Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ ГИРОКОМПАСОВ

В. Н. Кошляков

(Москва)

Статья посвящена исследованию уравнений возмущенного движения двухроторных гирокомпасов, не обладающих свойствами пространственного гирокомпаса Геккелера — Аншютца.

Не останавливаясь подробно на свойствах пространственного гирокомпаса, отметим, что он обладает одинаковыми периодами собственных незатухающих колебаний чувствительного элемента относительно его трех главных осей инерции, близкими к периоду М. Шулера $T_0 = 2\pi\sqrt{R/g}$ (R — радиус Земли, g — ускорение силы тяжести).

Указанное свойство достигается соответствующим образом подобранной пружинной связью между гироскопами, налагающей вокруг вертикальных осей их кожухов момент N согласно закону

$$N = \lambda \sin 2\varepsilon \qquad (0.1)$$

где λ — некоторый коэффициент пропорциональности, 2ε — угол между осями собственного вращения гироскопов. Основы теории пространственного компаса при некоторых упрощающих предположениях приведены в работах И. Геккелера [1], Р. Граммеля [2], Б. В. Булгакова [3].

Уравнения, полученные в работе А. Ю. Ишлинского [4], можно применить для изучения гирокомпасов, не обладающих свойствами пространственного гирокомпаса, к каковым относятся, например, двухроторный компас Аншютца, а также некоторые отечественные двухроторные гирокомпасы.

В данной статье содержится, в основном, исследование устойчивости невозмущенного движения указанных гирокомпасов в предположении их установки на корабле, совершающем маневрирование в высоких широтах (70—80°).

В рассматриваемых ниже гирокомпасах условие (0.1) не выполняется.

При отклонении гироскопов относительно осей их камер на некоторый малый возмущенный угол δ от равновесного невозмущенного положения, характеризуемого углом $\varepsilon = \varepsilon_0$, пружинная связь между гироскопами создает восстанавливающий момент согласно закону

$$M = s\delta \qquad (0.2)$$

где s — крутизна характеристики восстанавливающего момента, зависящая от жесткости пружинной связи.

1. Допустим, что для невозмущенного движения в гирокомпасе осуществляется условие

$$\cos\varepsilon_0 = \frac{Pl}{2Bg}V \qquad \left(V = \sqrt{(Ru\cos\varphi + v_E)^2 + v_N^2}\right) \qquad (1.1)$$

где B — собственный кинетический момент ротора гироскопа, Pl — маятниковый момент гирокомпаса, V — абсолютная скорость точки подвеса гиросферы, u — угловая скорость вращения Земли, φ — широта места, v_N, v_E — соответственно северная и восточная составляющие собственной скорости корабля.

Дифференциальные уравнения возмущенного движения рассматриваемого гирокомпаса, установленного на маневрирующем корабле, получим из уравнений работы [4]. Полагая, что выполняются условия (0.2) и (1.1), имеем

$$\begin{aligned} &\frac{Pl}{g}\frac{d}{dt}(V\alpha) - Pl\,\beta - 2\,B\sin\varepsilon_0\,\Omega\delta = 0, \qquad && \beta^{\cdot} + \frac{V\alpha}{R} - \Omega\gamma = 0 \\ &\frac{d}{dt}(2B\sin\varepsilon_0\,\delta) - Pl\,\gamma + \frac{Pl}{g}\,\Omega V\alpha = 0, && \gamma^{\cdot} + \frac{s}{2B\sin\varepsilon_0}\,\delta + \Omega\beta = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь α — отклонение гиросферы в азимуте, β — угол возвышения северного конца гиросферы над плоскостью, касательной к земной сфере, γ — угол поворота гиросферы относительно линии Север — Юг.

Уравнения (1.2), как и в работе [4], отнесены к правому координатному трехграннику Дарбу $x^\circ y^\circ z^\circ$, ось x° которого направлена вдоль вектора абсолютной скорости V точки подвеса по касательной к поверхности Земли, принимаемой за сферу радиуса R, ось z° — по нормали к земной сфере.

Угловая скорость Ω вращения трехгранника относительно оси z° выражается формулой

$$\Omega = u\sin\varphi + \frac{v_E}{R}\operatorname{tg}\varphi + \alpha^{*\cdot} \qquad \left(\alpha^* = \frac{v_N}{Ru\cos\varphi + v_E}\right) \tag{1.3}$$

где α^* — скоростная девиация гирокомпаса.

2. Предположим, что корабль совершает маневрирование на данной фиксированной широте φ. Введем новые переменные x_1 и x_4 посредством соотношений

$$\alpha = \frac{Ru\cos\varphi}{V}\,x_1, \qquad \delta = \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon_0}\,x_4. \tag{2.1}$$

Обозначим также β и γ соответственно через x_2 и x_3. Положим, кроме того, что параметры гирокомпаса выбраны такими, что выполняется условие

$$2Bg = PlRu \tag{2.2}$$

Тогда систему (1.2) можно привести к виду

$$\begin{aligned} &x_1^{\cdot} - \frac{\nu^2}{u\cos\varphi}x_2 - \Omega(t)\operatorname{tg}\varphi x_4 = 0, \quad && x_3^{\cdot} + \frac{p^2(t)}{\nu^2}u\sin\varphi x_4 + \Omega(t)\,x_2 = 0 \\ &x_2^{\cdot} + u\cos\varphi\,x_1 - \Omega(t)\,x_3 = 0, && x_4^{\cdot} - \frac{\nu^2}{u\sin\varphi}x_3 + \Omega(t)\operatorname{tg}\varphi x_1 = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

где

$$\nu = \sqrt{\frac{g}{R}}, \qquad p(t) = \frac{\sqrt{Pls}}{2B\sin\varepsilon_0(t)} \tag{2.4}$$

Из системы (2.3) можно получить уравнения движения гирокомпаса, рассмотренные в работах [1,2,3].

Для этого следует пренебречь слагаемыми, содержащими в качестве множителя угловую скорость Ω, а также считать величину p постоянной. При этих условиях система распадается на две независимые системы уравнений относительно переменных x_1, x_2 и x_3, x_4, определяющих гармонические незатухающие колебания компаса с круговыми частотами ν и p соответственно.

Между тем, слагаемые в системе (2.3), содержащие величину Ω, в предположении работы компаса в высоких широтах становятся соизмеримыми с остальными членами указанной системы и могут существенным образом влиять на свойства ее решений. В этом можно убедиться, рассмотрев простой случай, соответствующий постоянным Ω и p.

При этих условиях характеристическое уравнение, построенное в силу системы (2.3), приводится к виду

$$\lambda^4 + b\lambda^2 + c = 0, \quad (b = p^2 + \nu^2 + 2\Omega^2, \; c = (\Omega^2 - p^2)(\Omega^2 - \nu^2)) \tag{2.5}$$

Для того чтобы корни уравнения (2.5) были бы чисто мнимыми, необходимо и достаточно выполнения условий

$$b > 0, \qquad c > 0, \qquad b^2 - 4c > 0 \tag{2.6}$$

Первое и третье из этих условий, как легко проверить, выполняются, второе же влечет за собой выполнение неравенств

$$\text{либо} \quad \Omega^2 - p^2 > 0, \; \Omega^2 - \nu^2 > 0, \qquad \text{либо} \quad \Omega^2 - p^2 < 0, \; \Omega^2 - \nu^2 < 0 \tag{2.7}$$

Если же, например, $\nu^2 < \Omega^2 < p^2$, то в силу (2.5) окажется, что $c < 0$, и решения системы (2.3) в этом случае будут неограниченно возрастать.

3. Обратимся к случаю последовательных циркуляций корабля с постоянной скоростью v на данной широте φ, начинающихся, например, с восточного курса. Тогда

$$v_N = v \sin \omega t, \qquad v_E = v \cos \omega t \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right) \tag{3.1}$$

где ω — круговая частота циркуляции, T — период циркуляции.

В силу формул (1.1), (1.3) и (2.2) имеем

$$\sin^2 \varepsilon_0 = \left[1 - 2\frac{v_E \cos\varphi}{Ru \sin^2\varphi} - \left(\frac{v}{Ru \sin\varphi}\right)^2\right] \sin^2\varphi \tag{3.2}$$

$$\Omega = \frac{\dot{v}_N}{Ru \cos\varphi + v_E} + U \sin\varphi + \frac{v_E}{R} \operatorname{tg}\varphi - \frac{\dot{v}_E v_N}{(Ru\cos\varphi + v_E)^2} \tag{3.3}$$

Используя выражения (3.1), получаем

$$\sin^2 \varepsilon_0 = \left[1 - 2\frac{v \cos\varphi}{Ru \sin^2\varphi} \cos\omega t - \left(\frac{v}{Ru \sin\varphi}\right)^2\right] \sin^2\varphi \tag{3.4}$$

$$\Omega = \frac{v\,\omega \cos \omega t}{Ru \cos\varphi + v \cos \omega t} + u \sin\varphi + \frac{v \operatorname{tg}\varphi}{R} \cos\omega t + \frac{v^2 \omega \sin^2 \omega t}{(Ru\cos\varphi + v\cos\omega t)^2} \tag{3.5}$$

При этих условиях переменные коэффициенты системы (2.3) будут периодическими функциями периода T. Будем и следовать устойчивость по Ляпунову тривиального решения системы (2.3).

Пусть $\|x_{jk}(t)\|$ — фундаментальная матрица решений системы (2.3), отвечающая начальным условиям

$$x_{jk}(0) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}, \tag{3.6}$$

где j означает номер функции в каком-либо решении, k — номер решения [7].

В рассматриваемом случае характеристичное уравнение системы (2.3) будет возвратным. Чтобы убедиться в этом, можно применить рассуждения, приведенные Ляпуновым по отношению к исследуемой им системе дифференциальных уравнений в задаче о трех телах [5].

Представим систему (2.3) в виде двух уравнений относительно x_1 и x_4. Имеем

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot\cdot} + (\nu^2 - \Omega^2)\,x_1 &= 2\Omega \operatorname{tg}\varphi\, x_4^{\cdot} + \Omega^{\cdot} \operatorname{tg}\varphi x_4 \\ x_4^{\cdot\cdot} + (p^2 - \Omega^2)\,x_4 &= -2\Omega \operatorname{ctg}\varphi x_1^{\cdot} - \Omega^{\cdot} \operatorname{ctg}\varphi x_1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

В силу формул (2.4), (3.4) и (3.5) функции p^2 и Ω будут четными и уравнения (3.7) не меняются при одновременной замене t на $-t$, x_4 на $-x_4$. Поэтому, если ρ—какой-либо из различных корней характеристичного уравнения, то наряду с частными решениями

$$x_1 = M(t)\,\rho^{t/T}, \qquad x_4 = N(t)\,\rho^{t/T}$$

где M и N — периодические функции t периода T, будут существовать частные решения

$$x_1 = M(-t)\,\rho^{-t/T}, \qquad x_4 = -N(-t)\,\rho^{-t/T}$$

Эти решения соответствуют корню $1/\rho$ того же характеристичного уравнения; следовательно, оно будет возвратным вида

$$\rho^4 + A_1\rho^3 + A_2\rho^2 + A_1\rho + 1 = 0$$

Области устойчивости (неасимптотической) определяются неравенствами, также указанными Ляпуновым (см. также [6]), имеющими форму

$$-2 < A_2 < 6, \qquad 4(A_2 - 2) < A_1^2 < \frac{1}{4}(A_2 + 2)^2 \tag{3.8}$$

Инварианты A_1 и A_2 могут быть вычислены по формулам

$$A_1 = -\sum_{j=1}^{4} x_{jj}(T), \qquad A_2 = \sum_{i=1}^{6} L_i(T) \tag{3.9}$$

где

$$\begin{aligned} L_1 &= \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}, & L_2 &= \begin{vmatrix} x_{11} & x_{13} \\ x_{31} & x_{33} \end{vmatrix}, & L_3 &= \begin{vmatrix} x_{11} & x_{14} \\ x_{41} & x_{44} \end{vmatrix} \\ L_4 &= \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}, & L_5 &= \begin{vmatrix} x_{22} & x_{24} \\ x_{42} & x_{44} \end{vmatrix}, & L_6 &= \begin{vmatrix} x_{33} & x_{34} \\ x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{3.10}$$

4. Для нахождения инвариантов A_1 и A_2 приведем систему (2.3) к эквивалентной ей системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода, к которой затем применим метод последовательных приближений.

Для построения последовательных приближений удобнее считать, что корабль совершает последовательные циркуляции, начинающиеся с северного курса. Тогда вместо (3.1) имеем $v_N = v\cos\omega t$, $v_E = -v\sin\omega t$, и равенства (3.2) и (3.3) принимают вид

$$\sin^2\varepsilon_0 = [1 + 2\mu \operatorname{ctg}^2\varphi \sin\omega t - (\mu \operatorname{ctg}\varphi)^2]\sin^2\varphi \tag{4.1}$$

$$\Omega = -\frac{\mu\omega\sin\omega t}{1 - \mu\sin\omega t} + u\sin\varphi - \mu u\sin\varphi\sin\omega t + \frac{\mu^2\omega\cos^2\omega t}{(1 - \mu\sin\omega t)^2}$$

Здесь (4.2)

$$\mu = \frac{v}{Ru\cos\varphi}$$

В этом случае функции $p^2(t)$ и $\Omega(t)$ не обладают свойством четности; однако, как увидим, характеристичное уравнение системы (2.3) и в этом случае будет возвратным.

Расчет произведем для скорости корабля на циркуляции, не превышающей $25 \div 30$ узлов ($12 \div 15$ м / сек), период циркуляции T примем равным 4 мин, $\varphi = 80°$.

При этих условиях безразмерный параметр μ, определяемый формулой (4.2), будет малой по сравнению с единицей величиной (порядка $0.15 \div 0.2$). Пользуясь в этом предположении разложением

$$\frac{1}{1+\mu \sin \omega t} = 1 + \mu \sin \omega t + \ldots$$

и учитывая, что $u \sin \varphi$ будет малой величиной порядка μ^2, получаем

$$\Omega = -\mu\omega \sin \omega t + O(\mu^2) \tag{4.3}$$

где символом $O(\mu^2)$ обозначена совокупность слагаемых, имеющих порядок μ^2 и выше. Равным образом, учитывая малую величину $\operatorname{ctg}^2 \varphi$ в широтах 70—80°, имеем

$$\sin^2 \varepsilon_0 = \sin^2 \varphi + O(\mu^2) \tag{4.4}$$

Ограничиваясь в выражениях (4.3) и (4.4) написанными членами, получаем систему (2.3) в виде (4.5)

$$x_1^{\cdot} - \frac{\nu^2}{u \cos \varphi} x_2 + \mu\omega \operatorname{tg} \varphi \sin \omega t\, x_4 = 0, \qquad x_2^{\cdot} + u \cos \varphi x_1 + \mu\omega \sin \omega t x_3 = 0$$

$$x_4^{\cdot} - \frac{\nu^2}{u \sin \varphi} x_3 - \mu\omega \operatorname{ctg} \varphi \sin \omega t\, x_1 = 0, \qquad x_3^{\cdot} + \frac{p^2}{\nu^2} u \sin \varphi x_4 - \mu\omega \sin \omega t\, x_2 = 0$$

Здесь в силу (4.4) принято $p = \sqrt{Pls} / 2B \sin \varphi$.

Разделим интервал $(0, T)$ на интервалы $(0, \pi / \omega)$ и $(\pi / \omega, 2\pi / \omega)$. Имеем

$$\sin \omega t = \begin{cases} \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2\omega t}{3} + \frac{\cos 4\omega t}{15} + \cdots\right) & \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{\omega}\right) \\ -\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2\omega t}{3} + \frac{\cos 4\omega t}{15} + \cdots\right) & \left(\frac{\pi}{\omega} \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{\omega}\right) \end{cases} \tag{4.6}$$

В интервале $0 \leqslant t \leqslant \pi / \omega$ в силу разложений (4.6) представим систему (4.5) в форме

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot} - \frac{\nu^2}{u \cos \varphi} x_2 + \Omega_0 \operatorname{tg} \varphi\, x_4 &= f(t) \operatorname{tg} \varphi x_4 \\ x_2^{\cdot} + u \cos \varphi x_1 + \Omega_0 x_3 &= f(t)\, x_3 \\ x_3^{\cdot} + \frac{p^2}{\nu^2} u \sin \varphi x_4 - \Omega_0 x_2 &= -f(t)\, x_2 \\ x_4^{\cdot} - \frac{\nu^2}{u \sin \varphi} x_3 - \Omega_0 \operatorname{ctg} \varphi x_1 &= -f(t) \operatorname{ctg} \varphi x_1 \end{aligned} \tag{4.7}$$

где

$$\Omega_0 = \frac{2}{\pi} \mu\omega, \qquad f(t) = \frac{4}{\pi} \mu\omega \left(\frac{\cos 2\omega t}{3} + \frac{\cos 4\omega t}{15} + \cdots\right) \tag{4.8}$$

Считая правые части системы (4.7) известными функциями времени и применяя метод вариаций произвольных постоянных, приведем ее к эквивалентной системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$x_j(t) = x_j^0(t) + \int_0^t K_{1,j}(t, \tau)\, x_1(\tau)\, d\tau + \int_0^t K_{2,j}(t, \tau)\, x_2(\tau)\, d\tau + $$

$$+ \int_0^t K_{3,j}(t, \tau)\, x_3(\tau)\, d\tau + \int_0^t K_{4,j}(t, \tau)\, x_4(\tau)\, d\tau \qquad (j=1, 2, 3, 4) \tag{4.9}$$

где функции $x_j^0(t)$ на указанном интервале являются решениями системы (4.7) без правых частей.

Характеристическое уравнение этой системы будет вида (2.5)

$$\lambda^4 + (p^2 + \nu^2 + 2\Omega_0^2)\lambda^2 + (\Omega_0^2 - p^2)(\Omega_0^2 - \nu^2) = 0 \tag{4.10}$$

Используя рассуждения п. 2, заключаем, что если величина Ω_0^2 заключена в пределах

$$\nu^2 < \Omega_0^2 < p^2 \tag{4.11}$$

то уравнение (4.10) будет иметь положительный корень.

Условие $\Omega_0 > \nu$ приводится к виду

$$v > \frac{\pi}{2}\frac{T}{T_0} Ru \cos\varphi \tag{4.12}$$

Полагая условие (4.11) выполняющимся, получим корни уравнения (4.10)

$$\lambda_1 = m, \qquad \lambda_2 = -m, \qquad \lambda_3 = qi, \qquad \lambda_4 = -qi \tag{4.13}$$

Применим к уравнениям (4.9) метод итераций, полагая в первом приближении $x_j(t) = x_j^0(t)$. В данном случае применение метода итераций имеет законное основание, поскольку ряд последовательных приближений для уравнений (4.9) будет сходящимся.

Ограничиваясь первым приближением, получаем решения на интервале $(0, \pi/\omega)$ вида

$$x_j = C_j \operatorname{ch} mt + D_j \operatorname{sh} mt + E_j \cos qt + G_j \sin qt \tag{4.14}$$

Здесь

$$C_1 = \frac{1}{m^2+q^2}\left[(m^2+p^2+\Omega_0^2)x_1(0) - 2\frac{\nu^2}{u\cos\varphi}\Omega_0 x_3(0)\right] \tag{4.15}$$

$$D_1 = \frac{1}{m(m^2+q^2)}\left[\frac{\nu^2}{u\cos\varphi}(m^2+p^2-\Omega_0^2)x_2(0) - \Omega_0(m^2+\Omega_0^2-p^2)\operatorname{tg}\varphi x_4(0)\right]$$

$$E_1 = -\frac{1}{m^2+q^2}\left[(p^2+\Omega_0^2-q^2)x_1(0) - 2\frac{\nu^2}{u\cos\varphi}\Omega_0 x_3(0)\right]$$

$$G_1 = -\frac{1}{q(m^2+q^2)}\left[\frac{\nu^2}{u\cos\varphi}(p^2-\Omega_0^2-q^2)x_2(0) - \Omega_0(\Omega_0^2-p^2-q^2)\operatorname{tg}\varphi\, x_4(0)\right]$$

$$C_2 = \frac{1}{m^2+q^2}\left[(m^2+p^2+\Omega_0^2)x_2(0) + \Omega_0\left(\frac{p^2}{\nu^2}+1\right)u\sin\varphi x_4(0)\right]$$

$$D_2 = \frac{1}{m(m^2+q^2)}\left[u\cos\varphi\left(\Omega_0^2\frac{p^2}{\nu^2} - m^2 - p^2\right)x_1(0) - \Omega_0(m^2+\Omega_0^2-\nu^2)x_3(0)\right]$$

$$E_2 = -\frac{1}{m^2+q^2}\left[(\Omega_0^2+p^2-q^2)x_2(0) + \Omega_0\left(\frac{p^2}{\nu^2}+1\right)u\sin\varphi x_4(0)\right]$$

$$G_2 = -\frac{1}{q(m^2+q^2)}\left[u\cos\varphi\left(\Omega_0^2\frac{p^2}{\nu^2}+q^2-p^2\right)x_1(0) - \Omega_0(\Omega_0^2-\nu^2-q^2)x_3(0)\right]$$

$$C_3 = \frac{1}{m^2+q^2}\left[-\frac{u\cos\varphi}{\nu^2}\Omega_0(p^2+\nu^2)x_1(0) + (m^2+\Omega_0^2+\nu^2)x_3(0)\right]$$

$$D_3 = \frac{1}{m(m^2+q^2)}\left[\Omega_0(m^2+\Omega_0^2-p^2)x_2(0) + \left(\Omega_0^2-p^2-\frac{p^2}{\nu^2}m^2\right)u\sin\varphi x_4(0)\right]$$

$$E_3 = \frac{1}{m^2+q^2}\left[\frac{u\cos\varphi}{\nu^2}\Omega_0(p^2+\nu^2)x_1(0) - (\Omega_0^2-\nu^2+q^2)x_3(0)\right]$$

$$G_3 = -\frac{1}{q(m^2+q^2)}\left[\Omega_0(\Omega_0^2-p^2-q^2)x_2(0)+\left(\Omega_0^2-p^2+\frac{p^2}{\nu^2}q^2\right)u\sin\varphi x_4(0)\right]$$

$$C_4 = \frac{1}{m^2+q^2}\left[2\Omega_0\frac{\nu^2}{u\sin\varphi}x_2(0)+(m^2+\Omega_0^2+\nu^2)x_4(0)\right]$$

$$D_4 = \frac{1}{m(m^2+q^2)}\left[-\Omega_0(\nu^2-m^2-\Omega_0^2)\operatorname{ctg}\varphi x_1(0)+\frac{\nu^2}{u\sin\varphi}(m^2-\Omega_0^2+\nu^2)x_3(0)\right]$$

$$E_4 = -\frac{1}{m^2+q^2}\left[2\Omega_0\frac{\nu^2}{u\sin\varphi}x_2(0)+(\Omega_0^2+\nu^2-q^2)x_4(0)\right]$$

$$G_4 = \frac{1}{q(m^2+q^2)}\left[\Omega_0(\nu^2+q^2-\Omega_0^2)\operatorname{ctg}\varphi x_1(0)-\frac{\nu^2}{u\sin\varphi}(\nu^2-\Omega_0^2-q^2)x_3(0)\right]$$

Имея формулы (4.15), нетрудно построить матрицу $\|x_{jk}(T)\|$, удовлетворяющую начальным условиям (3.6).

Задаваясь условиями (3.6), с помощью формул (4.14) и (4.15) строим решения x_{jk} на промежутке $(0, \pi/\omega)$, которые после надлежащего согласования начальных условий продолжаем на промежуток $(\pi/\omega, 2\pi/\omega)$.

Уравнение (4.10) не меняется при замене Ω_0 на $-\Omega_0$, поэтому на промежутке $(\pi/\omega, 2\pi/\omega)$ также будут иметь место решения вида (4.14), в которых коэффициенты C, D, E, G следует вычислять по формулам (4.15), изменив там знак у Ω_0 на обратный.

Пусть $\varphi = 80°$, $v = 30$ *узлов*, $T = 4$*мин*. Параметры компаса примем следующими:

$$Pl = 4550 \text{ гсм}, \qquad s = 200 \text{ гсм}, \qquad 2B = 21\cdot 10^4 \text{ гсмсек}.$$

Для этих данных оказывается, что

$$p^2 = 2.0300\cdot 10^{-5}\text{сек}^{-2}, \quad \Omega_0^2 = 1.02438\cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-2}$$

Так как $\nu^2 = g/R = 0.15376\cdot 10^{-5}$ сек^{-2}, то условие (4.11) удовлетворяется, и поэтому корни уравнения будут вида (4.13).

Для рассматриваемого случая вычисления дают для чисел m и q значения

$$m = 1.405799\cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}, \qquad q = 6.655935\cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$$

Для этих данных матрица $\|x_{js}(T)\|$, удовлетворяющая начальным условиям (3.6), имеет вид

$$\left\|\begin{array}{cccc} 0.932136 & 28.392466 & -1.123568 & -0.491128 \\ -0.00456165 & 0.932136 & -0.0909062 & -0.031682 \\ -0.00558646 & -0.0865987 & 0.492616 & -0.177823 \\ -0.0160291 & -0.198115 & 4.249876 & 0.492616 \end{array}\right\| \qquad (4.16)$$

Соответствующее ей характеристичное уравнение с точностью до трех значащих цифр после запятой будет

$$\rho^4 - 2.849\rho^3 + 3.805\rho^2 - 2.849\rho + 1.000 = 0. \qquad (4.17)$$

Уравнения (4.5) были также проинтегрированы на быстродействующей счетной машине «Стрела» для тех же условий, которым соответствует матрица (4.16); характеристичное уравнение при этом получилось вида

$$\rho^4 - 2.848\rho^3 + 3.809\rho^2 - 2.848\rho + 1.000 = 0 \qquad (4.18)$$

Сопоставляя уравнения (4.17) и (4.18), убеждаемся в их близком согласовании.

Для обоих случаев, как легко проверить, условия (3.8) удовлетворяются, и поэтому имеет место устойчивость по Ляпунову, несмотря на наличие гиперболических функций в выражениях (4.14).

5. Если же уравнения возмущенного движения рассматриваются лишь на конечном промежутке времени $(0, t^*)$ (например, на промежутке $0 < t < \pi / \omega$, что соответствует полуциркуляции), после окончания которого корабль выходит на прямой курс, то наличие положительного корня в уравнении (4.10) способствует увеличению на данном промежутке координат x_j, имеющих при $t = t_0$ начальные значения $x_j(0)$.

В случае продолжительного маневрирования корабля, состоящего из ряда поворотов и циркуляций, разделенных по времени промежутками, соответствующими движению корабля на прямом курсе с постоянной скоростью (в этом случае движение гирокомпаса описывается другой системой уравнений в сравнении с (4.5), отмеченное выше обстоятельство может привести при наличии ненулевых начальных условий к нежелательной «раскачке» гирокомпаса.

6. Обращаясь к уравнению (4.10) и формулам (2.4), допустим, что крутизна s характеристически восстанавливающего момента выбрана столь малой, что удается удовлетворить условию $p = \nu$.

В этом случае, как легко проверить, указанное уравнение не будет иметь положительных корней, а следовательно не будут иметь места и отмеченные выше раскачивающие тенденции.

Можно заметить, что при $p = \nu$ уравнения возмущенного движения (2.3) интегрируются в замкнутом виде и обладают свойствами уравнений возмущенного движения пространственного гирокомпаса Геккелера — Аншютца.

В этом можно убедиться, применив к построению решений системы (2.3) тот же способ, который использован в работе [4].

Поступила 2 VI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Geckeler I. W., Kreiselmechanik des Anschütz-Raumkompasses. Ingenieur-Archiv, VI, 4, Berlin
2. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применение, т. II, ИЛ, М., 1952.
3. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГИТТЛ, М., 1955.
4. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса, ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.
5. Ляпунов А. М. Об устойчивости движения в задаче о трех телах. Собр. соч. Изд. АН СССР, т. I, М., 1954.
6. Старжинский В. М. Об устойчивости тривиального решения линейных систем с периодическими коэффициентами, ППМ, т. XXII, вып. 5,1958.
7. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГТТЛ, М., 1946.