ЗАМЕЧАНИЯ К РАБОТЕ В. С. ГУБЕНКО «НЕКОТОРЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ДРОБНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ» (ПММ, 1957, 21, 2, 279—280)

Н. А. Ростовцев

(Тамбов)

В названной работе сделана попытка приведения простейшей смешанной осесимметрической задачи теории ньютонова потенциала для полупространства

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \qquad z\geqslant 0 \tag{1}$$

$$u\Big|_{z=0}=F(r), \qquad r<a, \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}=0, \qquad r>a \tag{2}$$

к некоторой задаче о логарифмическом потенциале для полуплоскости. Дифференцируя n раз по r^2 левую часть уравнения (1) и полагая затем формально $n=-{}^1/_2$, автор получает уравнение

$$\frac{\partial^2 u_{-1/2}}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u_{-1/2}}{\partial z^2}=0 \tag{2*}$$

Здесь и в дальнейшем формулы автора даются в его нумерации, но отмечаются звездочкой; u_n обозначает

$$c\left(\frac{\partial}{\partial (r^2)}\right)^n \qquad (c \text{ — некоторая постоянная, } c\neq 0)$$

Производные дробного порядка вводятся автором формально-эмпирически: в формуле n-кратной производной степенной функции числовой множитель представляется отношением гамма-функций, в аргументах которых целое n замещается в дальнейшем произвольным числом. Для функции, представленной степенным рядом, это дает возможность формально, почленным дифференцированием, получить ряд, представляющий производную любого нецелого порядка.

Однако в этом окольном пути нет необходимости.

Неформальное определение производной отрицательного порядка дается интегральным преобразованием [1]:

$$D^{-\nu}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-y)^{\nu-1}f(y)\,dy \qquad (\nu>0)$$

Это не требует аналитичности $f(x)$, а только интегрируемости (в смысле Римана—Стильтьеса). Нуль в нижнем пределе не обязателен и может быть заменен при необходимости любым иным числом. Производная положительного порядка $\mu>0$, $\mu=[\mu]+1-\nu$ определяется как $D^{[\mu]+1}\,D^{-\nu}$. Заменяя переменную дифференцирования на x^2, получаем

$$D_{(x^2)}{}^{-\nu}f(x)=\frac{2}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x^2-y^2)^{\nu-1}\,yf(y)\,dy \tag{3}$$

в частности,

$$D_{(x^2)}{}^{-1/2}f(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x (x^2-y^2)^{-1/2}\,yf(y)\,dy \tag{4}$$

$$D_{(x^2)}{}^{1/2}f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,x}\frac{d}{dx}\int_0^x (x^2-y^2)^{-1/2}\,yf(y)\,dy \tag{5}$$

С этой точки зрения результат, выраженный уравнением (2*), не является новым. Как раз именно преобразованием (4) В. И. Моссаковский [2] приводит осесимметрическую смешанную задачу теории упругости к задаче линейного сопряжения в плоскости $x+iz$. В рассматриваемом частном случае результат В. И. Моссаковского получается немедленно, если представить решение уравнения (1) для случая сплошной круговой области (на границе $z=0$) в форме

$$u(r, z) = \int_0^\infty e^{-zt} J_0(rt) f(t)\, dt \tag{6}$$

Тогда при помощи интеграла Сонина

$$\int_0^\infty \frac{J_0(rt)\, rdr}{\sqrt{x^2-r^2}} = \frac{\sin xt}{t}$$

и допуская возможность изменения порядка интегрирования, что в дальнейшем при необходимости всегда будет предполагаться, получаем

$$v(x, z) = \int_0^x \frac{u(r, z)\, rdr}{\sqrt{x^2-r^2}} = \int_0^\infty e^{-zt} \sin xt \frac{f(t)}{t}\, dt \tag{7}$$

Отсюда видно, что $v(x, z)$ есть плоская гармоническая функция, нечетная относительно x. Обозначение $v(x, z)$ отвечает обозначению автора $u_{-1/2}(r, z)$. Автор получает этот результат в процессе проверки уравнения (2*) дифференцированием порядка $-1/2$ интеграла (6), представляющего $u(r, z)$. Но далее автор, руководствуясь поверхностной аналогией, совершает ошибку, полагая, что граничные условия для $u_{-1/2}(r, z)$ будут те же, что и для $u(r, z)$. Желая продемонстрировать свой прием на примере получения известной формулы давления под плоским штампом $p = c / \sqrt{a^2-r^2}$, когда

$$u(r, 0) = h \quad \text{(под штампом)}, \qquad u_z'(r, 0) = 0 \quad \text{(вне штампа)} \tag{8*}$$

автор пишет граничные условия для $u_{-1/2}$ следующим образом

$$u_{-1/2}(r, 0) = g\sqrt{r^2} \quad \text{(под штампом)}, \qquad \partial u_{-1/2}(r, 0) / \partial z = 0 \quad \text{(вне штампа)} \tag{10*}$$

Можно считать опиской $g\sqrt{r^2}$ вместо gr, поскольку из текста видно, что автор имеет в виду gr, а не $g\sqrt{r^2}$.

Но нельзя считать опиской вторую из формул (10*), так как дальнейшее рассуждение показывает, что она является для него исходным пунктом. Автор берет известное для случая (10*) решение плоской задачи, выписывая формулу [3,4]

$$p_{-1/2} = \frac{p_0}{\pi\sqrt{a^2-r^2}} - \frac{Eg\sqrt{r^2}}{2(1-\nu^2)\sqrt{a^2-r^2}} \tag{11*}$$

(Здесь снова описка: $\sqrt{r^2}$ вместо r). Имея это выражение, он вычисляет давление p (обозначенное у него также p_0) под круглым штампом, взяв производную порядка $1/2$ почленным дифференцированием разложения в степенной ряд правой части (11*), и заявляет, что этим путем получается правильный результат. Но так не может получиться. Действительно, обращая (7) или, что то же самое, применяя (5), имеем

$$u(r, z) = \frac{2}{\pi r}\frac{d}{dr}\int_0^r \frac{v(x, z)\, x\, dx}{\sqrt{r^2-x^2}} \tag{8}$$

и, следовательно,

$$p(r) = \frac{2}{\pi r}\frac{d}{dr}\int_0^r \frac{p_{-1/2}(x)\, x\, dx}{\sqrt{r^2-x^2}} \tag{9}$$

Внося (2) в эту формулу и выполнив интегрирование, получим

$$p(r) = \frac{2a}{\pi(a^2-r^2)}\left[\frac{p_0}{\pi r} - \frac{Eg}{2(1-\nu)} E\left(\frac{r}{a}\right)\right] \tag{10}$$

Почленное дробное дифференцирование равносильно вычислению интеграла (9) разложением в ряд, и другого результата, правильно вычисляя, автор получить бы не мог. Но он пытается оправдать свои более чем небрежные выкладки, заявляя, что в процессе дифференцирования должны быть отброшены члены, «содержащие особенности порядка (—1) и выше». Судя по литературной ссылке [5], речь идет об особенности в начале $r=0$, вызванной особенностью порядка $(-1/2)$ в первом члене правой части (11*). Но и второй член не лучше, и должно быть ясно с самого начала, что дифференцирование повысит порядок особенности в точке $r=a$ на $(-1/_2)$, а тогда, если отбросить все особенности порядка (-1), в правой части останется нуль.

Хотя автор ссылается на работу [2], ему все же неизвестно, что преобразование (7) приводит данную осесимметрическую задачу не к смешанной задаче, а к задаче Дирихле для плоской гармонической функции. Действительно, из (6) находим

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\int_0^\infty e^{-zt} J_0(rt)\, tf(t)\, dt = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\int_0^\infty e^{-zt} J_1(rt) f(t)\, dt\right\} \tag{11}$$

Отсюда в силу второго граничного условия

$$\frac{d}{dr}\left\{r\int_0^\infty J_1(rt) f(t)\, dt\right\} = 0 \qquad (r>a) \tag{12}$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty J_1(rt) f(t)\, dt = \frac{c}{r} \qquad (r>a) \tag{13}$$

Умножая здесь обе части на $1/\sqrt{r^2-x^2}$ и интегрируя по r от x до ∞ (при условии $x>a$), получаем, используя известный интеграл

$$\int_x^\infty \frac{J_1(rt)\, dr}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{\sin xt}{xt}$$

уравнение

$$\int_0^\infty \sin xt\, \frac{f(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} c \tag{14}$$

Таким образом, граничное условие для $v(x, z)$ имеет вид:

$$v(x, 0) = \Phi(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{F(r)\, r\, dr}{\sqrt{x^2-r^2}}, & |x|<a \\ \text{const}, & |x|>a \end{cases} \tag{15}$$

Взяв теперь известное решение задачи Дирихле

$$v(x, z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi'(t) \operatorname{arc\,tg} \frac{x-t}{z}\, dt \tag{16}$$

преобразованием (8) можно получить замкнутые формулы решения осесимметрической задачи, содержащие комплексное переменное, такие, как в работе [6] и книге [7]. Но это вычисление довольно громоздко. В данном простом случае привлечение результатов плоской задачи нецелесообразно, так как здесь вспомогательная функция $f(t)$ находится сразу обращением интеграла Фурье, через который выражается граничное условие

$$\int_0^\infty \sin xt\, \frac{f(t)}{t}\, dt = \Phi(x) \tag{17}$$

Отсюда

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Phi'(x) \cos tx\, dt \tag{18}$$

Вследствие (15) обращение выполнимо при любых интегрируемых $F(r)$. Внося последнее выражение в (6) и (11) и меняя порядок интегрирования, получаем в качестве ядер следующие интегралы Ханкеля:

$$\int_0^\infty e^{-zt} \cos xt\, J_0(rt)\, dt = \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{(z+ix)^2+r^2}}$$

$$\int_0^\infty e^{-zt} \cos xt\, J_0(rt)\, dt = -\frac{1}{r} \operatorname{Re} \frac{z+ix}{\sqrt{(z+ix)^2+r^2}}$$

Окончательно имеем

$$u(r, z) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^a \frac{\Phi'(x)\, dx}{\sqrt{(z+ix)^2 + r^2}} \tag{19}$$

$$\frac{\partial u(r, z)}{\partial z} = \frac{2}{\pi r} \operatorname{Re} \int_0^a \frac{(z+ix)\, \Phi'(x)\, dx}{\sqrt{(z+ix)^2 + r^2}} \tag{20}$$

В верхнем пределе поставлено a в связи с тем, что $\Phi'(x) = 0$ при $x > a$. При $z = 0$ будет

$$u|_{z=0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\min(r,\, a)} \frac{\Phi'(x)\, dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \tag{21}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{2}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{\Phi'(x)\, x\, dx}{\sqrt{x^2 - r^2}}, \qquad r < a \tag{22}$$

Формулы (19) и (20) лишь обозначениями отличаются от формул книги [7]. В работе [6] формулы имеют несколько иной вид.

Если бы автор правильно установил граничные условия для $u_{-1/2}(r, z)$, то при $F(r) = 1$ он имел бы на основании (15)

$$u_{-1/2}|_{z=0} = \begin{cases} \min(r, a) & (r > 0) \\ \max(r, -a) & (r < 0) \end{cases}$$

Из (16) легко получается

$$p_{-1/2}(r) = c \left.\frac{\partial u_{-1/2}}{\partial z}\right|_{z=0} = c\, \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{a-r}{a+r} \right|$$

Такой вид должна была бы иметь его формула (11*). Тогда, конечно, дробное дифференцирование дало бы правильный результат. В самом деле, внося последнее выражение в (9) и вычисляя интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_0^r \ln \left| \frac{a-x}{a+x} \right| \frac{x dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \sqrt{a^2 - r^2} - a$$

получаем

$$p(r) = \frac{A}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

как и должно быть.

Сказанное по поводу круглого штампа с плоским основанием избавляет нас от необходимости комментировать полученную таким же способом формулу давления под кольцевым штампом с плоским основанием.

Поступила 30 III 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению, ГТТИ, М.— Л., 1951, стр. 40—41.
2. Моссаковский В. И. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. ПММ, т. XVIII, № 2, 1954.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 4-е, АН СССР, 1954, стр. 445.
4. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. ГТТИ, М., 1953, стр. 64.
5. Леонов М. Я. Общая задача о давлении кругового штампа на упругое полупространство. ПММ, т. XVII, № 1, 1953.
6. Ростовцев Н. А. Комплексные функции напряжений в осесимметричной контактной задаче теории упругости. ПММ, т. XVII, № 5, 1953.
7. Green A., Zerna W. Theoretical Elasticity. Oxford, 1953, p. 172.