Сопоставляя это выражение с (9) и принимая во внимание, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin \lambda z \, d\lambda}{\lambda (\lambda^2 - k^2)} = -\frac{\pi}{2k^2}(1 - \cos kz)$$

(интеграл рассматривается как главное значение по Коши), найдем следующие равенства:

$$B(r, \lambda, k) = r \int_0^\infty \frac{\sin \lambda z}{\lambda \sqrt{k^2 - \lambda^2}} Y_1 (r \sqrt{k^2 - \lambda^2}) \, d\lambda = -\frac{1}{k} \int_0^z \sin k \sqrt{\zeta^2 + r^2} \, d\zeta$$

$$C(r, z, k) = -\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = r \int_0^\infty \frac{\lambda \sin \lambda z}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} Y_1 (r \sqrt{k^2 - \lambda^2}) \, d\lambda = \frac{z \cos \sqrt{z^2 + r^2}}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

В этих интегралах нужно при $\lambda > k$ заменить

$$\frac{Y_1 (r \sqrt{k^2 - \lambda^2})}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} \quad \text{на} \quad \frac{2}{\pi} \frac{K_1 (r \sqrt{\lambda^2 - k^2})}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}$$

На фигуре представлен общий вид линий тока, т. е. линий $\psi = \text{const}$, при $C = 0$ для $k = \pi$. В построении кривых мне оказывали помощь М. М. Семчинова и Н. В. Волжанская.

Поступила 5 V 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. Госэнергоиздат, М.— Л., 1958.
2. Bateman H. Tables of integral Transforms, vol. 2, N. Y., Toronto, London (Erdélyi, Editor), 1954.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СЛАБЫХ ВОЛН В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЛУЧИСТОГО ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ

Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Вопрос о неадиабатическом распространении слабых плоских волн в сплошной среде исследовался в работах В. А. Прокофьева [1,2], где была выписана система линеаризованных уравнений газовой динамики с учетом эффектов вязкости, теплопроводности и излучения и были найдены некоторые ее решения. В данной заметке рассматривается распространение слабых плоских волн при наличии только лучистого переноса энергии. Отмечены два частных случая, когда движение мало отличается от адиабатического или от изотермического, и для этих случаев найдена величина затухания слабых волн.

Линеаризованная система уравнений, описывающих распространение плоских слабых волн при наличии излучения, состоит из уравнения сохранения массы, уравнения Эйлера, уравнения сохранения энергии, уравнения состояния и уравнения лучистого переноса (последнее уравнение взято в диффузионном приближении):

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial s'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 T_0} \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$p = p(\rho, T), \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 16 \rho_0 \alpha \sigma T_0^3 \frac{\partial T'}{\partial x} + 3\alpha^2 \rho_0^2 H$$

где ρ', p', T', s', u, H — малые изменения равновесных значений плотности ρ_0, давления p_0, температуры T_0, энтропии s_0, скорости и потока лучистой энергии, α — массовый коэффициент поглощения, σ — постоянная Стефана — Больцмана.

Исключив из уравнений системы (1) скорость u и заменив переменные ρ', s' переменными T', p' при помощи термодинамических формул

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p T' + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T p', \qquad s' = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p T' + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T p'$$

придем к системе

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{\partial T'}{\partial t} + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 T_0}\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0 \\ 16 T_0^3 \rho_0 \alpha\sigma \frac{\partial T'}{\partial x} + 3\alpha^2\rho_0^2 H - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

Будем искать решение системы (2) в виде, включающем зависимость неизвестных функций T', p', H от переменных x, t в форме $\exp[i(kx - \omega t)]$. Из условия совместимости уравнений системы (2) получим дисперсионное уравнение, которое после подстановки в него явных выражений термодинамических функций для полностью ионизированного идеального газа примет вид

$$(16\alpha\sigma T_0^3 - i\omega c_p)\, k^4 + \left(i\frac{\omega^3 c_v}{a_T^2} - i3\alpha^2\rho_0^2\omega c_p - 16\alpha\sigma T_0^3 \frac{\omega}{a_T^2}\right) k^2 + i3\alpha^2\rho_0^2 c_v \frac{\omega^3}{a_T^2} = 0 \tag{3}$$

Здесь c_v, c_p — теплоемкость полностью ионизированного идеального газа при постоянном объеме и постоянном давлении, a_T, a_s — изотермическая и адиабатическая скорости звука в полностью ионизированном газе. Решение уравнения (3) дает искомую зависимость $k(\omega)$ и может быть выписано.

Отметим два частных случая решения. Если

$$\frac{16\alpha\sigma T_0^3}{c_p\left(\dfrac{\omega^2}{a_s^2} + 3\alpha^2\rho_0^2\right)} \frac{1}{a^2}\,\omega \ll 1$$

то

$$k = \frac{\omega}{a_s} + i\,\frac{16\alpha\sigma T_0^3}{c_p(\omega^2/a_s^2 + 3\alpha^2\rho_0^2)} \frac{\omega^2}{a_s}\left(\frac{1}{a_T^2} - \frac{1}{a_s^2}\right) \tag{4}$$

т. е. слабая волна является адиабатической звуковой волной с затуханием. Если

$$\frac{c_p}{16\alpha\sigma T_0^3}\left(\frac{\omega^2}{a^2} + 3\alpha^2\rho_0^2\right)\frac{a_T^2}{\omega} \ll 1$$

то

$$k = \frac{\omega}{a_T} + i\left[\frac{c_p(\omega^2/a_T^2 + 3\alpha^2\rho_0^2)}{16\alpha\sigma T_0^3}\right]\frac{a_T}{2a_s^2}(a_s^2 - a_T^2) \tag{5}$$

т. е. слабая волна является изотермической звуковой волной с затуханием.

Сравнив (4), (5) с решением задачи о дисперсии звука при наличии теплопроводности [3], можно видеть, что в отношении затухания звука лучистый перенос энергии эквивалентен теплопроводности с коэффициентом теплопроводности, равным

$$\chi = \frac{16\alpha\sigma T_0^3}{c_p(\omega^2/a^2 + 3\alpha^2\rho_0^2)}$$

Поступила 4 V 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Прокофьев В. А. Влияние излучения на распространение малых возмущений в вязкой и теплопроводной жидкости (Гидродинамическая теория). Изв. АН СССР, ОТН, вып. 7, 1957.
2. Прокофьев В. А. Поглощение и дисперсия слабых вынужденных волн очень малой и очень большой частоты под влиянием радиального переноса тепла. Изв. АН СССР, ОТН, вып. 12, 1958.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, 1954.