О ТОЧЕЧНОМ ИСТОЧНИКЕ И ВИХРЕВОЙ НИТИ В ВИНТОВОМ ПОТОКЕ

П. Я. Полубаринова-Кочина

(Новосибирск)

В книге О. Ф. Васильева [1] ставится задача об отыскании двумерного или двупараметрического, т. е. зависящего от двух цилиндрических координат r, z, винтового движения, определяемого уравнением для функции тока

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + k^2\psi = -kC \tag{1}$$

через которую составляющие скорости выражаются так:

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad v_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad v_\varphi = \frac{k\psi + C}{r} \tag{2}$$

Движение рассматривается в области $0 \leqslant z < \infty$, $0 \leqslant r < \infty$ при граничных условиях

$$\psi(z, 0) = 0, \qquad \psi(0, r) = \psi_0 = \text{const} \tag{3}$$

О. Ф. Васильев получает решение в двух формах. Первая из них

$$\psi = r\psi_0 \operatorname{Re}\int_0^\infty J_1(\lambda r)\exp\left(-z\sqrt{\lambda^2 - k^2}\right)d\lambda -$$

$$- kCr \operatorname{Re}\left\{\int_0^\infty \frac{J_1(\lambda r)}{k^2 - \lambda^2}\left[1 - \exp\left(-z\sqrt{\lambda^2 - k^2}\right)\right]d\lambda\right\} \tag{4}$$

Здесь при $\lambda < k$ принимается $\sqrt{\lambda^2 - k^2} = i\sqrt{k^2 - \lambda^2}$ и, следовательно,

$$\operatorname{Re}\left(e^{-z\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\right) = \cos z\sqrt{k^2 - \lambda^2}$$

Оказывается, что интеграл (4) можно представить в простом виде, если воспользоваться формулой (22) на стр. 35 книги [2]. Эту формулу для $\nu = 0$ можно записать в таком виде

$$A(r, z, k) = -\operatorname{Re}\int_0^\infty J_1(\lambda r)\frac{\exp\left(-z\sqrt{\lambda^2 - k^2}\right)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}d\lambda = \frac{1}{kr}\left(\sin kz - \sin k\sqrt{z^2 + r^2}\right) \tag{5}$$

считая при $\lambda < k$ корень $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ равным $i\sqrt{k^2 - \lambda^2}$. Можно также положить

$$A(r, z, k) = \int_0^\infty J_1(\lambda r) f(\lambda, z, k)\, d\lambda$$

где

$$f(\lambda, z, k) = \begin{cases} \dfrac{\sin z\sqrt{k^2 - \lambda^2}}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} & (0 < \lambda < k) \\[2ex] \dfrac{\exp\left(-z\sqrt{\lambda^2 - k^2}\right)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} & (k < \lambda < \infty) \end{cases} \tag{6}$$

Теперь ψ нетрудно выразить через $A(r, z, k)$:

$$\psi = r\psi_0\frac{\partial A}{\partial z} - kCr\int_0^z A(r, \zeta, k)\, d\zeta \tag{7}$$

и, следовательно, представить в форме

$$\psi = \psi_0\left(\cos kz - \frac{z\cos k\sqrt{z^2 + r^2}}{\sqrt{z^2 + r^2}}\right) - \frac{C}{k}\left(1 - \cos kz - k\int_0^z \sin k\sqrt{\zeta^2 + r^2}\, d\zeta\right) \tag{8}$$

Легко проверить, что условия (3) выполняются, причем ψ является ограниченной функцией. При $k=0$ имеем

$$\psi = \psi_0 \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}\right) \tag{9}$$

что представляет функцию тока пространственного источника при потенциальном движении. При этом $\psi = -Q/2\pi$, где Q — расход источника.

При $\psi_0 = 0$ получаем

$$\psi = -\frac{C}{k}\left(1 - \cos kz - k\int_0^z \sin k\sqrt{\zeta^2+r^2}\, ds\right) \tag{10}$$

Таким образом, для окружной скорости v_φ согласно (3) имеем

$$v_\varphi = \frac{C}{r}\left(\cos kz + k\int_0^z \sin k\sqrt{\zeta^2+r^2} d\zeta\right) \tag{11}$$

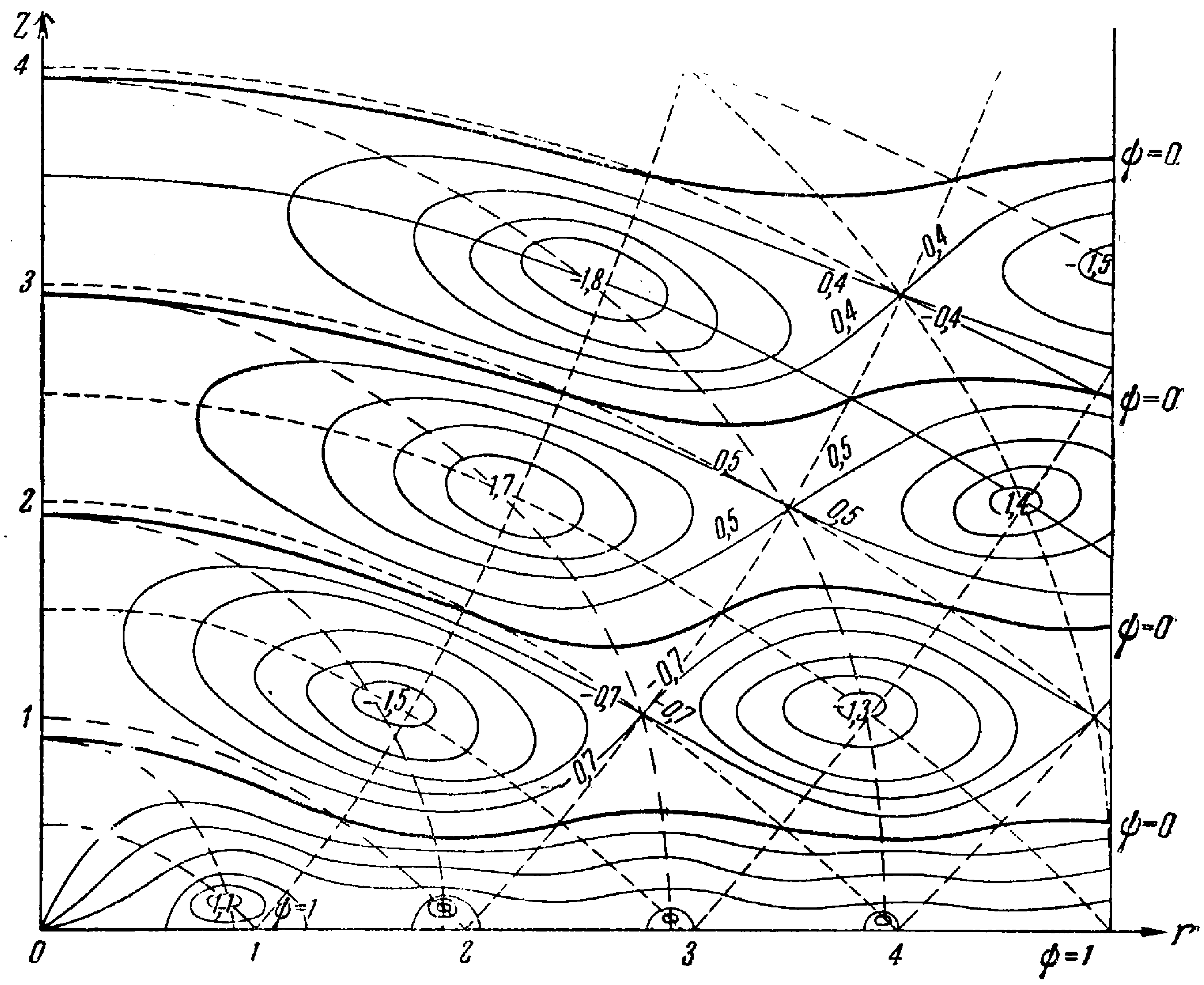
Подставив ψ из (3) в уравнение (1), получим уравнение для v_φ:

$$\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right) v_\varphi = 0 \tag{12}$$

Видим, что равенство (11) представляет такое решение этого уравнения, которое вырождается для потенциального потока ($k=0$) в

$$v_\varphi = \frac{C}{r} \qquad \left(C = \frac{\Gamma}{2\pi}\right)$$

Это соответствует линейному, бесконечно тонкому вихрю вдоль оси, причем здесь Γ — циркуляция скорости по контуру, охватывающему ось z[1].



Замечание. О. Ф. Васильевым получено другое выражение для ψ:

$$\psi = \psi_0\left[1 + \frac{2k^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda z\, d\lambda}{\lambda(\lambda^2-k^2)} - r\int_0^\infty \frac{\lambda \sin\lambda z}{\sqrt{k^2-\lambda^2}} Y_1\left(r\sqrt{k^2-\lambda^2}\right) d\lambda + \right.$$

$$\left. + kC\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda z\, d\lambda}{\lambda(\lambda^2-k^2)} - r\int_0^\infty \frac{\sin\lambda z}{\lambda\sqrt{k^2-\lambda^2}} Y_1\left(r\sqrt{k^2-\lambda^2}\right) d\lambda\right]\right. \tag{13}$$

Сопоставляя это выражение с (9) и принимая во внимание, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin \lambda z \, d\lambda}{\lambda (\lambda^2 - k^2)} = -\frac{\pi}{2k^2}(1 - \cos kz)$$

(интеграл рассматривается как главное значение по Коши), найдем следующие равенства:

$$B(r, \lambda, k) = r \int_0^\infty \frac{\sin \lambda z}{\lambda \sqrt{k^2 - \lambda^2}} Y_1 (r \sqrt{k^2 - \lambda^2})\, d\lambda = -\frac{1}{k} \int_0^z \sin k \sqrt{\zeta^2 + r^2}\, d\zeta$$

$$C(r, z, k) = -\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = r \int_0^\infty \frac{\lambda \sin \lambda z}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} Y_1 (r \sqrt{k^2 - \lambda^2})\, d\lambda = \frac{z \cos \sqrt{z^2 + r^2}}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

В этих интегралах нужно при $\lambda > k$ заменить

$$\frac{Y_1 (r \sqrt{k^2 - \lambda^2})}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} \quad \text{на} \quad \frac{2}{\pi} \frac{K_1 (r \sqrt{\lambda^2 - k^2})}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}$$

На фигуре представлен общий вид линий тока, т. е. линий $\psi = \text{const}$, при $C = 0$ для $k = \pi$. В построении кривых мне оказывали помощь М. М. Семчинова и Н. В. Волжанская.

Поступила 5 V 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. Госэнергоиздат, М.— Л., 1958.
2. Bateman H. Tables of integral Transforms, vol. 2, N. Y., Toronto, London (Erdélyi, Editor), 1954.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СЛАБЫХ ВОЛН В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЛУЧИСТОГО ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ

Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Вопрос о неадиабатическом распространении слабых плоских волн в сплошной среде исследовался в работах В. А. Прокофьева [1,2], где была выписана система линеаризованных уравнений газовой динамики с учетом эффектов вязкости, теплопроводности и излучения и были найдены некоторые ее решения. В данной заметке рассматривается распространение слабых плоских волн при наличии только лучистого переноса энергии. Отмечены два частных случая, когда движение мало отличается от адиабатического или от изотермического, и для этих случаев найдена величина затухания слабых волн.

Линеаризованная система уравнений, описывающих распространение плоских слабых волн при наличии излучения, состоит из уравнения сохранения массы, уравнения Эйлера, уравнения сохранения энергии, уравнения состояния и уравнения лучистого переноса (последнее уравнение взято в диффузионном приближении):

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial s'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 T_0} \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$p = p(\rho, T), \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 16 \rho_0 \alpha \sigma T_0^3 \frac{\partial T'}{\partial x} + 3\alpha^2 \rho_0^2 H$$

где ρ', p', T', s', u, H — малые изменения равновесных значений плотности ρ_0, давления p_0, температуры T_0, энтропии s_0, скорости и потока лучистой энергии, α — массовый коэффициент поглощения, σ — постоянная Стефана — Больцмана.