (4). В частности, наличие неустойчивого отрезка  $[\eta_0, 0]$ , очевидно, может обуславливать существование предельного устойчивого цикла, охватывающего этот отрезок и соответствующего периодическому по  $t$  решению  $X(t)$  уравнения (3).

Кроме того, при выполнении соотношений (5), (8) для системы (4) возможно [1] существование периодических по  $x$  решений  $Y_1(x)$  и  $Y_2(x)$ , соответствующих предельным циклам, охватывающим цилиндр фазовой поверхности системы, и удовлетворяющих для всех  $x$  условиям

$$Y_i(x + 2\pi) = Y_i(x) \quad (i = 1, 2) \quad \text{для всех } x$$

$$\int_0^{2\pi} [f_i(x) + R(x, Y_i(x))] dx = 0, \quad Y_1(x) \geq 0, \quad Y_2(x) \leq 0 \quad (15)$$

причем функции  $Y_1(x)$  и  $Y_2(x)$  могут обратиться в нуль лишь в точках, являющихся абсциссами неустойчивых особых точек соответственно систем (11) и (12).

Обозначим сепаратрисы системы (4), а также некоторые их продолжающие интегральные кривые согласно фиг. 3. Для удобства изложения последние будем называть также сепаратрисами системы (4).

Разновидности качественной картины расположения интегральных кривых изучаемой системы определяются различными сочетаниями существования или отсутствия периодических решений  $X(t)$ ,  $Y_1(x)$ ,  $Y_2(x)$  соответственно уравнений (3) и (13) и обусловлены различным возможным взаимным расположением сепаратрис  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_0$ ,  $s_0$ .

Аналогично теореме 1 работы [1] можно сформулировать и доказать теорему о том, что система (4) при предположениях (5) — (7) имеет пять и только пять возможных разновидностей качественной картины расположения интегральных кривых.

Необходимые и достаточные условия существования и отсутствия периодических по  $x$  решений определены в теореме 1 цитированной работы [1]. Так, выполнение неравенства

$$s_1(0) > s_2(0) \quad (16)$$

является необходимым и достаточным условием отсутствия решения  $Y_1(x)$ . С другой стороны, для существования этого решения необходимо и достаточно выполнения соотношения

$$s_1(0) \leq s_2(0) \quad (17)$$

Аналогичные условия можно вывести и для периодического по  $x$  решения  $Y_2(x)$  уравнения (13). Так, выполнение неравенства

$$r_1(\eta_0) > r_2(\eta_0) \quad (18)$$

является необходимым и достаточным для его отсутствия; для существования решения  $Y_2(x)$  необходимо и достаточно выполнение соотношения

$$r_1(\eta_0) \leq r_2(\eta_0) \quad (19)$$

Критерии существования или отсутствия периодических по  $x$  решений могут быть получены при помощи неравенств (6) — (19) при использовании оценок сепаратрис, входящих в эти неравенства.

Для того чтобы вывести условия существования периодического по  $t$  решения  $X(t)$  уравнения (3), следует рассмотреть взаимное расположение сепаратрис  $r_0$ ,  $r_2$ ,  $s_1$ ,  $s_0$ . Расположение сепаратрис будем задавать сравнением отрезков, отсекаемых ими либо на оси  $y$ , либо на оси  $x$ . Обозначим через  $x(s_0)$  длину отрезка от начала координат на оси  $x$  до наибольшего положительного нуля функции  $s_0(x)$ , через  $x(r_0)$  — длину отрезка на оси  $x$  от начала координат до наименьшего отрицательного нуля функции  $r_0(x)$ , через  $x(r_1)$  и  $x(s_1)$  — длины аналогичных отрезков. Точки  $x(r_0)$ ,  $x(r_1)$ ,  $x(s_1)$  и  $x(s_0)$  предполагаются лежащими на отрезке  $[\eta_2, x_1]$ .

*Лемма 1.* Пусть ограниченная область  $D$  содержит внутри неустойчивый отрезок  $[\eta_0, 0]$  системы (4) и расположена в полосе  $x_2 \leq x \leq \eta_1$ .

Если на границе области  $D$  имеется точка такая, что положительная полутраектория, выходящая из этой точки, лежит в области  $D$  и не совпадает с сепаратрисами  $s_1$  и  $r_2$ , то существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл системы (4), охватывающий отрезок  $[\eta_0, 0]$ .

Здесь и всюду в дальнейшем предельный цикл называется устойчивым, если он устойчив в смысле Ляпунова.

Докажем лемму. Если точка, двигаясь по траектории системы (4), остается при  $t \rightarrow +\infty$  в ограниченной области, то она должна иметь  $\omega$ -предельное множество, не пересекающееся с неустойчивым отрезком  $[\eta_0, 0]$  этой системы. Так как  $\omega$ -предельное множество состоит из целых траекторий системы, то оно должно содержать предельный цикл [2], необходимо охватывающий неустойчивый отрезок  $[\eta_0, 0]$ .

Предельный цикл не может лежать в верхней полуплоскости. Действительно, рассмотрим функцию

$$v(x, y) = y^2 + 2 \int_0^x f_1(x) dx.$$

Вычисляя производную по времени в силу уравнений (4), имеем

$$dv/dt = -yR(x, y) < 0 \quad \text{для } y > 0.$$

Отсюда и приходим к выводу, что функция  $v$  убывает вдоль предельного цикла с ростом  $t$ , что противоречит однозначности функции  $v$ .

Если предположить, что предельный цикл лежит в нижней полуплоскости, то к аналогичному противоречию придем, рассматривая функцию

$$v(x, y) = y^2 + 2 \int_{\eta_0}^x f_2(x) dx \quad \text{для } y \leq 0$$

С другой стороны, предельный цикл не может лежать ни слева от точки  $x = \eta_0$ , ни справа от точки  $x = 0$ , так как такое его расположение не согласуется с полем направлений системы (4).

Итак, предельный цикл лежит в области  $D$  и охватывает отрезок  $[\eta_0, 0]$ .

Если найденный цикл неустойчив, то внутри его должен лежать другой предельный цикл, являющийся  $\omega$ -предельным для точек, с ростом времени удаляющихся от первого цикла. Пользуясь методом трансфинитной индукции, получим по крайней мере один устойчивый предельный цикл, лежащий в области  $D$  и охватывающий неустойчивый отрезок  $[\eta_0, 0]$  системы.

**Теорема 1.** Для того чтобы система (4) обладала по крайней мере одним устойчивым предельным циклом, достаточно выполнения одного из условий:

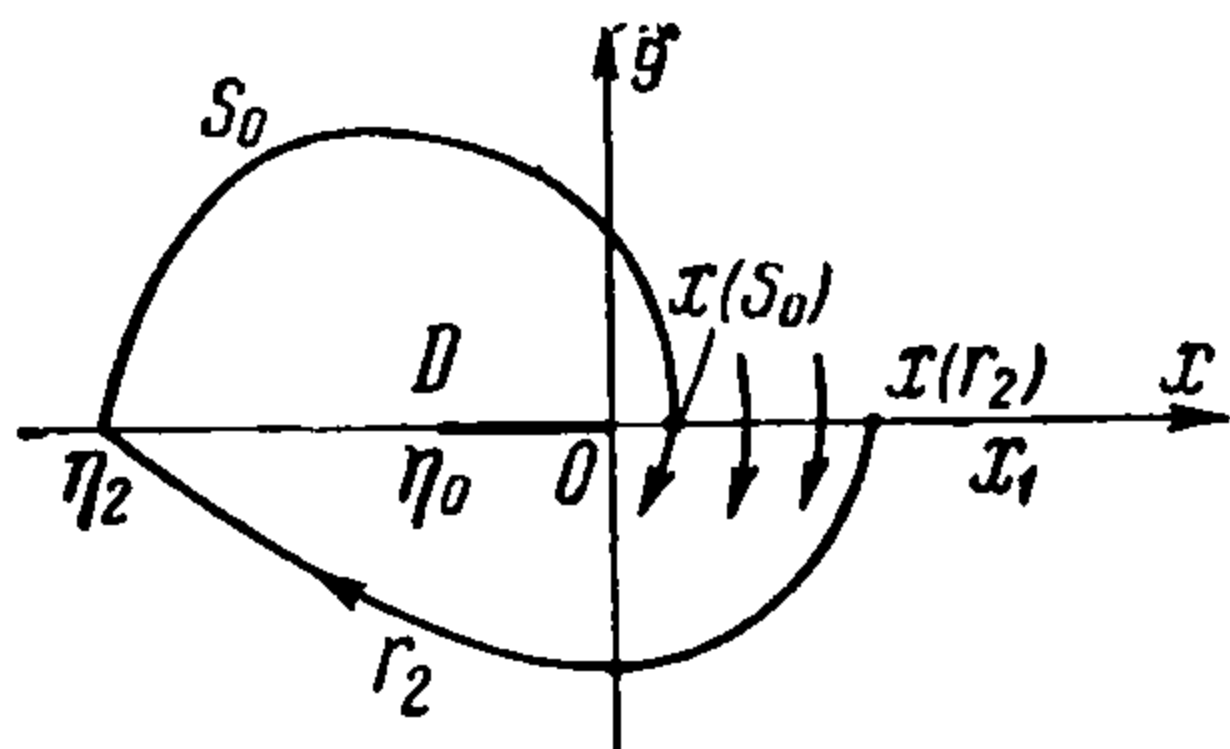
$$(a) \quad 0 < x(s_0) < x(r_2) \quad (20.1)$$

$$(b) \quad x(s_1) < x(r_0) < \eta_0 \quad (20.2)$$

$$(c) \quad s_0(0) < s_1(0), \quad r_0(\eta_0) > r_2(\eta_0) \quad (20.3)$$

Пусть выполнено условие (20.1) (фиг. 4).

Рассмотрим область  $D$ , ограниченную кривыми  $s_0$ ,  $r_2$  и отрезком  $[x(s_0), x(r_2)]$  оси  $x$ . Отрезок  $[\eta_0, 0]$  расположен внутри области  $D$ . Траектория системы (4), совпадающая с сепаратрисой  $s_0$ , попадает при некотором значении  $t$  в построенную область  $D$  и с увеличением  $t$  из этой



Фиг. 4

области выйти не может в силу структуры поля направлений и свойства единственности интегральных кривых системы (4).

Из выполнения условий леммы 1 следует существование по крайней мере одного предельного устойчивого цикла системы.

В случае выполнения условия (20.2) за область  $D$  следует взять область, ограниченную сепаратрисами  $r_0, s_1$  и отрезком  $[x(s_1), x(r_0)]$  оси  $x$ , в качестве исследуемой траектории — траекторию системы, совпадающую с сепаратрисой  $r_0$ .

И, наконец, в случае выполнения условия (20.3) теоремы за область  $D$  можно взять область, ограниченную сепаратрисами  $s_0, s_1, r_2, r_0$  и отрезками  $[r_2(\eta_0), r_0(\eta_0)], [s_0(0), s_1(0)]$  оси  $y$ .

Исследуя поведение траектории системы (4), совпадающей либо с сепаратрисой  $s_0$ , либо с сепаратрисой  $r_0$ , по лемме 1 легко установим существование хотя бы одного устойчивого предельного цикла системы (4).

Остановимся подробно на выведении достаточных критериев существования предельного цикла системы (4).

**Лемма 2.** Для интегральных кривых системы  $s_0$  и  $s_1$  справедливы неравенства

$$s_1(x) > \left(2 \int_x^{x_1} f_1(x) dx\right)^{1/2}, \quad s_0(x) < \left(2 \int_x^{\eta_2} f_1(x) dx\right)^{1/2} \quad (21)$$

для тех  $x$ , при которых соответствующие интегралы положительны.

Для доказательства неравенства (18) рассмотрим кривую

$$y = \left(2 \int_x^{x_1} f_1(x) dx\right)^{1/2} \quad (22)$$

Она пересекает ось  $x$ , помимо точки  $x=x_1$ , в некоторой точке  $x=x_*$ , расположенной на отрезке  $[x_2, 0]$ . В самом деле, вводя обозначение

$$\Phi(x) = 2 \int_x^{x_1} f_1(x) dx$$

имеем в силу свойств функции  $f_1(x)$  неравенства  $\Phi(0) > 0$  и  $\Phi(x_2) \leq 0$ , т. е. на отрезке  $[x_2, 0]$  находится нуль функции  $\Phi(x)$ .

Сепаратриса  $s_1$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (13), т. е. для нее справедливо соотношение

$$s_1^2(x) = 2 \int_x^{x_1} [R(x, s_1(x)) + f_1(x)] dx \quad (23)$$

Составим разность квадратов ординат кривых  $s_1$  и (22):

$$s_1^2(x) - y^2(x) = 2 \int_x^{x_1} R(x, s_1(x)) dx$$

Она для  $s_1(x) > 0$  положительна согласно свойствам (10) функции  $R(x, y)$ . Таким образом, справедливость неравенства (21) доказана для всех  $x_* < x < x_1$ .

Аналогично доказывается справедливость неравенства (22) при тех  $x$ , для которых кривая

$$y = \left(2 \int_x^{\eta_2} f_1(x) dx\right)^{1/2} \quad (24)$$

расположена над осью  $x$ . Точно так же доказывается и следующая лемма.

*Лемма 3.* Для интегральных кривых  $r_0$  и  $r_1$  системы (12) справедливы неравенства

$$r_2(x) < - \left(2 \int_x^{\eta_2} f_2(x) dx\right)^{1/2}, \quad r_0(x) > - \left(2 \int_x^{x_1} f_2(x) dx\right)^{1/2} \quad (25)$$

для тех  $x$ , при которых соответственно кривые

$$y = - \left(2 \int_x^{\eta_2} f_2(x) dx\right)^{1/2} \quad (26)$$

$$y = - \left(2 \int_x^{x_1} f_2(x) dx\right)^{1/2} \quad (27)$$

расположены ниже оси  $x$ .

*Замечание.* Легко проверить, что кривые (22), (24), (26), (27) являются для рассматриваемых значений  $x$  бесконтактными [2] и пересекаются с ростом  $t$  траекториями системы (4) по направлению к оси  $x$ . В самом деле, рассмотрим функцию

$$v(x, y) = y^2 - 2 \int_x^{x_1} f_1(x) dx$$

Для нее производная по времени, составленная в силу уравнений (4):

$$dv/dt = -2yR(x, y)$$

отрицательна для всех  $y > 0$  согласно свойствам (10) функции  $R(x, y)$ .

Замечая, что  $v(0, 0) < 0$ , приходим к выводу о бесконтактности кривой (22).

Аналогично проверяется бесконтактность и других кривых.

*Теорема 2.* Если кривые (24) и (26), выходящие из точки  $(\eta_2, 0)$ , пересекают ось  $x$  соответственно в точках  $x = x_*$ ,  $x = \eta_*$  и  $0 < x_* < \eta_* < \eta_1$ , то система (4) имеет по крайней мере один устойчивый предельный цикл.

Для доказательства теоремы рассмотрим область  $D$ , ограниченную кривыми (24), (26) и отрезком  $[x_*, \eta_*]$  оси  $x$ . Поскольку кривые (24) и (26) бесконтактны и пересечены траекториями системы (4) по направлению внутрь области, так же как и отрезок  $[x_*, \eta_*]$ , то траектории системы (4), пересекающие границу области  $D$ , с ростом времени входят в нее и при  $t \rightarrow +\infty$  остаются в области. Построенная область  $D$  охватывает отрезок  $[\eta_0, 0]$  неустойчивых точек системы. Применяя лемму 1, убеждаемся в существовании хотя бы одного устойчивого предельного цикла системы (4).

*Теорема 3.* Если кривые (22) и (27), выходящие из точки  $(x_1, 0)$ , пересекают ось  $x$  соответственно в точках  $x = x_*$  и  $x = \eta_*$  так, что справедливо неравенство  $x_2 < x_* \leq \eta_* < \eta_0$ , то система (4) имеет по крайней мере один устойчивый предельный цикл.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы. В качестве области  $D$  следует взять область, ограниченную бесконтактными кривыми (22), (27) и отрезком  $[x_*, \eta_*]$  оси  $x$ .

Заметим, что теоремы 2 и 3 могут быть доказаны также при помощи проверки соответственно условий (20.1) и (20.2) теоремы 1.

*Теорема 4.* Если

$$2 \int_0^{x_1} f_1(x) dx \geq A^2, \quad 2 \int_{\eta_0}^{\eta_2} f_2(x) dx \geq B^2$$

где

$$A = \max \Phi_1(x) \quad \text{для } \eta_2 \leq x \leq 0, \quad B = \min \Phi_2(x) \quad \text{для } \eta_0 \leq x \leq x_1$$

экстремальные значения ординат изоклин нулевого наклона (14) на соответствующих интервалах изменения  $x$ , то система (4) имеет хотя бы один устойчивый предельный цикл.

В самом деле, из свойств изоклин (14) следует, что  $s_0(0) < A$  и  $r_0(\eta_0) > B$ . С другой стороны, кривая (22) бесконтактная и лежит ниже сепаратрисы  $s_1$ , во всяком случае для  $0 \leq x < x_1$ ; кривая (26) лежит выше сепаратрисы  $r_2$  для  $\eta_2 < x \leq \eta_0$ . Следовательно, имеем

$$s_1(0) > \left(2 \int_0^{x_1} f_1(x) dx\right)^{1/2}, \quad r_2(\eta_0) < -\left(2 \int_{\eta_0}^{\eta_2} f_2(x) dx\right)^{1/2}$$

согласно неравенствам (21) леммы 2. Сопоставляя полученные неравенства с условиями доказываемой теоремы, приходим к выводу, что из выполнения условий теоремы следует справедливость неравенств (с) теоремы 1. Таким образом, система (4) действительно имеет хотя бы один предельный цикл.

Применяя теорему 4 к уравнению (1), мы можем утверждать, что при достаточно большом  $a$  это уравнение имеет периодическое по  $t$  решение, соответствующее незатухающим колебаниям маятника.

*Теорема 5.* Если найдутся такие значения  $x = x_*$  на отрезке  $[0, x_1]$  и  $x = \eta_*$  на отрезке  $[\eta_2, \eta_0]$ , что выполняются одновременно неравенства

$$\int_{\eta_*}^{x_*} f_2(x) dx \leq 0, \quad \int_{\eta_*}^{x_*} f_1(x) dx \geq 0$$

то система (4) будет иметь по крайней мере один предельный устойчивый цикл.

Для доказательства теоремы рассмотрим кривые

$$y = \left(2 \int_x^{\eta_*} f_1(x) dx\right)^{1/2} \quad (28)$$

$$y = -\left(2 \int_x^{x_*} f_2(x) dx\right)^{1/2} \quad (29)$$

Пусть

$$F(x) = \int_x^{\eta_*} f_1(x) dx \quad (30)$$

Тогда в силу предположений относительно функции  $f_1(x)$  имеем  $F(0) > 0$  и  $F(x_*) \leq 0$ , т. е. кривая (28) пересечет ось  $x$ , помимо точки  $x = \eta_*$ , в некоторой точке  $x = \xi$  на отрезке  $(0, x_*]$ . Аналогично устанавливается, что кривая (29) пересекает ось  $x$ , помимо точки  $x = x_*$ , в некоторой точке  $x = \zeta$  отрезка  $[\eta_*, \eta_0]$ . Рассмотрим область  $D$ , ограниченную кривыми (28) и (29) и отрезками  $[\eta_*, \zeta]$  и  $[\xi, x_*]$ .

Легко показать, что кривые (28) и (29) являются бесконтактными кривыми, пересекаемыми траекториями системы (4) внутрь области  $D$  с увеличением  $t$ . Отрезки  $[\eta_*, \zeta]$  и  $[\xi, x_*]$  в силу структуры поля направлений системы (4) также пересечены траекториями системы, входящими с ростом  $t$  в построенную область  $D$ . Наконец, из условий нашей теоремы следует, что неустойчивый отрезок  $[\eta_0, 0]$  заключен внутри области  $D$ .

Из приведенных рассуждений следует, что для области  $D$  удовлетворяются условия леммы 1, т. е. система (4) действительно при выполнении условий нашей теоремы имеет хотя бы один устойчивый предельный цикл.

*Следствие.* Если неравенства

$$\int_{\eta_2}^{x_1} f_2(x) dx \leq 0, \quad \int_{\eta_2}^{x_1} f_1(x) dx \geq 0 \quad (31)$$

выполняются одновременно, то система (4) имеет по крайней мере один устойчивый предельный цикл.

Справедливость сформулированного предложения следует из доказанной выше теоремы 5 при  $x_* = x_1$  и  $\eta_* = \eta_2$ .

Заметим, однако, что следствие теоремы 5 легко доказывается самостоятельно проверкой выполнения неравенств (20.3) теоремы 1.

В заключение отметим, что оценки сепаратрис, определяемые леммой 2, без особого труда могут быть уточнены. Достаточные условия существования предельного цикла системы (4), сформулированные в теоремах 2—5, тем самым могут быть усилены, правда, за счет их некоторого усложнения.

Поступила 6 IV 1959

Уральский политехнический институт

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Табуева В. А. К вопросу о форме области притяжения нулевого решения дифференциального уравнения  $x'' = f(x, x')$ . Известия ВУЗ, Математика, № 4(5), 1958.
2. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, М.—Л., 1949.