Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ (И ДРУГИМИ) КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н. П. Еругин

(Минск)

В статье развиваются асимптотический метод нахождения характеристических чисел некоторых систем линейных однородных дифференциальных уравнений и способы нахождения показательной матрицы. Указывается радиус сходимости рядов, представляющих инварианты показательной матрицы.

§ 1. Дана матрица n-го порядка

$$\mathrm{V}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathrm{V}_k \tag{1.1}$$

где λ — численная переменная, матрицы V_k от λ не зависят и ряд (1.1) сходится в области

$$|\lambda| < r \tag{1.2}$$

Предположим

$$\mathrm{W} = \ln \mathrm{V}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathrm{W}_k \tag{1.3}$$

и ряд (1.3) сходится в области $|\lambda| \leqslant r_1 < r$.

Теорема 1. Если характеристические числа матрицы $\mathrm{V}(\lambda)$ не обращаются в нуль в области (1.2), то инварианты матрицы W представимы в виде рядов по целым степеням λ, сходящихся в области (1.2).

Доказательство. Характеристические числа $v_1(\lambda), \ldots, v_n(\lambda)$ матрицы $\mathrm{V}(\lambda)$ определяются из уравнения

$$v^n + \overline{V}_1(\lambda) v^{n+1} + \cdots + \overline{V}_n(\lambda) = 0 \tag{1.4}$$

где $V_k(\lambda)$ $(k = 1, \ldots, n)$ — голоморфные от λ функции в области (1.2). Отсюда следует, что характеристические числа $v_k(\lambda)$ в области (1.2) имеют только алгебраические особые точки и при всяком λ_0 из области (1.2) представимы в виде рядов по целым степеням $(\lambda - \lambda_0)$ или $(\lambda - \lambda_0)^{1/k}$, где k — целое положительное, причем $k < n$. Характеристические числа $w_1, \ldots, w_n$ матрицы W равны [1] $\ln v_1(\lambda), \ldots, \ln v_n(\lambda)$ (мы считаем их главными значениями [2]).

Инварианты σ_k матрицы W представляют собой симметрические полиномы от $\ln v_1, \ldots, \ln v_n$ степени k $\sigma_k(\lambda) = \sigma_k(\ln v_1, \ldots, \ln v_n)$.

Алгебраические особые точки λ_0 функций $v_1, \ldots, v_n$ не будут особыми точками $\sigma_k(\lambda)$, так как в окрестности точки λ_0 функции $\sigma_k(\lambda)$ — однозначные ввиду того, что они являются симметрическими функциями от $\ln v_1, \ldots, \ln v_n$ и $v_k(\lambda) \neq 0$ в области (1.2). Отсюда и следует утверждение теоремы.

Следствие[1]. Если ряд (1.1) — целый, то и инварианты матрицы W будут функциями, целыми от λ (при условии, что $v_n(\lambda) \neq 0$).

Эта теорема в сущности уже была доказана в работе [3] и упомянута в работе [4].

§ 2. Дана система линейных дифференциальных уравнений

$$dX / dt = XP(t) \tag{2.1}$$

где $P(t)$ — непрерывная в области $t \geqslant 0$ периодическая с периодом $\omega = 2\pi$ матрица n-го порядка, а X — интегральная матрица n-го порядка. Нормированная в точке $t = 0$ матрица $X(t)$ представима в виде

$$X(t) = e^{At} Z(t) \tag{2.2}$$

где A — постоянная относительно t матрица n-го порядка и матрица $Z(t)$ — периодическая с периодом $\omega = 2\pi$

$$Z(0) = I, \qquad 2\pi A = \ln X(2\pi) \tag{2.3}$$

Мы будем считать здесь $\ln X(2\pi)$ главным значением. Предположим, что среди характеристических чисел матрицы $X(2\pi)$ есть отрицательные [4]. Тогда $Z(t)$ будет иметь период 4π, если матрицу A обязательно желаем иметь вещественной. Но в этом последнем случае A не будет определяться [4] равенством (2.3).

§ 3. Дана линейная система дифференциальных уравнений

$$dX / dt = XP(t, \lambda) \tag{3.1}$$

где матрица n-го порядка

$$P(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \lambda^k \tag{3.2}$$

λ — численный параметр и матрицы $P_k(t)$ — непрерывные периодические с периодом 2π. Ряд (3.2) сходится в области $|\lambda| < r$.

Интегральная нормированная в точке $t = 0$ матрица $X(t, \lambda)$ представима по формуле (2.2):

$$X(t, \lambda) = e^{A(\lambda)t} Z(t, \lambda), \qquad Z(0, \lambda) = I \tag{3.3}$$

$$X(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t) \lambda^k \tag{3.4}$$

Здесь ряд (3.4) сходится в области $|\lambda| < r$. При $\lambda \to 0$ будем иметь $X(t, \lambda) \to X_0(t)$, где

$$\frac{dX_0(t)}{dt} = X_0(t) P_0(t) \tag{3.5}$$

Согласно формуле (2.2)

$$X_0(t) = e^{A_0 t} Z_0(t) \tag{3.6}$$

Пусть характеристические числа матрицы $X_0(2\pi)$ суть $x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ$, а характеристические чи ла матрицы $2\pi A_0$ суть главные значения $\ln x_1^\circ, \ldots, \ln x_n^\circ$, причем среди $x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ$ нет отрицательных.

---

[1] Очевидно теорема и следствие справедливы для всякой функции $Y = f(V(\lambda))$, где $f(z)$ аналитическая и в области (1.2) характеристические числа матрицы $V(\lambda)$ не принимают особых значений функции $f(z)$.

При $x_i^\circ = x_k^\circ$ будет и $\ln x_i^\circ = \ln x_k^\circ$, а матрица $2\pi A_0 = \ln X_0(2\pi)$ будет вещественной [4]. Тогда [4]

$$\ln X(2\pi, \lambda) = 2\pi A(\lambda) \to 2\pi A_0 \quad \text{при } \lambda \to 0$$

и таким образом[1]

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \ln X(2\pi, \lambda) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda^k \tag{3.7}$$

Здесь ряд (3.7) сходится в области $|\lambda| < r_1 < r$, но инварианты матрицы $A(r)$ голоморфны в области $|\lambda| < r$ согласно теореме 1. При этом $Z(t + 2\pi, \lambda) = Z(t, \lambda)$, а

$$Z(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(t) \lambda^k \tag{3.8}$$

Если среди $x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ$ есть отрицательные, то мы имеем

$$2\pi A_0 = A_1^\circ + \pi i A_2^\circ = \ln X_0(2\pi)$$

где A_2° — матрица, коммутирующая с A_1°, имеющая диагональную каноническую форму с характеристическими числами, равными нулю, если они стоят на тех местах, которые соответствуют неотрицательным характеристическим числам x_i° и единице, если они стоят на местах, соответствующих отрицательным x_i°. Матрица A_1° — вещественная. В этом случае можно написать [4]

$$X_0(t) = \exp\left[\frac{1}{2\pi} \ln X_0(2\pi)\right] Z_0(t) = \exp\left[\frac{1}{2\pi} A_1^\circ t\right] Z_1(t)$$

$$Z_1(t) = \exp\left[\frac{i}{2} A_2^\circ t\right] Z_0(t) \tag{3.9}$$

Матрица $Z_1(t)$, таким образом, будет иметь период 4π. Здесь

$$X(4\pi, \lambda) \to X_0(4\pi, 0) \quad \text{при } \lambda \to 0$$

$$\frac{1}{4\pi} \ln X(4\pi, \lambda) \to \frac{1}{4\pi} \ln X_0(4\pi, 0) = \frac{1}{2\pi} A_1^\circ \quad \text{при } \lambda \to 0$$

Выражение $\frac{1}{4\pi} \ln X(t, \lambda)$ представимо в виде

$$\frac{1}{4\pi} \ln X(t, \lambda) = \frac{1}{2\pi} A_1^\circ + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda^k = A(\lambda)$$

Во всех случаях, когда в формуле (3.3) матрица $A(\lambda)$ представима в виде ряда по степеням λ, и матрица $Z(t, \lambda)$ будет представима в виде такого же ряда, что видно из (3.3), причем свободным членом такого ряда будет $Z_0(t)$ или $Z_1(t)$ (из (3.9)).

Частным случаем системы (3.1) будет тот, когда $P_0(t) = P_0$ — постоянная матрица.

Из предыдущего следует, что если характеристические числа p_l° матрицы P_0 таковы, что $p_l^\circ - p_k^\circ \neq im$ (m — целое), то в формуле (3.6) следует взять

$$A_0 = P_0, \qquad Z_0(t) = I$$

Пусть теперь некоторые из p_l° имеют вид

$$p_l^\circ = \mu_l^\circ + \frac{1}{2} m_l i, \qquad |\mathrm{Im}(\mu_l - \mu_k)| < \frac{1}{2} \qquad (m \text{ — целое})$$

---

[1] Заметим, что в работе [5] речь идет даже о разложении канонической формы $A(\lambda)$; в работе [6] леммы 1.1, 1.2, теорема 2.2 и формула для $Y^n(\tau, \varepsilon)$ (стр. 30) повторяют известные результаты.

Тогда можно написать

$$2\pi \mathrm{P}_0 = \overline{\mathrm{A}}_1 + \pi i \overline{\mathrm{A}}_2, \qquad \overline{\mathrm{A}}_1\overline{\mathrm{A}}_2 = \overline{\mathrm{A}}_2\overline{\mathrm{A}}_1, \qquad |\operatorname{Im}(\overline{a}_{1l} - \overline{a}_{1k})| < \pi$$

и характеристические числа матрицы A_2, имеющей диагональную каноническую форму, будут нули и целые числа, $\overline{a}_{1k} - x - r$ матрицы $\overline{\mathrm{A}}_1$.

Можно написать

$$\mathrm{X}_0(t) = e^{\mathrm{P}_0 t} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\overline{\mathrm{A}}_1 t\right)\exp\left(\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A}}_2 it\right) \tag{3.10}$$

и положить в (3.6)

$$\mathrm{A}_0 = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathrm{A}}_1, \quad \mathrm{Z}_0(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A}}_2 it\right)$$

Теперь будем иметь

$$\mathrm{X}(2\pi, \lambda) \to \mathrm{X}_0(2\pi, 0), \qquad \frac{1}{2\pi}\ln \mathrm{X}(2\pi, \lambda) \to \mathrm{A}_0 = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathrm{A}}_1$$

$$Z(t, \lambda) \to z_0(t) = \exp\left(\frac{1}{2}A_2 it\right)$$

при $\lambda \to 0$ и (3.7), (3.8) имеют место, если m_l четные.

Если среди характеристических чисел $p_l{}^\circ = p_l{}^\circ + \frac{m}{2}i$ матрицы P_0 имеются такие, что m равны нечетным числам, то $Z_0(t) = \exp {}^1/_2\overline{A}_2 it$ будет иметь период 4π. Тогда и $Z(t, \lambda)$ будет иметь период 4π. Мы будем, таким образом, иметь (3.3), где

$$\mathrm{A}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathrm{A}}_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{A}_k\lambda^k, \qquad \mathrm{Z}(t, \lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A}}_2 it\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Z}_k(t)\lambda^k$$

Метод определения коэффициентов разложений (3.8) дан[1] в работе [4].

Можно поступить несколько иначе [5]. А именно, в системе (3.1) (предполагая $\mathrm{P}_0(t) = \mathrm{P}_0$ постоянной матрицей) сделать замену интегральной матрицы X через матрицу Y при помощи[2] равенства

$$\mathrm{X} = \mathrm{Y}\exp\left(\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A}}_2 it\right) \tag{3.11}$$

Подставляя это в (3.2), получим уравнение для определения Y

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dt} = \mathrm{Y}\left[\mathrm{P}_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}_k(t)\lambda^k - \frac{i}{2}\overline{\mathrm{A}}_2\right] = \mathrm{Y}\left[\frac{1}{2\pi}\overline{\mathrm{A}}_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}_k(t)\lambda^k\right]$$

Теперь найдем

$$\mathrm{Y} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\overline{\mathrm{A}}_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{A}_k\lambda^k\right)t\left(\mathrm{I} + \sum_{k=1}^{\infty}\overline{\mathrm{Y}}_k(t)\lambda^k\right)$$

и, следовательно,

$$\mathrm{X} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\overline{\mathrm{A}}_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{A}_k\lambda^k\right)t\left(\exp\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A}}_2 it + \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Y}_k(t)\lambda^k\right)$$

Другими словами, операция замены переменной (3.11) в случае постоянной матрицы P_0 эквивалентна предыдущим операциям, где полагалось

$$\mathrm{A}_0 = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathrm{A}}_1, \qquad \mathrm{Z}_0 = \exp\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A}}_2 it$$

---

[1] Этот метод сформулирован в работе [3].

[2] См. работу [3] стр. 10.

Следует, однако, отметить, что в случае системы (3.1) (все равно, $P_0(t)$ постоянное или нет) метод нахождения коэффициентов разложений (3.7) и (3.8) очень громоздок. В следующих параграфах мы для частных случаев предложим другой метод.

§ 4. Рассмотрим такую систему (3.1), в которой $P_0(t)$, $P_1(t),\dots,P_m(t)$ — постоянные матрицы. Предположим еще, что матрица P_0 не имеет[1] таких характеристических чисел p_k, p_l, что $p_k - p_l = mi$ (m — целое).

Будем искать решение системы (3.1) в виде (3.3), где $A(\lambda)$ и $Z(t,\lambda)$ имеют соответственно формы (3.7) и (3.8), причем $A_0 = P_0$ и $Z_0 = 1$.

Для определения Z_k и A_k имеем уравнение

$$\frac{dZ_k}{dt} = \sum_{l=0}^{k} Z_{k-l}P_l - \sum_{l=0}^{k} A_{k-l}Z_l \tag{4.1}$$

Мы должны искать $Z_k(t)$ периодические и $Z_k(0) = 0$. Из (4.1) видно:

$$Z_k = 0, \qquad A_k = P_k \qquad (k = 1, \dots, m)$$

Таким образом, имеем

$$A(\lambda) = P_0 + P_1\lambda + \cdots + P_m\lambda^m + A_{m+1}\lambda^{m+1} + \cdots \tag{4.2}$$

$$Z(t,\lambda) = I + \sum_{k=m+1}^{\infty} Z_k(t)\lambda^k \tag{4.3}$$

Приближенно можно положить

$$A(\lambda) \sim P_0 + P_1\lambda + \cdots + P_m\lambda^m \tag{4.4}$$

При нахождении характеристических чисел матрицы $A(\lambda)$ равенством (4.4) можно пользоваться в области $|\lambda| < r$ сходимости ряда (3.2) на основании теоремы 1.

Можно поступить и так. Записывая систему (3.1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = x[P(\lambda) + P_1(t,\lambda)] \tag{4.5}$$

где

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} P_k\lambda^k, \qquad P_1(t,\lambda) = \sum_{k=m+1}^{\infty} P_k(t)\lambda^k$$

рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{dx}{dt} = X[P(\lambda) + P_1(t,\lambda)]\varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ — параметр}) \tag{4.6}$$

Теперь будем искать решение системы (4.6) в виде

$$X = \exp A(\varepsilon)t \cdot Z(t,\varepsilon) \tag{4.7}$$

где

$$A(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\varepsilon^k, \qquad Z(t,\varepsilon) = I + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(t)\varepsilon^k \tag{4.8}$$

В таком виде решение всегда существует [3, 4] при достаточно малом ε.

Для определения Z_k и A_k имеем уравнение

$$\frac{dZ_k}{dt} = Z_{k-1}[P(\lambda) + P_1(t,\lambda)] - A_k - \sum_{l=1}^{k-1} A_l Z_{k-l} \tag{4.9}$$

$$\frac{dZ_1}{dt} = P(\lambda) + P_1(t,\lambda) - A_1 \tag{4.10}$$

[1] К такому случаю всегда можно свести, как мы только что видели.

Отсюда

$$A_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_1(t,\lambda)\,dt + P(\lambda), \qquad Z_1 = \int_0^t P_1(t,\lambda)\,dt - \frac{1}{2\pi}t\int_0^{2\pi} P_1(t,\lambda)\,dt \tag{4.11}$$

При нахождении характеристических чисел матрицы $A(\varepsilon)$ можем положить $\varepsilon = 1$, так как иварианты матрицы $A(\varepsilon)$ согласно теореме 1 — функции, целые от ε. А, кроме того, из (4.9) и (4.11) видим, что $Z_1(t)$, $Z_2(t), \ldots$, а также $A_2, A_3, \ldots$ — малые порядка $m+1$ относительно λ.

Поэтому с точностью до величин порядка $m+1$ характеристические числа матрицы $A(1)$ системы дифференциальных уравнений (3.1) в рассматриваемом случае ($P_0, P_1, \ldots, P_m = \mathrm{const}$) можно искать, полагая

$$A = P(\lambda) \tag{4.12}$$

Мы пришли к предыдущему результату, однако здесь можно считать $P_1(t,\lambda)$ только малой порядка $m+1$, не предполагая аналитичности относительно λ.

§ 5. Рассмотрим снова систему (3.1), предполагая $P_0(t) = P_0$ матрицей постоянной и обладающей свойством $p_k - p_l \neq mi$. Решение $X(t)$ можно в этом случае представить в виде (3.3), где $A(\lambda)$ и $Z(t,\lambda)$ представимы рядами (3.7) и (3.8). Однако это решение можно представить и несколько иначе. Применим метод укороченного преобразования Крылова—Боголюбова [7], который был использован И. З. Штокало [8], а также под его влиянием автором [9]. Сначала получим

$$X = \zeta\Big[I + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^k Z_k(t)\Big], \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \zeta\Big[\sum_{k=0}^{m} A_k\lambda^k + \lambda^{m+1}R_m(\lambda, t)\Big] \tag{5.1}$$

а затем согласно § 4

$$\zeta = \exp\Big(\sum_{k=0}^{\infty} A_k\lambda^k t\Big)Z(t,\lambda), \qquad Z(t,\lambda) = I + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(t)\lambda^k \tag{5.2}$$

где $A_0 = P_0$, а A_k, Z_k $(k = 1, \ldots, m)$ определяются из уравнений (4.1). Таким образом

$$X = \exp\Big(\sum_{k=0}^{\infty} A_k\lambda^k t\Big)\Big[I + \sum_{k=m+1}^{\infty} Z_k(t)\lambda^k\Big]\Big[I + \sum_{k=1}^{m} Z_k(t)\Big] \tag{5.3}$$

Если условие $p_k - p_l \neq mi$ не выполнено, то, как показано в работе И. З. Штокало [8], характеристические числа матрицы A_0 во втором уравнении (5.1) уже будут удовлетворять такому условию, а в первом вместо матрицы I будет стоять $B\exp Vit$, где B — постоянная матрица и V — диагональная матрица, элементы которой будут целыми числами.

В работе И. З. Штокало [8] рассматривалась система вида

$$\frac{dX}{dt} = X[A + \varepsilon f(t)] \qquad \Big(F(t) = \sum_{\mu} C_\mu e^{i\mu t}\Big)$$

где $F(t)$ — конечная сумма. Но, очевидно, в методе ничего не изменится, если рассматривать систему вида

$$\frac{dx}{dt} = XP(t,\varepsilon) \qquad \Big(P(t,\varepsilon) = A + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t)\varepsilon^k\Big) \tag{5.4}$$

где $P_k(t)$ $(k = 1, \ldots, m)$ — матрицы вида $F(t)$ или периодические.

Надо только привести к случаю $a_k - a_l \neq mi$ (где a_k — характеристические числа матрицы A и m — целое) и находить A_k, Z_k, как указано в § 8 работы [4], или как в [8].

Можно $P_k(t)$ предполагать равномерно почти-периодическими функциями [10] с показателями[1] $\Delta_l^{(k)} \to \infty$ при $l \to \infty$, а также некоторыми другими. Нахождение матриц A_k и Z_k $(k = 1, \ldots, m)$ во многих случаях возможно (см. например [3]). Но в этих случаях вопрос об устойчивости решений надо исследовать именно методом И. З. Штокало, — построением функции Ляпунова [11], так как теорема 1 не имеет места и, следовательно, невозможно считать[2] приближенными значениями показателей характеристических чисел матрицы

$$\sum_{k=0}^{m} A_k \lambda^k$$

Если $P_0(t)$ не есть постоянная матрица, то мы также можем воспользоваться укороченным преобразованием

$$X = \zeta\left[Z_0(t) + \sum_{k=1}^{m} Z_k(t)\lambda^k\right], \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \zeta\left[\sum_{k=0}^{m} A_k\lambda^k + \lambda^{m+1}R_m(\lambda, t)\right] \quad (5.5)$$

где $Z_0(t)$, A_0 определяются равенствами (3.5) и (3.6), а A_k, $Z_k(t)$ $(k = 1, \ldots, m)$ находим из уравнений (4.1):

$$\frac{dZ_k}{dt} = Z_kP_0 - A_0Z_k + \sum_{l=2}^{k} Z_{k-l}P_k - \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l}Z_l \quad (5.6)$$

подчиняя $Z_k(t)$ условию периодичности и $Z_k(0) = 0$.

В § 8 работы [2] указаны формулы, позволяющие находить [(8.45), (8.46)] $Z_k(t)$ и A_k. После этого ζ из (5.5) можно искать так, как указано в § 4 настоящей статьи (если $R_m(\lambda, t)$ — матрица периодическая). Если характеристические числа A_0 в (3.6) чисто мнимые и простые, то можно поступить иначе. Пусть $X_0(t)$ есть решение уравнения (3.5). Заменяя

$$X = YX_0 \quad (5.7)$$

получим

$$\frac{dY}{dt} = Y\,[X_0PX_0^{-1} - X_0P_0X_0^{-1}] = Y\,[X_0P_1(t, \lambda)\,X_0^{-1}] \quad (5.8)$$

где

$$P_1(t, \lambda) = P - P_0 = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t)\,\lambda^k$$

Подставляя в (5.8) выражения X_0 из (3.6), найдем

$$\frac{dY}{dt} = Y\,[e^{A_0t}Z_0(t)\,P_1(t, \lambda)\,Z_0^{-1}(t)\,e^{-A_0t}] = YQ\,(t, \lambda) \quad (5.9)$$

---

[1] Совокупность показателей $\{\Delta_l^{(k)}\}_{l=1}^{\infty}$ матриц $P_k(t)$ предполагаем, простоты ради, не зависящей от k.

[2] Если мы не имеем дела с такой системой, для которой имеет место устойчивость характеристических чисел (см. работы Б. Ф. Былова, И. Г. Малкина, Р. Э. Виноградова, Ю. С. Богданова по этому вопросу).

Здесь матрица коэффициентов $Q(t, \lambda)$ имеет вид

$$Q(t, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) \lambda^k \tag{5.10}$$

где элементы матриц $Q_k(t)$ будут периодическими, если матрица $\exp A_0 t$ периодическая и такого же периода, как и $P_k(t)$, или вида $p(t) e^{\alpha i t}$ с периодической функцией $p(t)$ и вещественным α, если элементарные делители матрицы A_0 простые. Следовательно, к системе (5.9) можно применить метод И. З. Штокало [8]. При этом для определения матриц A_k получим уравнения (4.10), где нужно положить $P_0 = A_0 = 0$. Поэтому матрицы Z_k и A_k будут легко определяться (именно потому, что $A_0 = 0$, $P_0 = 0$) [см. (5.6)] на основании требования ограниченности $Z_k(t)$ (так как функция $p(t) e^{i\alpha t}$ имеет среднее значение [10]) или периодичности $Z_k(t)$, если $Q_k(t)$ — периодические. Если в (5.10) матрицы $Q_k(t)$ будут периодическими, то можно считать приближенными значениями показателей матрицы Y характеристические числа матрицы

$$A_1\lambda + A_2\lambda^2 + \ldots + A_m\lambda^m$$

В заключение отметим, что если матрицы $P_k(t)$ — периодические с одним периодом 2π, то вообще можно матрицу (3.7) находить на основании (3.4) непосредственно [минуя нахождение $Z_k(t)$] по формуле

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \ln X(2\pi, \lambda)$$

беря здесь всегда главное значение логарифма и пользуясь формулами (1.31), (1.32) из [2] или более общей (для матриц n порядка) соответствующей формулой работы [12]. Это избавит нас от рассмотрения частных случаев регулярных или нерегулярных значений $\ln X_0(2\pi)$.

Поступила 10 VI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Ф. Теория матриц. ГИТТЛ, 1953.
2. Лаппо-Данилевский И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, ГИТТЛ, 1957.
3. Еругин Н. П. Приводимые системы. Труды физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова, XIII, 1946.
4. Еругин Н. П. Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений. Изд. Ленинград. ун-та, 1956.
5. Hukuhara M. Sur les équations différentielles linéaires á coefficients périodiques et contenant un paramétre. Toke gau aky pyraky y kul. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, sec. 1, 7, No 1, 69—85, 1954.
6. Якубович В. А. ПММ, т. XXIII, вып. 1, 1959.
7. Боголюбов Н. Н., Крылов М. Теория возмущений в нелинейной механике. «Записки Ин-та строит. механики», АН УССР, 1942.
8. Штокало И. З. Критерии устойчивости и неустойчивости. Матем. сб., т. 19, № 2, 1946.
9. Еругин Н. П. Об асимптотической устойчивости решения некоторой системы дифференциальных уравнений.
10. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. ГИТТЛ, 1953.
11. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ОГИЗ, 1946.
12. Еругин Н. П. О показательной подстановке системы линейных дифференциальных уравнений (проблема Пуанкаре). Матем. сб., т. 3 (45): 3, 1938.