ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ, НАХОДЯЩЕГОСЯ В НЬЮТОНОВСКОМ ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ

Г. К. Пожарицкий (Москва)

В работе [1] рассматривается задача о движении твердого тела с одной закрепленной точкой, находящегося под действием сил центрального ньютоновского поля.

Расстояние R от центра сил до неподвижной точки предполагается значительно превосходящим размеры твердого тела; поэтому в неподвижной системе отсчета с осью z, направленной от центра сил к неподвижной точке, и осями x и y, дополняющими ее до правой прямоугольной тройки, проекции F_x, F_y, F_z сил, действующих на элемент твердого тела с точностью до малых второго порядка, будут

$$F_x = -\frac{g}{R}\,dmx, \qquad F_y = -\frac{g}{R}\,dmy, \qquad F_z = -g\,dm + \frac{2g}{R}\,dmz$$

Здесь g — ускорение силы тяготения на расстоянии R от притягивающего центра, x, y, z — координаты элемента.

Так как силы потенциальны и стационарны, а идеальные связи не содержат явно времени, то система уравнения движения допускает интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + Mg\,(x_0'\gamma_1 + y_0'\gamma_2 + z_0'\gamma_3) + \frac{3g}{2R}(A\gamma_1^2 B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2)$$

Здесь A, B, C — главные моменты инерции твердого тела, x', y', z' — оси, направленные по главным осям эллипсоида инерции, x_0', y_0', z_0' — координаты центра масс тела в подвижной системе, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — направляющие косинусы оси z в подвижной системе, p, q, r — проекции абсолютной угловой скорости ω на оси подвижной системы. Если в качестве обобщенных координат взять φ, ψ, θ — эйлеровы углы собственного вращения, прецессии и нутации, то применяя известные формулы

$$p = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi, \quad q = \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi, \quad r = \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi$$
$$\gamma_1 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta$$

выражение для полной энергии системы можно привести к виду

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}[A(\dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi)^2 + B(\dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi)^2 + C(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)^2] + \\ + Mg\,(x_0'\sin\theta\sin\varphi + y_0'\sin\theta\cos\varphi + z_0'\cos\theta) + \\ + \frac{3g}{2R}(A\sin^2\theta\sin^2\varphi + B\sin^2\theta\cos^2\varphi + C\cos^2\theta) \end{aligned}$$

Так как ψ является циклической координатой, то ей соответствует интеграл

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = P = A(\dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi)\sin\theta\sin\varphi + B(\dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi)\sin\theta\cos\varphi + \\ + B(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)\cos\theta = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \mathrm{const} \end{aligned}$$

отражающий постоянство проекции кинетического момента на ось z.

Если $\dot\varphi = \dot\theta = 0$, $\quad \varphi = \varphi_0$, $\quad \theta = \theta_0$, $\quad \dot\psi = \dot\psi_0$ — решение уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial\dot\psi} = B_0, \qquad \frac{\partial H}{\partial\dot\varphi} = \frac{\partial H}{\partial\dot\theta} = \frac{\partial H}{\partial\varphi} = \frac{\partial H}{\partial\theta} = 0$$

то, как известно, уравнения движения допускают частное решение

$$\dot\varphi = \dot\theta = 0, \quad \theta = \theta_0, \qquad \varphi = \varphi_0, \qquad \dot\psi = \dot\psi_0, \qquad \psi = \dot\psi_0 t + \psi_0$$

которое называется перманентным вращением.

Как показывает анализ уравнений, оси всех перманентных вращений совпадают с осью z, а в подвижной системе располагаются на конусе

$$(B - C)\,x_0'\gamma_2\gamma_3 + (C - A)\,y_0'\gamma_3\gamma_1 + (A - B)\,z_0'\gamma_1\gamma_2 = 0 \tag{1}$$

аналогичном конусу Штауде [2] в задаче о движении тяжелого твердого тела с одной закрепленной точкой в однородном поле тяготения.

Для исследования применим теорему Рауса [3]. Несмотря на то, что теорема Рауса в его формулировке дает достаточные условия условной устойчивости, Ляпунов [4] утверждал, что по отношению к нециклическим координатам и всем скоростям теорема дает достаточные условия безусловной устойчивости [5].

Итак, углы φ_0 и θ_0 удовлетворяют уравнениям $\partial H / \partial\varphi = 0$, $\partial H / \partial\theta = 0$, составленным в предположении что $p = B_0$ $\dot\varphi = \dot\theta = 0$. Уравнения эти имеют вид:

$$\begin{gathered}\frac{\sin 2\theta}{m}\left(\frac{3g}{R} - \frac{B_0^2}{K^2}\right) + Mg\,(x_0' \cos\theta \sin\varphi + y_0' \cos\theta\cos\varphi - z_0' \sin\theta) = 0 \\ \frac{(A-B)\sin 2\varphi \sin^2\theta}{2}\left(\frac{3g}{R} - \frac{B_0^2}{K^2}\right) + Mg\,(x_0' \sin\theta\cos\varphi - y_0' \sin\theta\sin\varphi) = 0\end{gathered} \tag{2}$$

где $K = A\sin^2\theta\sin^2\varphi + B\sin^2\theta\cos^2\varphi + C\cos^2\theta$, $\quad m = A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi - C$.

Уравнение конуса Штауде в переменных φ, θ получится исключением из этих уравнений величины, стоящей в скобках.

Заметим, что уравнения, аналогичные уравнениям (2), для твердого тела в однородном поле тяжести получатся заменой величины $3g / R - p_0^2 / k^2$ на $(- p_0^2 / k^2)$, поэтому области допустимых осей на конусе Штауде для рассматриваемой задачи будут несколько шире. Действительно, если эти величины рассматривать в каждой задаче как произвольный параметр, то видно, что в рассматриваемой задаче он меняется от $3g / R$ до $-\infty$, а в задаче с однородным полем от 0 до $-\infty$.

Измененная потенциальная энергия системы имеет вид:

$$F = \frac{p_0^2}{2K} + Mg\,(x_0' \sin\theta\sin\varphi + y_0' \sin\theta\cos\varphi + z_0' \cos\theta) + \frac{3g}{2R}K$$

Движение (a) будет устойчивым по отношению к $\dot\varphi$, $\dot\theta$, $\dot\psi$, φ, θ, если будет определенно положительной относительно $\delta\theta$, $\delta\varphi$ функция

$$\delta^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}\,\delta\varphi^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial\varphi}\,\delta\varphi\delta\theta + \frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\,\delta\theta^2$$

что будет тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} > 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi\partial\theta}\right)^2 > 0$$

Выпишем эти условия:

$$m\left(\frac{3g}{R} - \omega^2\right)\cos 2\theta + \frac{\omega^2 m^2}{K}\sin^2 2\theta - Mg\,(x_0' \sin\theta\sin\varphi + y_0' \sin\theta\cos\varphi + z_0' \cos\theta) > 0$$

$$\begin{gathered}\left[\left(\frac{3g}{R} - \omega^2\right)\cos 2\theta m + \frac{\omega^2 m^2}{K}\sin^2 2\theta - Mg\,(x_0' \sin\theta\sin\varphi + y_0' \sin\theta\cos\varphi + z_0' \cos\theta)\right] \times \\ \times\left[(A-B)\left(\frac{3g}{R} - \omega^2\right)\cos 2\varphi\sin^2\theta + \frac{\omega^2 \sin^4\theta\sin^2 2\varphi\,(A-B)^2}{K} - Mg\sin\theta\,(x_0' \sin\varphi + \right. \\ \left. + y_0' \cos\varphi)\right] - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{3g}{R} - \omega^2\right)\sin 2\theta\sin 2\varphi\,(A-B) + \omega^2\sin^2 2\varphi\sin 2\theta\sin^2\theta\,\frac{m}{K} - \right. \\ \left. - Mg\cos\,(x_0' \sin\varphi + y_0' \cos\varphi)\right] > 0 \qquad \left(\omega^2 = \frac{p_0^2}{K^2}\right)\end{gathered}$$

Они совместно с уравнениями (2) выделяют устойчивые перманентные оси.

Исследование общих неравенств весьма громоздко. Однако, если $A = B$, а $z_0' = 0$, то при $x_0' > 0$, $y_0' > 0$ и $\sin\theta_0 > 0$ они сведутся к неравенствам

$$x_0' > y_0', \quad \left(\frac{\cos 2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta}\right) + \left(\frac{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}}{\sin\theta\,(A-C)} + \frac{3g}{MR}\right)\frac{\sin^2\theta\,(A-C)^2\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}}{Ax_0'^2 + By_0'^2} > 0$$

Задача об устойчивости перманентных вращений твердого тела в однородном поле тяготения детально исследована В. В. Румянцевым [6].

Поступила 12 II 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Об интегрируемости уравнений движения твердого тела около закрепленной точки под действием центрального Ньютоновского поля сил, ДАН, т. 113, № 2, 1957 г.
2. Staude O. Über permanente rotations Achsen bei der Bewegung eines shweher Körpers um einem festen Punkt. J. für die reine und angew. Mat. Bd. 113, 1894.
3. Routh E. T. The advanced part of a treatice on the dynamics of a systems of rigid bodies, London, 1930.
4. Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Собр. соч., т. 1, 1954.
5. Пожарицкий Г. К. О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения, ПММ, 1958, т. XXII в. 2.
6. Румянцев В. В. ПММ, т. XX, вып. 1, 1956.