О ПЕРЕМЕЩЕНИИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ

В. В. Новожилов

(Ленинград)

Рассмотрим абсолютно твердое, свободное от закреплений, тело, погруженное в безграничную жидкость. В окружающей тело среде пусть распространяется волна давления с потенциалом $\Phi(x - ct) = \Phi(\xi)$, фронт которой в момент времени $t = 0$ входит в соприкосновение с поверхностью первоначально неподвижного тела. Относительно функции $\Phi(\xi)$ предположим что она стремится к некоторому пределу, если $\xi \to -\infty$. Последнее означает, что полный импульс давления волны

$$I = \int_0^\infty p_0 dt = -\rho \int_0^\infty \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt \tag{0.1}$$

считается конечным.

Что касается тела, то будем полагать, что оно имеет две взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии, перпендикулярные фронту волны (причем симметрия эта является не только геометрической, но и соблюдается в отношении распределения масс внутри тела). Данное ограничение принимается только для избежания громоздкости выкладок. Ниже будет показано, что задачу можно решить и для тела совершенно произвольной формы. Вес тела может быть меньше, больше или равен весу вытесненной им среды. Однако перемещениями тела за счет избыточной или отрицательной плавучести будем пренебрегать.

Требуется доказать, что при указанных выше свойствах волны давления перемещение тела стремится (при $t \to \infty$) к некоторому пределу. Требуется, кроме того, найти этот предел.

Задача решается в акустическом приближении.

§ 1. Дифференциальные уравнения задачи. При сделанных выше оговорках относительно симметрии тела оно будет перемещаться поступательно в сторону распространения волны давления, т. е. в направлении оси X.

Дифференциальное уравнение движения тела записывается следующим образом:

$$M \frac{d^2 U}{dt^2} = \rho \iint \frac{\partial \Phi}{\partial t} \cos nx dS + \rho \iint \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cos nx dS \tag{1.1}$$

где U — перемещение тела, M — масса тела, ρ — плотность жидкости, n — направление внешней нормали к поверхности тела, $\varphi(x, y, z, t)$ — потенциал дифракционной волны.

Интегрирование в (1.1) распространено по всей поверхности тела.

Потенциал φ подчиняется трехмерному волновому уравнению

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{1.2}$$

и начальным условиям

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad \text{при } t = 0 \tag{1.3}$$

При $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty$ функция $\varphi \to 0$, а на поверхности тела имеет место условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{dU}{dt} \cos nx \tag{1.4}$$

Проинтегрировав (1.1) дважды по времени (в пределах от $t = 0$ до t) с учетом всех имеющихся начальных данных, получим

$$MU = \rho \iint \Phi^* \cos nx dS + \rho \iint \varphi^* \cos nx dS \tag{1.5}$$

где

$$\Phi^* = \int_0^t \Phi dt, \qquad \varphi^* = \int_0^t \varphi dt \tag{1.6}$$

Перемещения частиц жидкости выражается через эти две функции формулами

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi^*, \qquad \mathbf{w} = \operatorname{grad} \varphi^* \tag{1.7}$$

причем $\mathbf{v}$ — перемещение, вызванное падающей волной (т. е. то перемещение, которое было бы, если бы тела в жидкости не было), а $\mathbf{w}$ — дополнительное перемещение, обусловленное дифракцией. Поскольку падающая волна распространяется в направлении оси X, постольку

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \mathbf{i}_x = v \mathbf{i}_x \tag{1.8}$$

Функция φ^* подчиняется уравнению

$$\Delta \varphi^* = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{1.9}$$

и граничному условию на поверхности тела

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi^*}{\partial n} + U \cos nx = (U - v) \cos nx \tag{1.10}$$

(1.9) и (1.10) получаются путем интегрирования по времени (1.2) и (1.4) с учетом (1.3). Заметим, что если интеграл (0.1) конечен (как это было ранее оговорено), то и перемещение v остается при $t \to \infty$ конечным, стремясь к некоторому пределу

$$v_\infty = \lim_{t \to \infty} \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \tag{1.11}$$

Потенциал падающей волны Φ (а следовательно, и его интеграл Φ^*) не имеет особенностей внутри области, занимаемой телом. На этом основании можем написать

$$\rho \iint \Phi^* \cos nx \, dS = \rho \iiint \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} dV = \rho \iiint v dV \tag{1.12}$$

где справа интегрирование распространено по всему объему, занятому телом. Что касается другого из интегралов формулы (1.5), то согласно (1.10) он может быть записан следующим образом:

$$\rho \iint \varphi^* \cos nx \, dS = \rho \iint \frac{1}{U - v} \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} dS \tag{1.13}$$

С учетом (1.12), (1.13) формула (1.5) примет вид:

$$MU = \rho \iiint v dV + \rho \iint \frac{1}{U - v} \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} dS \tag{1.14}$$

§ 2. **Решение задачи.** Для нахождения $U(t)$ надо знать функцию $\varphi^*(x, y, z, t)$, определение которой при принятой выше общей постановке задачи, разумеется, невозможно.

Поэтому будем искать не $U(t)$, а только окончательное перемещение тела

$$U_\infty = \lim_{t \to \infty} U(t) \tag{2.1}$$

Заметим, что такого предела, вообще говоря, может и не быть. Так, например, если бы волна имела вид скачка давления, то в результате ее действия тело приобрело бы некоторую постоянную скорость [1]. Однако если полный импульс давления (0.1) ограничен, то частицы жидкости получат конечные перемещения и можно ожидать, что в этом случае конечным будет и перемещение тела. Предположим, что это так, и посмотрим, куда нас данное предположение приведет.

Итак, пусть при $t \to \infty$ $v \to v_\infty$, $U \to U_\infty$, тогда из уравнения (1.14) следует, что

$$MU_\infty = M_0 v_\infty + \frac{\rho}{U_\infty - v_\infty} \lim_{t \to \infty} \left\{ \iint \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} dS \right\} \tag{2.2}$$

где M_0 — масса вытесненной телом жидкости. Таким образом, требуется определить

$$\lim_{t \to \infty} \left\{ \iint \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} dS \right\} = \iint \varphi_\infty^* \frac{\partial \varphi_\infty^*}{\partial n} dS \tag{2.3}$$

где

$$\varphi_\infty^* = \lim_{t \to \infty} \varphi^* = f(x, y, z) \tag{2.4}$$

Функция φ^* подчиняется уравнению (1.9), правая часть которого стремится к нулю при $t \to \infty$ (поскольку она пропорциональна давлению в дифракционной волне). Поэтому φ_∞^* — функция гармоническая. Она затухает при $r \to \infty$, а на поверхности тела подчиняется условию

$$\frac{\partial \varphi^*_\infty}{\partial n} = A \cos nx \qquad (A = U_\infty - v_\infty = \text{const}) \tag{2.5}$$

Отсюда вытекает, что φ_∞^* может быть отождествлена с потенциалом течения безграничной идеальной жидкости при движении в ней рассматриваемого тела с постоянной скоростью A в направлении оси X. При этом нас интересует не сама эта функция, а лишь интеграл (2.3).

Преобразуем его по формуле Грина с учетом того, что при $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty$ функция φ_∞^* стремится к нулю ([2], стр. 370), как r^{-2}.

Тогда получим

$$\iint \varphi_\infty^* \frac{\partial \varphi_\infty^*}{\partial n} dS = \frac{1}{2} \iint \frac{\partial (\varphi_\infty^*)^2}{\partial n} dS = - \iiint \left[\left(\frac{\partial \varphi_\infty^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_\infty^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_\infty^*}{\partial z} \right)^2 \right] dV \tag{2.6}$$

В правой части этого равенства интегрирование распространяется по области задания φ_∞^*, т. е. по всему объему, занятому окружающей тело жидкостью.

Таким образом, задача сведена к вычислению интеграла

$$T = \frac{1}{2} \rho \iiint \left[\left(\frac{\partial \varphi_\infty^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_\infty^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_\infty^*}{\partial z} \right)^2 \right] dV \tag{2.7}$$

Но это есть не что иное, как кинетическая энергия идеальной несжимаемой жидкости в задаче с граничным условием (2.5). Отсюда сразу можем написать ([2], стр. 379, 384)

$$T = \frac{1}{2} M_0 \mu_x A^2 \tag{2.8}$$

где μ_x — коэффициент присоединенной массы для рассматриваемого тела (при движении его в направлении оси X).

На основании (2.6) — (2.8) и (2.5) выражение (2.1) принимает вид:

$$M U_\infty = M_0 v_\infty - M_0 \mu_x A = M_0 v_\infty - M_0 \mu_x (U_\infty - v_\infty) \tag{2.9}$$

Решив данное уравнение относительно U_∞, получаем

$$U_\infty = (1 + \mu_x) \frac{v_\infty}{\mu_x + M / M_0} \tag{2.10}$$

Таким образом, предположение о том, что существует предельное значение перемещения (2.1), не привело нас к какому-либо противоречию и подтверждается окончательной формулой (2.10).

Рассмотренную задачу нетрудно решить и для абсолютно твердого тела совершенно произвольной формы. Такое тело в результате прохождения акустической волны давления с конечным импульсом получит перемещения по всем трем координатным осям. Кроме того, оно повернется вокруг осей на некоторые углы. Для шести неизвестных величин (трех компонент перемещения и трех компонент поворота) путем рассуждений, аналогичных предыдущим, при использовании сведений, изложенных в [2], стр. 368, можно вывести линейную алгебраическую систему, коэффициенты которой будут зависеть от 21-го коэффициента присоединенных масс и статических моментов. Не будем, однако, останавливаться на этом более подробно, поскольку рассмотренный выше частный случай представляет наибольший интерес и поскольку он достаточно раскрывает путь вывода и для общего случая.

Поступила 13 XI 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Baron M. L. Proc. of the 2[d] USA Congress of appl. mech., 1954.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. I, ГТИ, 1948.