НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД В СЛУЧАЕ УЗКОЙ ДРЕНЫ

Л. А. Галин

(Москва)

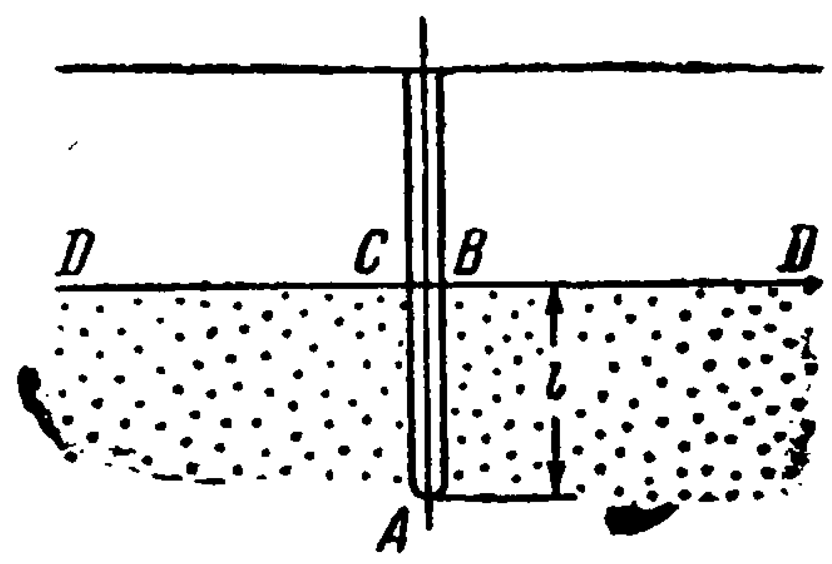
В заметке определяется положение уровня грунтовых вод в том случае, когда в области, занятой грунтовыми водами, помещается узкая дрена (фиг. 1). Полученные результаты позволяют исследовать процессы осушения. При этом предполагается, что область, первоначально занятая грунтовыми водами, является полуплоскостью. Такая постановка задачи может быть принята в том случае, когда водоупор находится весьма глубоко, а глубина узкой дрены сравнительно невелика. На поверхности грунтовых вод при этом будет принято линеаризованное условие, вывод которого дан нами в работе [1].

Рассмотрим случай неустановившегося движения, когда узкая дрена не содержит воды. Будем полагать, что изменение уровня грунтовых вод является малым.

Установим граничные условия, которые будут иметь место на различных участках поверхности, занятой грунтовыми водами.

На участках свободной поверхности BD и CD имеет место следующее граничное условие для потенциала скоростей. Здесь k — коэффициент фильтрации, а m — пористость,

$$\frac{k}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{1}$$



Фиг. 1

Введем новую переменную τ по формуле

$$\tau=\frac{k}{m}t \tag{2}$$

В таком случае граничное условие приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=0 \tag{3}$$

На участках AB и AC давление в процессе неустановившегося движения будет равно нулю. Но давление связано с потенциалом скоростей следующим образом:

$$\varphi=-\left(\frac{p}{\rho g}+ky\right) \tag{4}$$

Если $p=0$, то в результате получим $\varphi=-ky$. Таким образом, на участках AB и AC имеем условие

$$\varphi=-ky \tag{5}$$

Если ввести комплексный потенциал скоростей $w(z)=\varphi+i\psi$, то условие на свободной поверхности запишется следующим образом:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=\operatorname{Re}\left[\frac{\partial w}{\partial\tau}+i\,\frac{\partial w}{\partial z}\right] \tag{6}$$

Введем новую функцию ω, связанную с комплексным потенциалом скоростей

$$\omega=\frac{\partial w}{\partial\tau}+i\,\frac{\partial w}{\partial z} \tag{7}$$

В таком случае на участках CD и CB согласно (1) даны значения ее действительной части. На участках AB и AC, которые параллельны оси y, условие для определения потенциала скоростей имеет форму (5). Из этого следует, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial y}\right)(-ky)=-k \tag{8}$$

Из (1), (8) и (7) следует, что действительная часть функции ω известна на всем контуре, ограниченном прямыми AB, AC, CD и BD.

Итак, для отыскания ω необходимо решить задачу Дирихле для полуплоскости с надрезом при условиях на границе, указанных на фиг. 2. Прежде всего очевидно, что функция ω, таким образом определенная, не будет зависеть от τ.

Будем полагать, что глубина надреза, т. е. глубина дрены, равна l. В таком случае, если отобразить полуплоскость с надрезом (этой области соответствует переменная z) на полуплоскость, которой соответствует переменная ζ так, чтобы точки C и B перешли в точки с координатами -1 и $+1$, то связь между переменными ζ и z будет такова:

$$\zeta = \sqrt{1 + \frac{z^2}{l^2}} \tag{9}$$

Функция $\omega(\zeta)$, удовлетворяющая условиям, показанным на фиг. 2, будет

$$\omega(\zeta) = -\frac{k}{\pi} \ln \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \tag{10}$$

В таком случае на основании (9) и (10)

$$\omega(z) = -\frac{k}{\pi} \Lambda(z) \qquad \left(\Lambda(z) = \ln \frac{\sqrt{1 + z^2/l^2} + 1}{\sqrt{1 + z^2/l^2} - 1}\right) \tag{11}$$

Таким образом, для определения $w(z, \tau)$ имеем дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + i \frac{\partial w}{\partial z} = \omega = -\frac{k}{\pi} \Lambda(z) \tag{12}$$

Будем полагать, что в начале в области, занятой грунтовыми водами, было состояние покоя, а затем достаточно быстро создана узкая дрена. Поэтому условие для $w(z, \tau)$ при $\tau = 0$ будет таким:

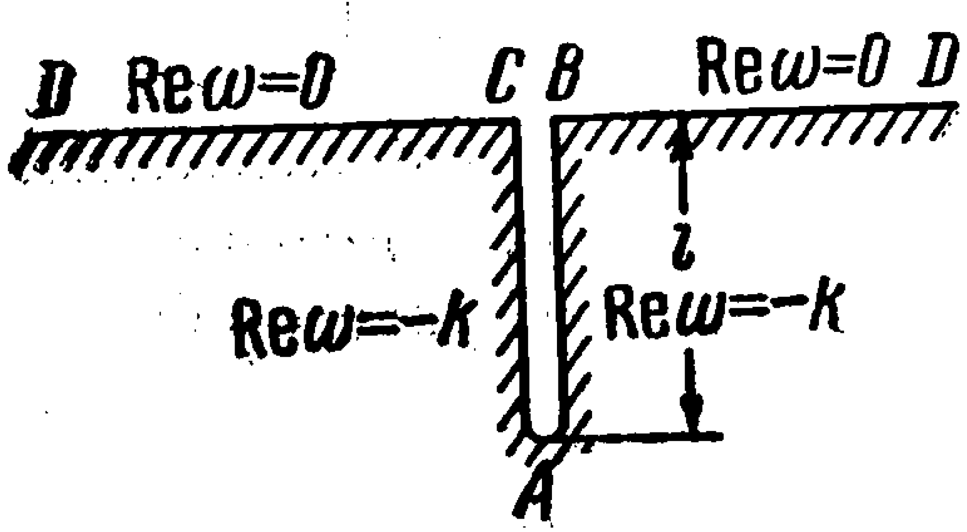
$$w(z, \tau) = 0 \tag{13}$$

Функцию $w(z, \tau)$ будем искать в виде суммы двух слагаемых:

$$w(z, \tau) = w_0(z) + w_1(z, \tau) \tag{14}$$

При этом $w_0(z)$ — частное решение уравнения (12) с заданной правой частью, а $w_1(z, \tau)$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial w_1}{\partial \tau} + i \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0$$



Фиг. 2

Функция $w_0(z)$ не будет зависеть от τ. Поэтому для ее нахождения имеем

$$i \frac{\partial w_0}{\partial z} = -\frac{k}{\pi} \Lambda(z) \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial w_0}{\partial z} = \frac{ki}{\pi} \Lambda(z) \tag{15}$$

Примем $w_0(z)$ в такой форме:

$$w_0(z) = \frac{ki}{\pi} \int_0^z \Lambda(\xi)\, d\xi \tag{16}$$

Функция $w_1(z)$, которая удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} + i \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \tag{17}$$

будет зависеть от комбинации переменных $z + i\tau$. Следовательно, $w_1(z, \tau) = (z + i\tau)$.

Для того чтобы при $\tau = 0$ $w(z, \tau) = w_0(z) + w_1(z) = 0$, должно иметь место

$$w_1(z, 0) = w_0(z) + w_1(z) = 0, \quad w_1(z) = -w_0(z)$$

Таким образом,

$$w_1(z, \tau) = -\frac{ki}{\pi} \int_0^{z+i\tau} \Lambda(\xi)\, d\xi \tag{18}$$

Отсюда окончательно находим

$$w(z, \tau) = \frac{ki}{\pi} \left[\int_0^z \Lambda(\xi)\, d\xi - \int_0^{z+i\tau} \Lambda(\xi)\, d\xi\right] = -\frac{ki}{\pi} \int_z^{z+i\tau} \Lambda(\xi)\, d\xi \tag{19}$$

Подставляя $\Lambda(z)$, согласно (12), и выполняя интегрирование, получим

$$w(z, \tau) = \frac{ki}{\pi} l \left[\xi \ln \frac{\sqrt{\xi^2 + 1} + 1}{\sqrt{\xi^2 + 1} - 1} - \ln\left(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}\right)\right]_{z/l}^{(z+i\tau)/l} \tag{20}$$

Комплексный потенциал скоростей позволяет определить потенциал скоростей φ и скорости движения грунтовых вод на границах дрены.

Потенциал скоростей

$$\varphi = \mathrm{Re}\left\{\frac{ki}{\pi}\, l \left[\, \xi \ln \frac{\sqrt{\xi^2+1}+1}{\sqrt{\xi^2+1}-1} - \ln\left(\xi + \sqrt{\xi^2+1}\right)\right]_{z/l}^{(z+i\tau)/l}\right\}$$

или иначе

$$\varphi = \frac{kl}{\pi}\, \mathrm{Im}\left[\, \xi \ln \frac{\sqrt{\xi^2+1}+1}{\sqrt{\xi+1}-1} \ln\left(\xi + \sqrt{\xi^2+1}\,\right)\right]_{z/l}^{(z+i\tau)/l} \qquad (21)$$

На свободной поверхности, т. е. на участках BD и DC давление $p = 0$. Поэтому $\varphi = -ky$. На основании этого изменение уровня грунтовых вод (фиг. 3)

$$\delta = y = -\frac{1}{k}\,\varphi$$

Поэтому

$$\delta(x, \tau) = -\frac{l}{\pi}\, \mathrm{Im}\left[\, \xi \ln \frac{\sqrt{\xi^2+1}+1}{\sqrt{\xi^2+1}-1} - \ln\left(\xi + \sqrt{\xi^2+1}\,\right)\right]_{x/l}^{(x+i\tau)/l} \qquad (22)$$

Определим перемещение точек, где свободная поверхность граничит со стенкам узкой дрены (т. е. перемещение точек C и B). При этом следует положить $x = 0$ В таком случае будем иметь

$$\delta_{x=0} = -\frac{l}{\pi}\, \mathrm{Im}\left[\frac{i\tau}{l} \ln \frac{\sqrt{1-\tau^2/l^2}+1}{\sqrt{1-\tau^2/l^2}-1} - \ln\left(\frac{i\tau}{2} + \sqrt{1-\frac{\tau^2}{l^2}}\right)\right]$$

или получаем

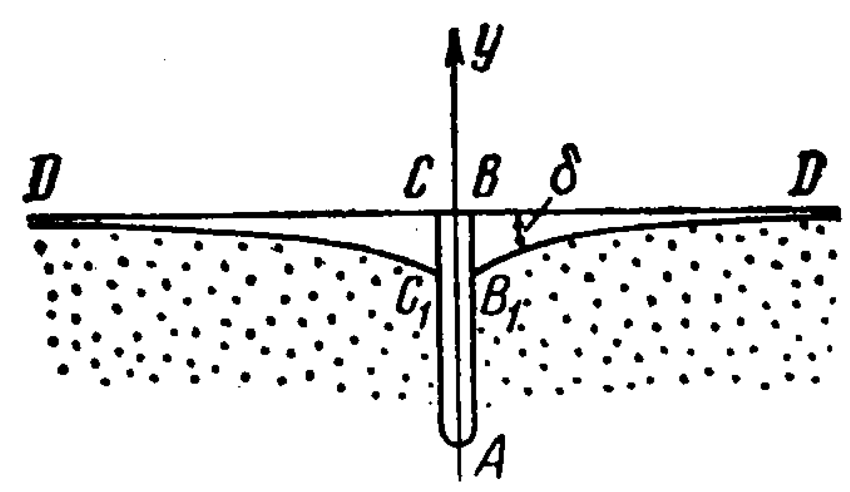
$$\delta_{x=0} = -\frac{\tau}{\pi} \ln \frac{\sqrt{1-\tau^2/l^2}+1}{\sqrt{1-\tau^2/l^2}-1} + \frac{l}{\pi}\, \mathrm{arc\,tg}\, \frac{\tau/l}{\sqrt{1-\tau^2/l^2}} \qquad (23)$$

Заменим по формуле (2) переменную τ через время t. Тогда окончательно получим

$$\delta_{x=0} = -\frac{kt}{\pi m} \ln \frac{\sqrt{1-kt/ml}+1}{\sqrt{1-kt/ml}-1} + \frac{l}{\pi}\, \mathrm{arc\,tg}\, \frac{kt/ml}{\sqrt{1-(kt/ml)^2}} \qquad (24)$$

Эта формула будет справедлива до такого значения, когда

$$\frac{kt}{ml} = 1 \qquad \text{или} \qquad t = \frac{ml}{k} \qquad (25)$$



Фиг. 3

При этом на основании (24) перемещение точки свободной поверхности, находящейся на границе дрены, будет

$$\delta_{x=0} = \frac{l}{2}$$

Таким образом, за промежуток времени $t = ml/k$ граница свободной поверхности проходит половину глубины дрены.

При $t < ml/k$ на основании (24) будем иметь

$$\delta_{x=0} = \frac{2\tau}{\pi}\, \mathrm{arc\,tg} \sqrt{\frac{\tau^2}{l^2} - 1} + \frac{l}{2}$$

или, переходя к переменной t, получим

$$\delta_{x=0} = \frac{2}{\pi}\frac{kt}{m}\, \mathrm{arc\,tg} \sqrt{\left(\frac{kt}{ml}\right)^2 - 1} + \frac{l}{2}$$

Следует заметить, что при значениях t порядка ml/k перемещения уровня грунтовых вод у стенки дрены будет большим, что противоречит исходному предположению о малости изменения уровня.

Поступила 13 I 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Некоторые вопросы неустановившегося движения грунтовых вод, ПММ, т. XIV, вып. 6, 1951.