

Это противоречит полученному выше результату, так как очевидно, что функция $\varepsilon = \varepsilon(b/B)$ должна быть монотонно возрастающей.

Уточнение результата, полученного в данной работе, может быть достигнуто более точным удовлетворением краевого условия на характеристике и более точным вычислением функций $\zeta_n(\tau)$.

Работа выполнена под руководством С. В. Фальковича, которому выражаю самую искреннюю благодарность.

Поступила 9 I 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях. ГИТТЛ, 1949.
2. Фалькович С. В. К теории газовых струй. ПММ, т. XXI, № 4, 1957.
3. Франкль Ф. И. О задачах С. А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений. Изв. АН СССР, сер. матем., т. 9, № 2, 1945.
4. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. Гостехиздат, 1947.
5. Cherry T. M. Asymptotic expansions for the hypergeometric functions occurring in gas-flow theory. Proceedings of the Royal Society of London, ser. A, vol. 202, № 1071, 1950.
6. Франкль Ф. И. К теории сопел Лавалья. Изв. АН СССР, сер. матем., т. 9, № 5, 1945.
7. Франкль Ф. И. Истечение сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками. Докл. АН СССР, т. LVIII, № 3, 1947.
8. Асланов С. К. Асимптотика функций Чаплыгина и их производных. ПММ, т. XXI, № 2, 1957.
9. Truesdell C. On a function which occurs in the theory of the structure of polymers. Annals of Mathematics, vol. 46, № 1, pp. 144—157, 1945.

О ЗАДАЧЕ СИММЕТРИЧНОГО ОБТЕКАНИЯ ЗАДАННОГО СИММЕТРИЧНОГО ПРОФИЛЯ ПРИ ДОЗВУКОВОЙ СКОРОСТИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ И МЕСТНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Ф. И. Франкль

(Нальчик)

В работе [1] автор сформулировал задачу обтекания профиля при наличии местной сверхзвуковой зоны, оканчивающейся прямым скачком уплотнения; в работе [2] им сформулирована аналогичная задача для случая искривленного скачка уплотнения.

При этом требовалось задать годограф части профиля, а также годограф самого скачка уплотнения. Обтекаемый профиль находится при этом задним числом, так что эта задача — не прямая, а обратная.

В настоящей работе покажем, как можно в первом приближении построить обтекание произвольно заданного гладкого профиля с заданной скоростью на бесконечности, предполагая решенной задачу работы [1], если этот профиль близок тому, который получается при решении указанной задачи¹. Первую задачу для краткости обозначим через I, вторую — через II.

Достаточно рассматривать верхнюю половину потока — выше нулевой линии тока, которая состоит из двух бесконечных полупрямых, лежащих на оси x , и верхней части профиля. Верхнюю часть профиля, полученного при решении задачи I, обозначим через L° , соответствующую часть заданного профиля — через L (фиг. 1).

Расстояние точек профиля L от соответствующих точек профиля L° по внешней нормали к последнему обозначим через $\delta n(\sigma)$, где σ — какой-либо параметр, меняющийся вдоль профиля L° . Предполагается, что $\delta n(\sigma)$ — достаточно малая величина.

¹ Задача работы [1] была при некоторых условиях решена Ю. В. Девингталем [3].

Функция тока ψ° , соответствующая обтеканию профиля L° , удовлетворяет в плоскости годографа уравнению, которое в первом приближении совпадает с уравнением Трикоми:

$$\eta\psi_{\theta\theta}^\circ + \psi_{\eta\eta}^\circ = 0 \quad (1)$$

Здесь θ — угол наклона скорости, η — известная функция модуля скорости, употребляемая в теории околосзвуковых течений.

Напомним постановку задачи I в плоскости годографа (фиг. 2, 3).

Краевые условия следующие:

$$\psi^\circ = 0 \text{ на } HCABD, \quad (2)$$

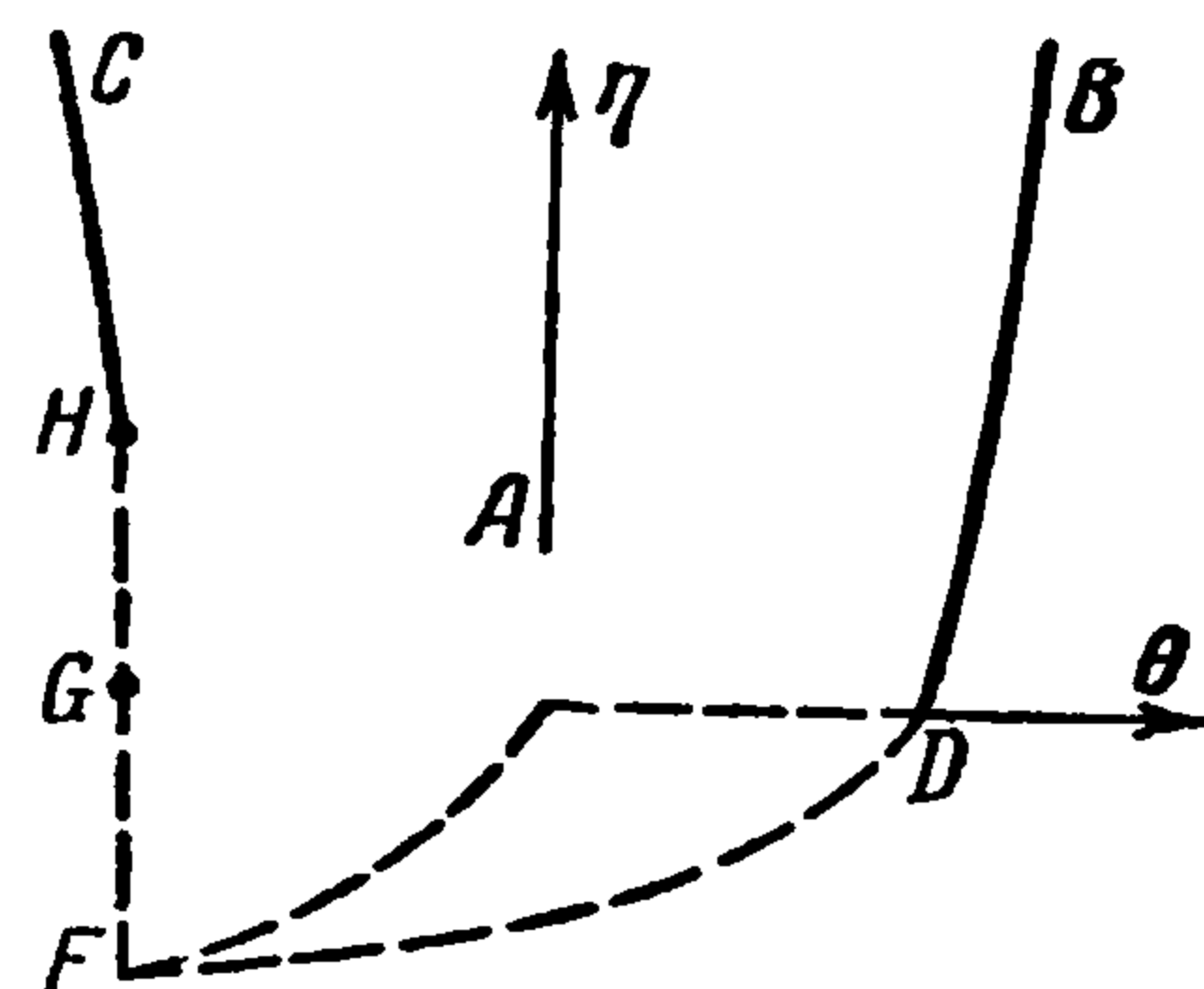
$$\psi^\circ = k\rho^{-1/2} \sin \frac{1}{2} t + 0 \quad (1) \quad (3)$$

в малой окрестности точки A , где

$$\rho = \sqrt{\theta^2 + \frac{4}{9} (\eta^{3/2} - \eta_A^{3/2})^2} \quad (4)$$

$$\left(\rho \sin t = \theta, \quad \rho \cos t = \frac{2}{3} [\eta^{3/2} - \eta_A^{3/2}] \right)$$

$$\psi^\circ(\theta_G, \eta) = \psi^\circ(\theta_G, -\eta), \quad \psi_{\theta}^\circ(\theta_G, \eta) = 0 \quad (5)$$



Фиг. 2

на вертикальном отрезке FGH (здесь FG соответствует передней, GH задней стороне прямого скачка уплотнения)

$$\psi^\circ(\theta, 0) = f(\theta) \text{ на } ED \quad (6)$$

Здесь EF — характеристика. На этой линии никакие краевые условия не задаются. Линия DF , на которой $\psi^\circ = 0$, определяется задним числом после решения краевой задачи.

Если допустить, что точки B, C являются точками возврата профиля, так что там значения скорости отличны от нуля, а значения η конечны, то линия $HCABD$ будет конечной.

В этом случае задача решена Ю. В. Девингталем [3]. Его решение применимо при условии $A = B = C$ (фиг. 4).

После решения задачи I находится при помощи известных формул Чаплыгина обтекаемый профиль $BDFHC$ в физической плоскости, а также прямой скачок уплотнения FGH .

Для решения задачи II целесообразно воспользоваться изменением преобразованной функции тока [4]

$$\delta\omega = \omega - \omega^\circ \quad (7)$$

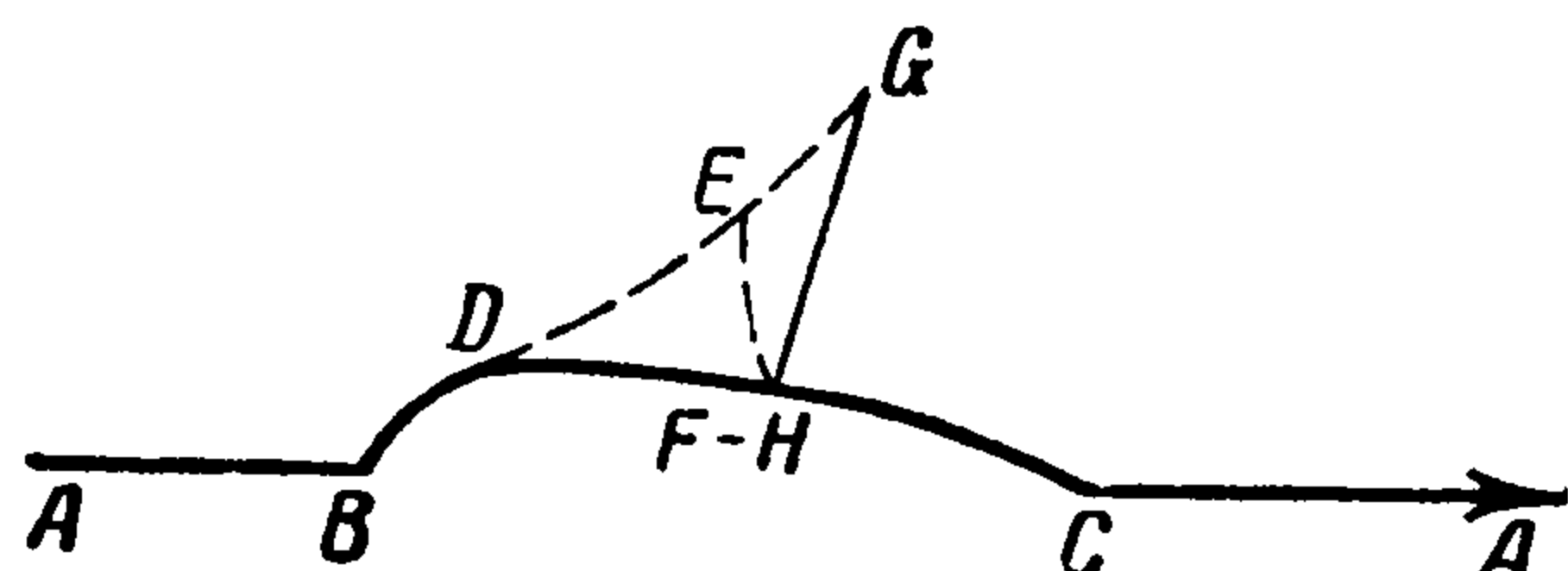
где

$$\omega^\circ = \psi^\circ - \frac{\rho}{\rho_0} (uy^\circ - vx^\circ), \quad \omega = \psi - \frac{\rho}{\rho_0} (uy - vx)$$

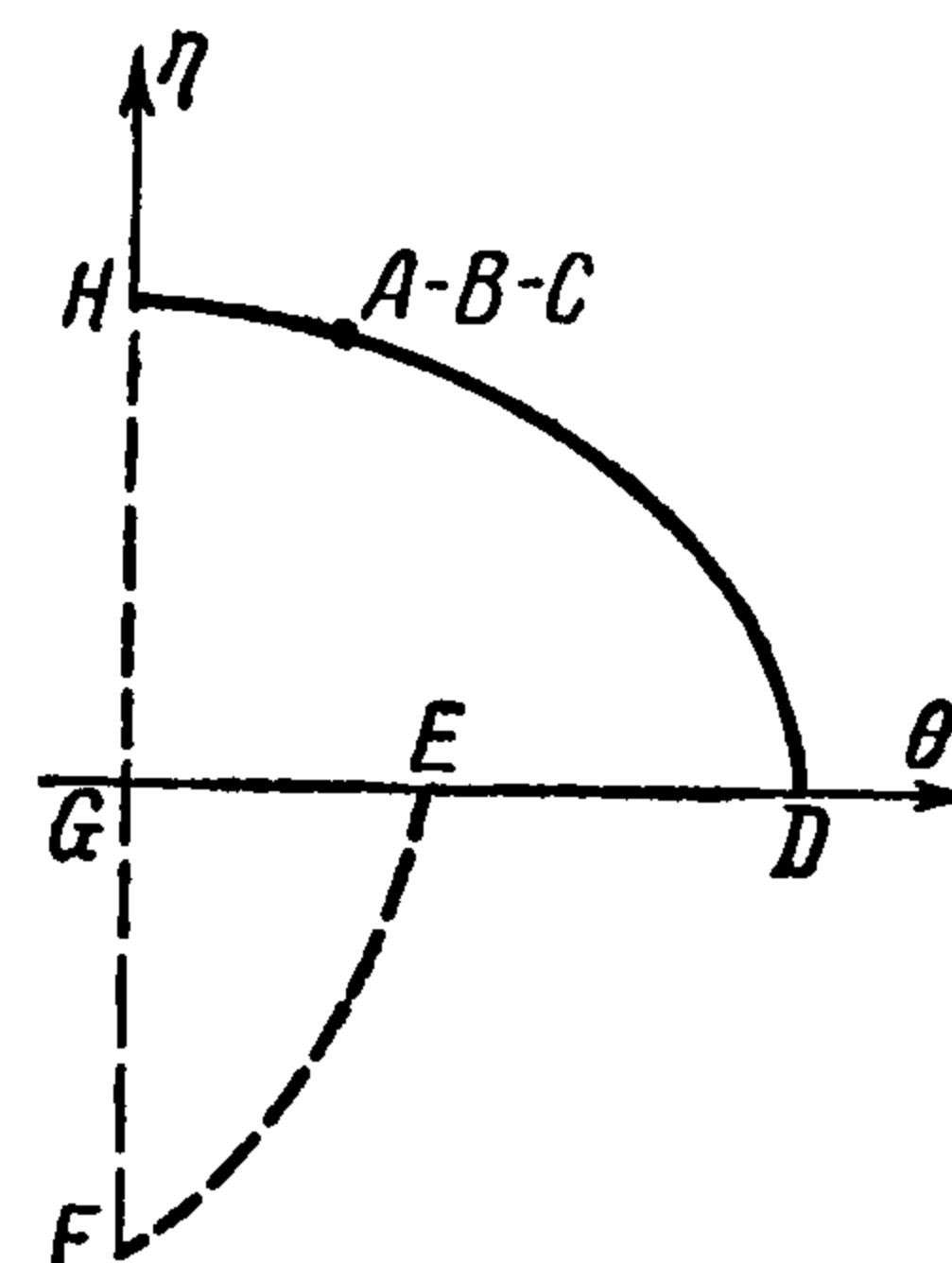
Здесь x, y, x°, y° — значения декартовых координат в физической плоскости как функции θ, η соответственно для задач I, II.

Функции ω°, ω и, следовательно, также $\delta\omega$ удовлетворяют в плоскости годографа в первом приближении уравнению

$$\delta\omega_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{\delta\omega_\eta}{\eta} \right) = 0 \quad (8)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

При малых значениях δn (σ) значения $\delta\omega$ с точностью до величин второго порядка малости известны на линии $HCABDF$ плоскости θ, η ; имеем [4]

$$\delta\omega = -\frac{\rho}{\rho_0} w \delta n \quad (9)$$

На линии BAC , конечно, $\delta n = 0$, $\delta\omega = 0$.

В точке A имеем также $\delta\omega = 0$. Для нахождения условий на FGH напомним, что скачок уплотнения в задаче II, вообще говоря, уже не прямой. Ему соответствует в плоскости θ, η некоторая линия $F'G'H'$, близкая к FGH . На этой линии имеем условия [2]

$$\psi_2 = \psi_1 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} d\varphi_1 &= \frac{C}{\sqrt{2}} \sqrt{-\eta_1 - \eta_2} d\psi_1 \\ d\varphi_2 &= \frac{C}{\sqrt{2}} \sqrt{-\eta_1 - \eta_2} d\psi_2 \end{aligned} \quad \left(C = \left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{1/\kappa - 1} (\kappa + 1)^{1/2} \right) \quad (11)$$

где индексы 1,2 соответствуют передней и задней сторонам скачка уплотнения. При этом величины $\theta_1, \theta_2, \eta_1, \eta_2$ связаны уравнением

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\eta_1 - \eta_2} (\eta_2 - \eta_1) \quad (12)$$

В наших условиях величины $\theta_1 - \theta_G, \theta_2 - \theta_G$ малы, следовательно, величина $\sqrt{-\eta_1 - \eta_2}$ будет того же порядка малости, а величина $(-\eta_1 - \eta_2)$ — второго порядка малости. Условие (10) может быть в первом приближении переписано в виде

$$\psi^\circ(\theta_G, \eta) + \delta\psi(\theta_G, \eta) + \psi_\theta^\circ(\theta_G, \eta) \delta\theta_1 = \psi^\circ(\theta_G, -\eta) + \delta\psi(\theta_G, -\eta) + \psi_\theta^\circ(\theta_G, -\eta) \delta\theta_2$$

где $\delta\theta_1 = \theta_1 - \theta_G, \delta\theta_2 = \theta_2 - \theta_G$ (здесь использовано то обстоятельство, что величина $(-\eta_1 - \eta_2)$ — второго порядка малости).

Но в силу условий (5) отсюда следует

$$\delta\psi(\theta_G, \eta) = \delta\psi(\theta_G, -\eta) \quad (13)$$

но $\delta\psi$ и $\delta\omega$ связаны уравнением

$$\delta\psi = \delta\omega - \frac{\omega \delta\omega_\eta}{1 - M^2}$$

или в данном приближении

$$\delta\psi = \delta\omega + \frac{1}{2} (\kappa + 1)^{2/3} \frac{\omega \delta\omega_\eta}{\eta} \quad (14)$$

Таким образом, функция $\delta\omega(\theta_G, \eta)$ также должна быть четной функцией η :

$$\delta\omega(\theta_G, \eta) = \delta\omega(\theta_G, -\eta) \quad \text{на } FGH \quad (15)$$

Краевые условия (9), (15) определяют функцию $\delta\omega$. Чтобы поставленная краевая задача была законной, необходимо, чтобы вдоль дуги DF

$$-(-\eta)^{-1/2} < \frac{d\eta}{d\theta} \leq (-\eta)^{-1/2}$$

Теорема единственности и существования нами пока доказана только для уравнения М. А. Лаврентьева и А. В. Бицадзе при некоторых дополнительных условиях, наложенных на форму кривой $HCABCDF$ (см. ниже).

Искривленный скачок уплотнения нашего течения определяется на основании уравнений (11), которые после нахождения функций φ, ψ превращаются в дифференциальные уравнения для θ в зависимости от η в нижней и верхней полуплоскостях. В самом деле, имеем

$$\varphi_\eta + \varphi_\theta \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{C}{\sqrt{2}} \sqrt{-\eta_1 - \eta_2} \left(\psi_\eta + \psi_\theta \frac{d\theta}{d\eta} \right) \quad (16)$$

Но

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\eta_1 - \eta_2} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\eta_2 - \eta_1} \approx \frac{\theta_2 - \theta_1}{2|\eta|} \quad (17)$$

где с точностью до ошибки второго порядка малости $\eta_2 = -\eta_1 = \eta$.

В формуле (17) имеем

$$\theta_2(\eta) = \theta(\eta), \quad \theta_1(\eta) = \theta(-\eta) \quad (\eta > 0) \quad (18)$$

Таким образом, имеем с точностью до ошибок второго порядка малости

$$\varphi_\eta(\theta_G, \eta) + \varphi_{\theta\eta}(\theta_G, \eta) \delta\theta_2 + \varphi_\theta(\theta_G, \eta) \frac{d\theta_2}{d\eta} = \frac{\theta_2(\eta) - \theta_1(\eta)}{2\eta} \psi_\eta(\theta_G, \eta) \quad (19)$$

$$-\varphi_\eta(\theta_G, -\eta) - \varphi_{\theta\eta}(\theta_G, -\eta) \delta\theta_1 - \varphi_\theta(\theta_G, -\eta) \frac{d\theta_1}{d\eta} = \frac{\theta_2(\eta) - \theta_1(\eta)}{2\eta} \psi_\eta(\theta_G, -\eta)$$

где $0 < \eta < \eta_H$. При этом должно быть

$$\theta_1(0) = \theta_2(0), \quad \theta(F') = \theta(H') \quad (20)$$

Доказательство существования и единственности решения задачи II даем для уравнения М. А. Лаврентьева и А. В. Бицадзе

$$U_{xx} \operatorname{sign} y + U_{yy} = 0 \quad (21)$$

в области $AOBCEA$, где AOB — отрезок оси y и $OA_1 = OB$, линия BC — прямая с углом наклона $1/4 \pi$, а дуга CEA симметрична (фиг. 5) относительно биссектрисы $y = x$. Можно принять, что $x_c = 1$.

В треугольнике OBC решение имеет вид:

$$U = f(x - y) + g(x + y) \quad (22)$$

Здесь

$$g(2x - 1) = U(x, x - 1), \quad f(1) = 0 \quad (23)$$

Функция g , следовательно, известна на основании краевых условий. Таким образом, на отрезке OC имеем

$$U_x + U_y = 2g'(x) \quad (24)$$

Вследствие предположения о непрерывности первых производных при прохождении через отрезок OC это уравнение имеет место также при приближении к отрезку OC сверху. Отобразим теперь область OCA конформно на верхнюю полуплоскость ξ, η таким образом, что точки, симметричные относительно биссектрисы $y = x$, перейдут в точки, симметричные относительно оси η , а начало координат — в начало координат. Краевое условие (24) принимает вид:

$$U_\xi + U_\eta = 2g'(x) \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| \quad \begin{cases} \xi = \xi + i\eta \\ z = x + iy \end{cases} \quad (25)$$

Введем комплексное переменное $\Phi = U_\xi + iU_\eta$. Пусть $U_\xi(\xi, \eta) = \tau(\xi)$. Тогда имеем в верхней полуплоскости [5]

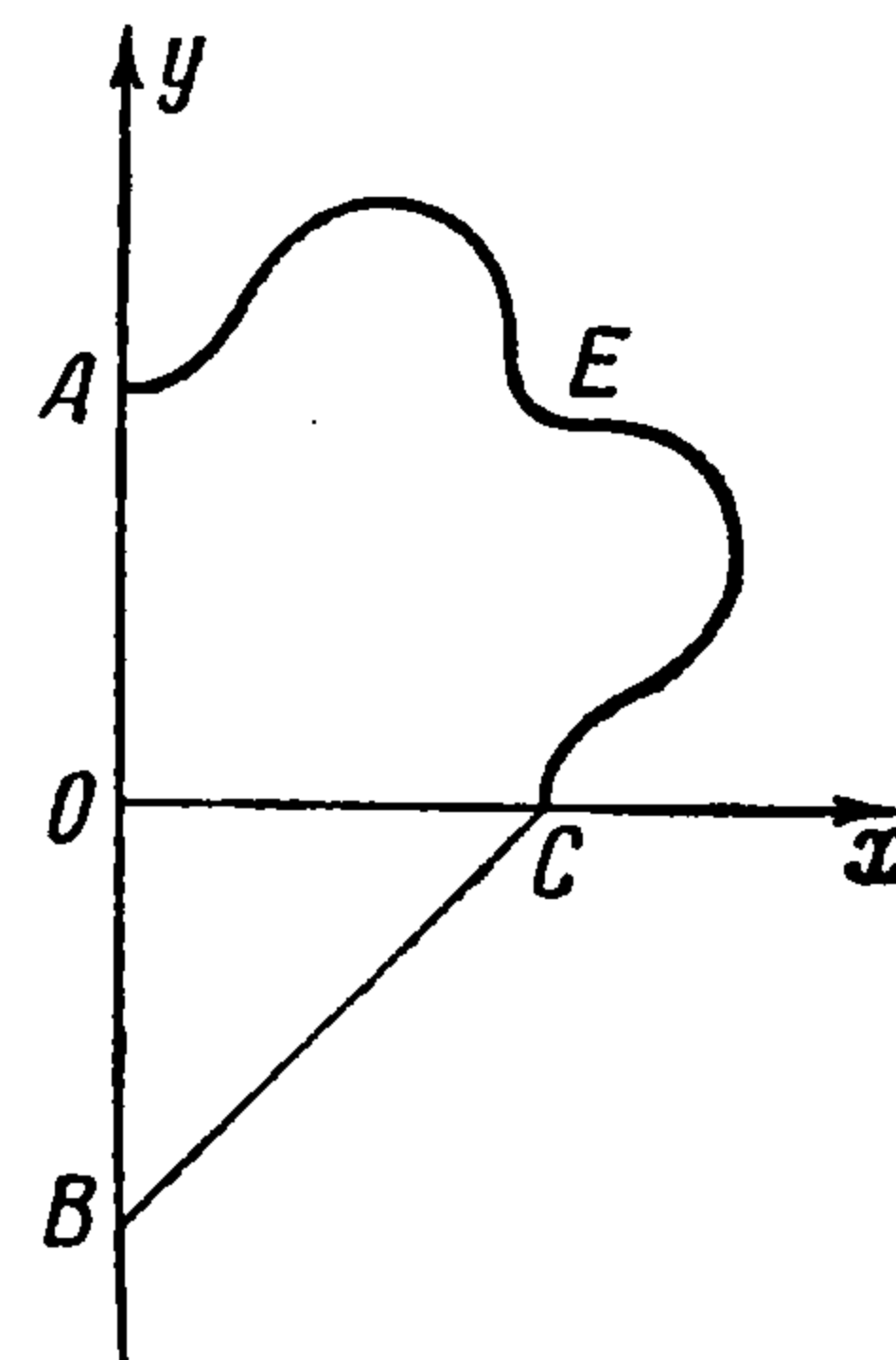
$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(\xi') d\xi'}{\xi' - \zeta} + iC \quad (26)$$

Если предположить, что краевые значения U на линии CA имеют ограниченные первые производные, то в точке ∞ имеем

$$\Phi(\infty) = (U_x + iU_y) \frac{dz}{d\zeta} = 0$$

Следовательно, $C = 0$ и окончательно

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(\xi') d\xi'}{\xi' - \zeta} \quad (27)$$



Фиг. 5

Пусть

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \quad (28)$$

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \left(\int_{-\infty}^{-1} \frac{\tau(\xi') d\xi'}{\xi' - \zeta} + \int_{+1}^{+\infty} \frac{\tau(\xi') d\xi'}{\xi' - \zeta} \right) \quad (29)$$

$$\Phi_2(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{\tau(\xi') d\xi'}{\xi' - \zeta} \quad (30)$$

При $\xi < -1$, $1 < \xi$ функция $\tau(\xi)$ известна по краевым условиям, следовательно, функция $\Phi_1(\zeta)$ известна. Заметим, что при $-1 < \xi < 1$ имеем $U_{1\xi}(\xi, 0) = 0$. При $-1 < \xi < 1$ имеем $\tau(\xi) = -\tau(-\xi)$, так что согласно (30)

$$U_{2\eta}(\xi, +0) = U_{2\eta}(-\xi, +0)$$

При $\xi < -1$, $1 < \xi$ имеем $U_{2\xi} = 0$.

Таким образом, получаем для определения функции следующую задачу Римана—Гильберта

$$1) \quad U_{2\xi} = 0 \text{ при } \xi < -1 \text{ и } 1 < \xi$$

$$2) \quad U_{2\xi} + U_{2\eta} = 2g'[x(\xi)] \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta=\xi} - U_{1\eta}(\xi, 0) \text{ при } 0 < \xi < 1 \quad (31)$$

$$3) \quad U_{2\eta} - U_{2\xi} = 2g'[x(-\xi)] \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta=-\xi} - U_{1\eta}(-\xi, 0) \text{ при } -1 < \xi < 0$$

Решение этой задачи определяется единственным образом вследствие добавочного условия $\Phi_2(\infty) = 0$; это решение имеет вид:

$$\Phi_2(\zeta) = \frac{1+i}{2\pi i} \sqrt[4]{\frac{1-\zeta^2}{\zeta^2}} \int_{-1}^{+1} \frac{c(\xi')}{\xi' - \zeta} \sqrt[4]{\frac{\xi'^2}{1-\xi'^2}} d\xi \quad (32)$$

где

$$c(\xi) = 2g'[x(\xi)] \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta=\xi} - U_{1\eta}(\xi, 0) \quad (0 < \xi < 1) \quad (33)$$

$$c(\xi) = -2g'[x(-\xi)] \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta=-\xi} + U_{1\eta}(-\xi, 0) \quad (-1 < \xi < 0)$$

Под $\sqrt[4]{(1-\zeta^2)/\zeta^2}$ здесь понимается та ветвь этой многозначной функции, которая при стремлении $\zeta \rightarrow \xi + i0$, $0 < \xi < 1$ принимает действительное положительное значение. Тем самым в рассматриваемом случае доказаны существование и единственность решения.

Поступила 6.X.1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. Обтекание профиля потоком дозвуковой скорости сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения, ПММ, т. XX, вып. 2, 1956.
2. Франкль Ф. И. Обтекание профиля дозвуковым потоком с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся искривленным скачком уплотнения. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
3. Девингталь Ю. В. О существовании и единственности решения одной задачи Ф. И. Франкля. Известия ВУЗ, математика, вып. 2, 1958.
4. Никольский А. А. Уравнения в вариациях плоских адиабатических газовых течений. Труды ЦАГИ, 1948. Перепечатано в Сборнике теоретических работ ЦАГИ, 1958.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, М.—Л., 1946.