

ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗОВОЙ СТРУИ ИЗ СОСУДА КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ ПРИ МАКСИМАЛЬНОМ РАСХОДЕ

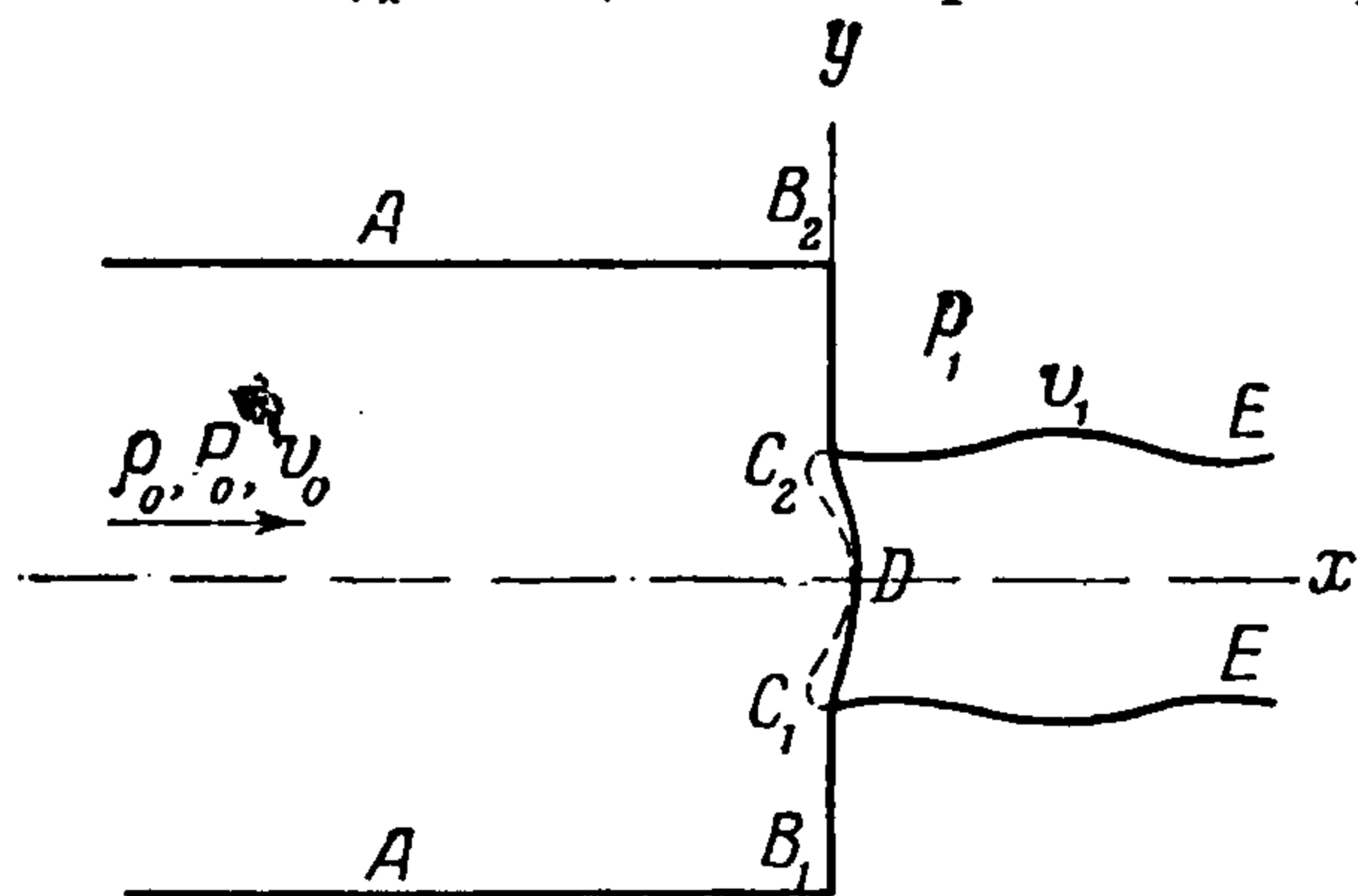
Б. А. Гуцин

(Саратов)

Изучается плоский случай струйных течений газа. Течение предполагается адиабатическим, установившимся и безвихревым. Метод решения задач о таких течениях при наличии одной характерной заданной скорости применительно к дозвуковому случаю разработан С. А. Чаплыгиным [1]. С. В. Фалькович [2] распространил метод Чаплыгина на исследование потоков, обладающих более чем одной характерной скоростью. Решение рассматриваемой здесь задачи основано на применении этого обобщения и на использовании результатов работы Ф. И. Франкля [3], где показано, что задача истечения газовой струи при максимальном расходе сводится к задаче Трикоми [4] для уравнения Чаплыгина

$$4\tau^2(1-\tau)\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} + 4\tau[1+(\beta-1)\tau]\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + [1-(2\beta+1)\tau]\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0 \quad (0.1)$$

§ 1. Имеется плоский сосуд конечной ширины $2B$ с прямыми параллельными стенами (фиг. 1) и отверстием шириной $2b$. Рассматривается истечение из сосуда газовой струи с максимальным расходом $\rho_0 Q$.



Фиг. 1

Течение обладает осью симметрии и является смешанным до- и сверхзвуковым. C_1C_2 — звуковая линия, D — центр сопла. Области потока левее проведенных через центр сопла характеристик DC_1 и DC_2 соответствует на плоскости годографа область, изображенная на фиг. 2, C_1C_1' , DC_1' , DC_2' , C_2C_2' — эллипсы. Координатами на плоскости годографа являются полярные координаты $\tau = v^2/v_{\max}^2$ и угол θ наклона скорости к оси x . Область

имеет прямолинейный разрез величиной τ_0 по горизонтальной оси.

Будем считать, что вдоль линии тока AB_2C_2E функция тока $\psi = +1/2 Q$; тогда вдоль линии тока AB_1C_1E она принимает значение $-1/2 Q$. На плоскости годографа

$$\psi = -\frac{1}{2} Q, \quad \tau_0 > \tau \geq 0, \quad \theta = +0 \quad (1.1)$$

$$\psi = -\frac{1}{2} Q, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_*, \quad \theta = \frac{1}{2} \pi \quad (1.2)$$

$$\psi = -\frac{1}{2} Q, \quad \theta + f(\lambda) = \frac{1}{2} \pi, \quad \frac{1}{2} \pi \geq \theta \geq \frac{1}{4} \pi, \quad (1.3)$$

$$\psi = 0, \quad \tau_0 < \tau < \tau_*, \quad \theta = 0 \quad (1.4)$$

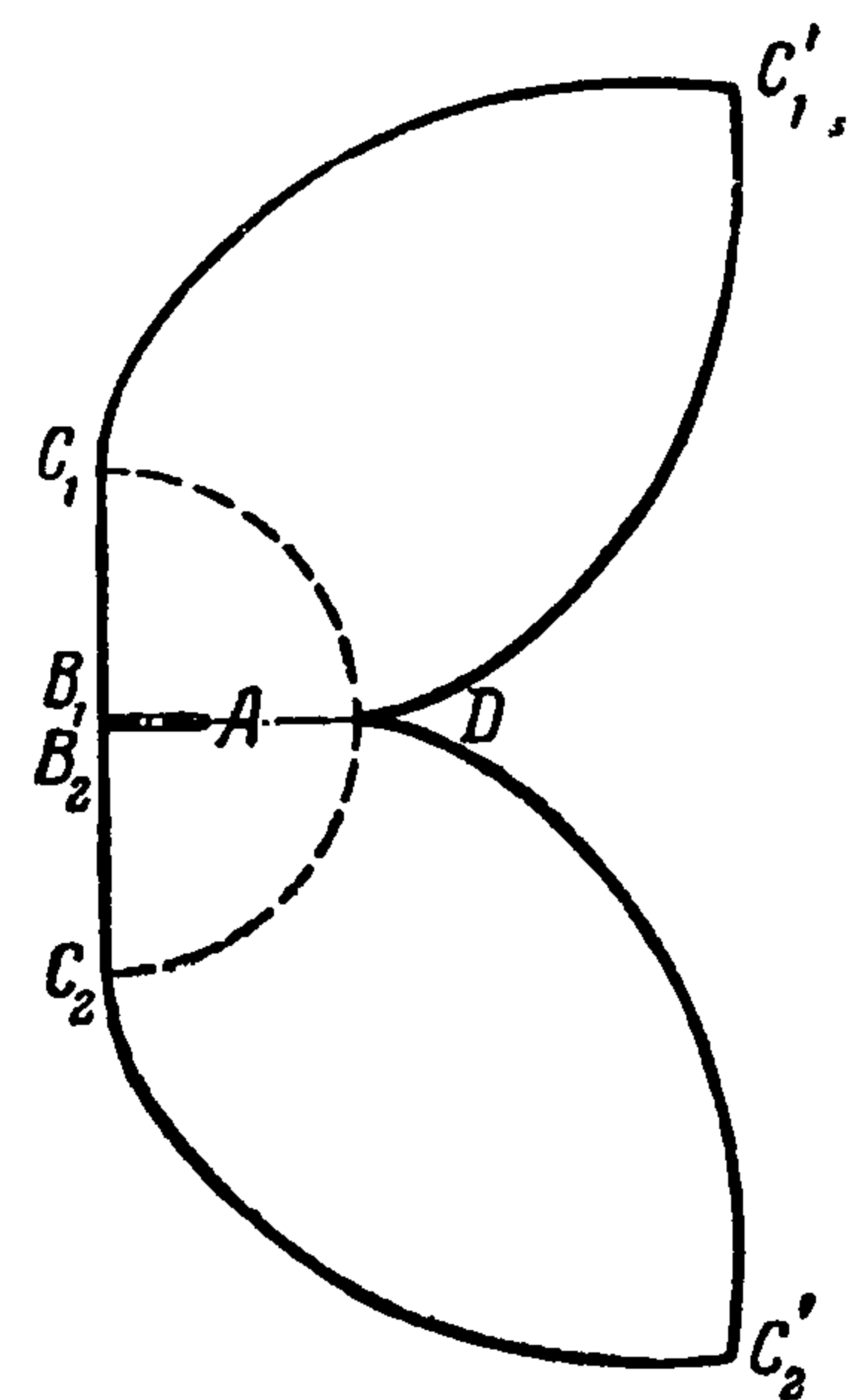
$$\psi = \frac{1}{2} Q, \quad \tau_0 > \tau \geq 0, \quad \theta = -0$$

$$\psi = \frac{1}{2} Q, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_*, \quad \theta = -\frac{1}{2} \pi$$

$$\psi = \frac{1}{2} Q, \quad \theta - f(\lambda) = -\frac{1}{2} \pi, \quad -\frac{1}{2} \pi \leq \theta \leq -\frac{1}{4} \pi$$

$$f(\lambda) = h \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{h^2 - \lambda^2}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} h \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{h^2 - \lambda^2}},$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \tau, \quad h^2 = \frac{x+1}{x-1}$$



Фиг. 2

В силу симметричности течения достаточно рассматривать верхнюю половину области на плоскости годографа. Для определения потока получается следующая задача Трикоми: требуется найти решение уравнения (0.1) в области, ограниченной прямыми B_1C_1 и B_1D и характеристиками (C_1C_1' и DC_1'), принимающее заданные значения (1.1) — (1.4) на границах области.

Если $\psi(\tau, \theta)$ найдена, переход на плоскость потока осуществляется по формулам:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(1-\tau)^{-\beta}}{\nu} \int_0^\theta \left(2\tau \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \cos \theta - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \sin \theta \right) d\theta + x_0(\tau) \\ y &= \frac{(1-\tau)^{-\beta}}{\nu} \int_0^\theta \left(2\tau \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \sin \theta + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cos \theta \right) d\theta + y_0(\tau) \end{aligned} \quad (1.5)$$

§ 2. Проведя дугу окружности $АН$ радиуса τ_0 с центром в начале координат, разбиваем область определения решения задачи на две части.

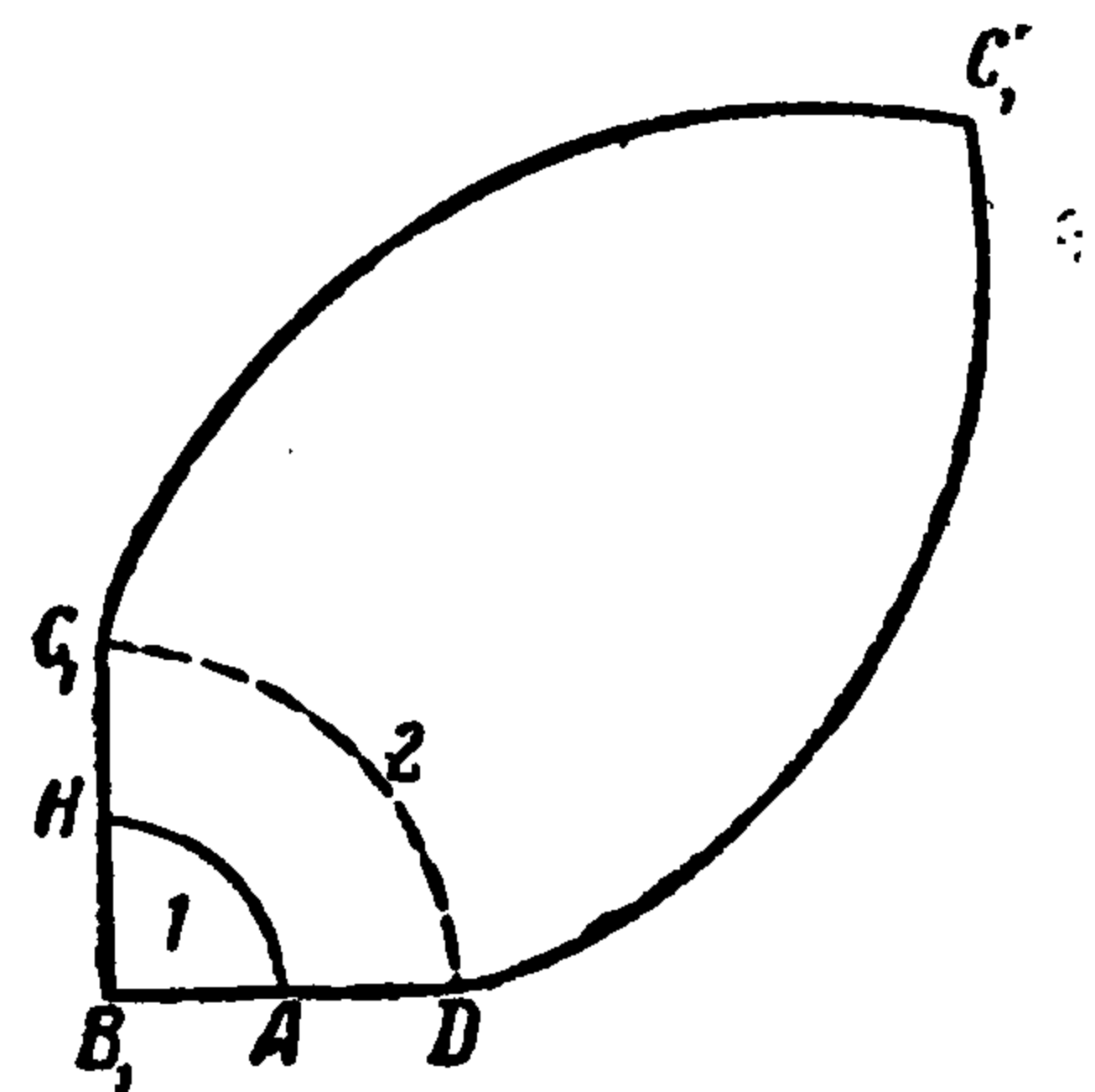
Решение в области 1 (фиг. 3) имеем в виде

$$\psi_1(\tau, \theta) = -\frac{Q}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z_n(\tau) \sin 2n\theta \quad (2.1)$$

где $z_n(\tau)$ — функции Чаплыгина [1].

Решение в области 2 имеем в виде

$$\psi_2(\tau, \theta) = -\frac{Q}{\pi} \theta + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n z_n(\tau) + B_n \zeta_n(\tau)] \sin 2n\theta \quad (2.2)$$



Фиг. 3

где $\zeta_n(\tau) = \psi_{-2n}^*(\tau)$ — функции Черри [2, 5]; функция $\psi_1(\tau, \theta)$ удовлетворяет условиям (1.1) и (1.2), функция $\psi_2(\tau, \theta)$ — условиям (1.2), (1.4), а $\psi_2(\tau, \theta)$ должна быть аналитическим продолжением функции $\psi_1(\tau, \theta)$ в область 2. Поэтому на дуге $АН$:

$$\psi_1(\tau_0, \theta) = \psi_2(\tau_0, \theta), \quad \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} \right)_{\tau=\tau_0} = \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} \right)_{\tau=\tau_0} \quad (2.3)$$

Эти условия дают систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов, из которой можно получить

$$B_n = -\frac{Q}{n\pi} \frac{z_n'(\tau_0)}{W(\tau_0)}, \quad A_n - \alpha_n = \frac{Q}{n\pi} \frac{\zeta_n'(\tau_0)}{W(\tau_0)}, \quad W(\tau_0) = n \frac{(1-\tau_0)^\beta}{\tau_0} \quad (2.4)$$

где $W(\tau_0)$ — значение при $\tau = \tau_0$ определителя Вронского, составленного из функций $z_n(\tau)$ и $\zeta_n(\tau)$. Подставляя, получаем

$$B_n = -\frac{Q\tau_0}{\pi(1-\tau_0)^\beta} \frac{z_n'(\tau_0)}{n^2}, \quad \alpha_n = A_n - \frac{Q\tau_0}{\pi(1-\tau_0)^\beta} \frac{\zeta_n'(\tau_0)}{n^2} \quad (2.5)$$

Выражение (2.2) можно теперь записать в виде

$$\psi_2(\tau, \theta) = -\frac{Q}{\pi} \theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n z_n(\tau) \sin 2n\theta - \frac{Q}{\pi} \frac{\tau_0}{(1-\tau_0)^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} z_n'(\tau_0) \zeta_n(\tau) \frac{\sin 2n\theta}{n^2} \quad (2.6)$$

Принимая во внимание условия [6], которым удовлетворяет функция тока в окрестности центра сопла, представим коэффициенты A_n в виде

$$A_n = \frac{Q}{\pi} \frac{a_0}{n^{4/2} z_n(\tau_*)} + \frac{Q}{\pi} \frac{a_n}{z_n(\tau_*)} \quad (2.7)$$

Аналогичное представление дано Ф. И. Франклем для случая истечения из бесконечно широкого сосуда [7]. При учете (2.7) выражение (2.6) принимает вид:

$$\frac{\pi}{Q} \psi_2 = -\theta + a_0 \psi_2^\circ + \delta \psi_2 \quad (2.8)$$

где

$$\psi_2^\circ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n(\tau)}{z_n(\tau_*)} \frac{\sin 2n\theta}{n^{4/2}} \quad (2.9)$$

$$\delta \psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z_n(\tau)}{z_n(\tau_*)} \sin 2n\theta - \frac{\tau_0}{(1-\tau_0)^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} z_n'(\tau_0) \zeta_n(\tau) \frac{\sin 2n\theta}{n^2} \quad (2.10)$$

Точно определить все неизвестные коэффициенты из условия (1.3) на характеристике C_1C_1' нельзя. Для приближенного определения нескольких коэффициентов a_n в данной работе выбран способ удовлетворения краевого условия (1.3) в нескольких точках характеристики C_1C_1' .

Если коэффициенты a_n определены, (2.1) и (2.8) дают решение поставленной краевой задачи. Имея решение задачи Трикоми, можно определить связь расхода газа Q с параметрами сосуда b/V . Воспользуемся формулой (1.5); интегрировать будем вдоль звуковой линии (вдоль дуги окружности DC_2). На звуковой линии $\tau = \tau_*$ при $\theta = 0$ $y = 0$. Следовательно, $y_0(\tau) = 0$. При $\theta = -1/2\pi$ $y = \epsilon$. Итак,

$$b = \frac{(1 - \tau_*)^{-\beta}}{a_*} \int_0^{-1/2\pi} \left(2\tau_* \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_*} \sin \theta + \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \Big|_{\tau=\tau_*} \cos \theta \right) d\theta$$

$$b = \frac{Q(1 - \tau_*)^{-\beta}}{\pi a_*} \int_0^{-1/2\pi} [f_1(\theta) \cos \theta + 2\tau_* f_2(\theta) \sin \theta] d\theta \quad (2.11)$$

где

$$f_1(\theta) = \frac{\pi}{Q} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \Big|_{\tau=\tau_*}, \quad f_2(\theta) = \frac{\pi}{Q} \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_*}$$

Найдем функции $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$:

$$f_1(\theta) = -1 + a_0 \frac{\partial \psi_2^\circ}{\partial \theta} \Big|_{\tau=\tau_*} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos 2n\theta - \frac{2\tau_0}{(1 - \tau_0)^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} z_n'(\tau_0) \zeta_n(\tau_*) \frac{\cos 2n\theta}{n} \quad (2.12)$$

$$f_2(\theta) = a_0 \frac{\partial \psi_2^\circ}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_*} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z_n'(\tau_*)}{z_n(\tau_*)} \sin 2n\theta - \frac{\tau_0}{(1 - \tau_0)^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} z_n'(\tau_0) \zeta_n'(\tau_*) \frac{\sin 2n\theta}{n^2} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \psi_2^\circ}{\partial \theta} \Big|_{\tau=\tau_*} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{n^{1/2}}, \quad \frac{\partial \psi_2^\circ}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_*} = \frac{1}{\tau_*} \sum_{n=1}^{\infty} X_n^* \frac{\sin 2n\theta}{n^{1/2}}, \quad X_n^* = \frac{\tau_* z_n'(\tau_*)}{n z_n(\tau_*)} \quad (2.14)$$

где $X_n(\tau_*)$ — значение вспомогательной функции Чаплыгина [1]. Для X_n^* Франклем была получена асимптотическая формула [6,7]

$$n^* = -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{x+1} \right)^{x-1} (C_0 n^{-1/2} + C_1 n^{-1} + C_2 n^{-3/2} + C_3 n^{-2}) + \delta X_n^*, \quad \delta X_n^* = O(n^{-3}) \quad (2.15)$$

Подставляя (2.15) в (2.14), получаем

$$\frac{\partial \psi_2^\circ}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_*} = -\frac{1}{2\tau_*} \left(\frac{2}{x+1} \right)^{x-1} \left(C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{n^{2/2}} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{n^{1/2}} + C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{n^2} + \right. \\ \left. + C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{n^{3/2}} \right) + \frac{1}{\tau_*} \sum_{n=1}^{\infty} \delta X_n^* \frac{\sin 2n\theta}{n^{1/2}} \quad (2.16)$$

Введем обозначения

$$I_1 = \int_0^{-1/2\pi} f_1(\theta) \cos(\theta) d\theta, \quad I_2 = \int_0^{-1/2\pi} f_2(\theta) \sin \theta d\theta$$

Для этих интегралов вычисления дают

$$I_1 = 1 + 2a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}(4n^2-1)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n a_n}{4n^2-1} - \frac{2\tau_0}{(1-\tau_0)^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} z_n'(\tau_0) \zeta_n(\tau_*) \frac{(-1)^n}{n(4n^2-1)} \quad (2.17)$$

$$I_2 = -\frac{a_0}{\tau_*} \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \left(C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{-1/2}(4n^2-1)} + C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}(4n^2-1)} + C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(4n^2-1)} + C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}(4n^2-1)} \right) + \frac{2a_0}{\tau_*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \delta X_n^* n^{2/3}}{4n^2-1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z_n'(\tau_*) n (-1)^n}{z_n(\tau_*) (4n^2-1)} - \frac{2\tau_0}{(1-\tau_0)^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} z_n'(\tau_0) \zeta_n'(\tau_*) \frac{(-1)^n}{n(4n^2-1)} \quad (2.18)$$

Выражение (2.11) принимает вид:

$$b = \frac{Q(1-\tau_*)^{-\beta}}{\pi a_*} (I_1 + 2\tau_* I_2) \quad (2.19)$$

Так как $2Bv_0 = Q$, из (2.19) получаем

$$\frac{b}{B} = 2 \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \tau_0 (I_1 + 2\tau_* I_2) \frac{1}{\pi (1-\tau_*)^\beta} \quad (2.20)$$

Найдем коэффициент расхода:

$$\varepsilon = \frac{\rho_0 Q}{2b\rho_* a_*} = \frac{\pi (1-\tau_0)^\beta}{2(I_1 + 2\tau_* I_2)} \quad (2.21)$$

Если провести вычисления по формулам (2.20) и (2.21) для нескольких значений τ_0 , то можно построить зависимость $\varepsilon = \varepsilon(b/B)$. Заметим, что крайние ординаты известны: $\varepsilon(0) = 0.85$ (см) [7] и $\varepsilon(1) = 1$.

§ 3. Для определения коэффициентов a_n необходимо уметь вычислять ψ_2° на характеристике $C_1 C_1'$. Ряд (2.9) для этого не годится, так как при $\tau > \tau_*$ он сходится очень медленно. Для вычисления ψ_2° применим асимптотическую формулу для отношения $z_n(\tau)/z_n(\tau_*)$, полученную С. К. Аслановым [8] при $\tau \geq \tau_*$.

Из нее следует, что

$$\xi_n(\tau) = \frac{z_n(\tau)}{z_n(\tau_*)} = \xi_n^\circ(\tau) + \delta\xi_n \quad (3.1)$$

где

$$\xi_n^\circ(\tau) = A |V(\tau)| n^{-1/2} \sin \left[\frac{4n}{3} (-\eta)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] \quad (3.2)$$

$$A = \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{1/6} \frac{3^{2/3} \Gamma(2/3)}{(1-\tau_*)^{\beta/2} \sqrt{\pi}} = 2.05198$$

$$V(\tau) = \left[\frac{(1-\tau)^{2\beta+1}}{1-\tau/\tau_*} \right]^{1/4}, \quad \eta = \left[\frac{3}{4} \int_{\tau}^{\tau_*} \sqrt{\frac{1-\tau/\tau_*}{1-\tau}} \frac{d\tau}{\tau} \right]^{2/3}$$

Подставляя (3.1) и (3.2) в (2.9), получаем следующее выражение для $\psi_2^\circ(\tau)$ при $\tau \geq \tau_*$:

$$\psi_2^\circ = A |V(\tau)| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta \sin \left[\frac{4}{3} n (-\eta)^{3/2} + \frac{1}{4} \pi \right]}{n^{3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta\xi_n \frac{\sin 2n\theta}{n^{1/2}}$$

которое можно представить в виде

$$\psi_2^\circ = \frac{A|V(\tau)|}{2V^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin [2\theta + \frac{4}{3}(-\eta)^{3/2}]n}{n^{3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin [2\theta - \frac{4}{3}(-\eta)^{3/2}]n}{n^{3/2}} - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos [2\theta + \frac{4}{3}(-\eta)^{3/2}]n}{n^{3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos [2\theta - \frac{4}{3}(-\eta)^{3/2}]n}{n^{3/2}} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta\xi_n \frac{\sin 2n\theta}{n^{4/3}} \quad (3.3)$$

Вычисление $(-\eta)^{3/2}$ дает

$$(-\eta)^{3/2} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{V\tau_*} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\tau - \tau_*}{1 - \tau}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\tau/\tau_* - 1}{1 - \tau}} \right) = \frac{3}{2} f(\lambda) \quad (3.4)$$

Из (3.4) и уравнения $\theta + f(\lambda) = 1/2\pi$ характеристики C_1C_1' следует, что на этой характеристике

$$2\theta + \frac{4}{3}(-\eta)^{3/2} = \pi, \quad 2\theta - \frac{4}{3}(-\eta)^{3/2} = 4\theta - \pi$$

Поэтому выражение (3.3) в точках характеристики C_1C_1' можно записать так:

$$\psi_2^\circ = \frac{A|V(\tau)|}{2V^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (4\theta - \pi)n}{n^{3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (4\theta - \pi)n}{n^{3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \delta\xi_n \frac{\sin 2n\theta}{n^{4/3}} \quad (3.5)$$

§ 4. Тригонометрические ряды в (3.5) нуждаются в усилении их сходимости. Для установления способа усиления сходимости используем формулу, полученную Линделёфом [9]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s} = \Gamma(1-s) (-\ln x)^{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \zeta(s-n) \frac{(\ln x)^n}{n!} \quad (4.1)$$

и справедливую на комплексной плоскости x с разрезом по действительной оси от 1 до ∞ , при $\operatorname{Re}(s) > 1$ и S , не являющихся целыми.

Из формулы (4.1) при $|x| = 1$ и $s - 1 = p/q$ можно получить

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^s} = \Gamma(1-s) \varphi^{s-1} \cos \frac{3p\pi + 4\pi k}{2q} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(s-2n)}{(2n)!} \varphi^{2n} \quad (4.2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^s} = \Gamma(1-s) \varphi^{s-1} \sin \frac{3p\pi + 4\pi k}{2q} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(s-2n-1)}{(2n+1)!} \varphi^{2n+1} \quad (4.3)$$

В формулах (4.2) и (4.3) k принимает одно из значений: $0, 1, 2, \dots, q-1$.

Выражение для главного члена в разложении (4.3) можно получить из других соображений и в другом виде, как, например, это сделано Усубакуновым¹. Сравнение дает

$$\Gamma(1-s) \sin \frac{3p\pi + 4\pi k}{2q} = \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{\pi}{2 \sin^{1/2} \pi s}$$

Отсюда можно найти k , что важно, если требуется считать по формуле (4.2). Для интересующих нас рядов получаем следующие формулы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^{3/2}} = -\sqrt{2\pi} \varphi^{1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(3/2-2n)}{(2n)!} \varphi^{2n} \quad (4.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^{3/2}} = \sqrt{2\pi} \varphi^{1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(3/2-2n-1)}{(2n+1)!} \varphi^{2n+1} \quad (4.5)$$

Ряды в правой части формул сходятся абсолютно при $|\varphi| < 2\pi$.

¹ Истечение плоско-параллельного потока со сверхкритической скоростью через щель из русла конечной ширины (к теории лабиринтных уплотнений паровых турбин и щелевых водосливов). Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Фрунзе, 1955.

§ 5. Положим $\tau_0 = 0.04$ ($M_0 = 0.456$, $p_1/p_0 = 0.0447$). Определение коэффициентов a_n будем производить из удовлетворения краевого условия (1.3) в пяти точках характеристики C_1C_1' . Выбраны следующие точки на характеристике:

$$\begin{array}{ccccc} \tau_j = & +0.26 & 0.32 & 0.38 & 0.44 & 0.50 \\ \theta_j = & 83^\circ 7.70' & 77^\circ 5.63' & 70^\circ 42.58' & 64^\circ 6.91' & 57^\circ 20.27' \end{array}$$

Для определения a_n ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} a_0 \psi_2^\circ(\tau_j, \theta_j) + a_1 \frac{z_1(\tau_j)}{z_1(\tau_*)} \sin 2\theta_j + \dots + a_4 \frac{z_4(\tau_j)}{z_4(\tau_*)} \sin 8\theta_j = \theta_j - \frac{\pi}{2} + \\ + \frac{\tau_0}{(1 - \tau_0)^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} z_n'(\tau_0) \zeta_n(\tau_j) \frac{\sin 2n\theta_j}{n^2} \quad (j=1, 2, 3, 4, 5) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Коэффициенты левой части системы (5.1) вычислены при помощи таблиц функций и формул (3.5), (4.4), (4.5).

Определение элементов последнего столбца расширенной матрицы системы (5.1) требует умения вычислять значения функции Черри $\zeta_n(\tau)$. Знание вронскиана функций $z_n(\tau)$, $\zeta_n(\tau)$ дает дифференциальное уравнение

$$\begin{vmatrix} z_n'(\tau) & \zeta_n'(\tau) \\ z_n(\tau) & \zeta_n(\tau) \end{vmatrix} = n \frac{(1 - \tau)^\beta}{\tau}$$

из которого $\zeta_n(\tau)$ может быть получена с точностью до произвольной постоянной. Будем брать в качестве $\zeta_n(\tau)$ функцию

$$\zeta_n(\tau) = -nz_n(\tau) \int_{\tau^*}^{\tau} \frac{(1-t)^\beta}{t z_n^2(t)} dt \quad (5.2)$$

Вычисления по формуле трапеций дают следующие значения $\zeta_n(\tau)$ и $\zeta_n'(\tau_*)$:

τ	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4
1	0	0	0	0
0.26	-2.30417	-43.9200	-625.110	-7796.64
0.32	-3.04486	-53.3260	-650.808	-6346.84
0.38	-3.41703	-51.3526	-451.938	14813.72
0.44	-3.52153	-41.4922	754.233	71067.36
0.50	-3.43409	-27.6224	5011.317	60575.12
	ζ_1'	ζ_2'	ζ_3'	ζ_4'
$\frac{1}{6}$	-35.6002	-698.478	-10468.7	-140867

Расширенная матрица системы уравнений (5.1):

$$\begin{array}{cccccc} 0.15832 & 0.28126 & -0.58862 & 0.85217 & -1.01807 & -0.130214 \\ 0.31305 & 0.52489 & -0.93088 & 0.95512 & -0.61015 & -0.253112 \\ 0.46084 & 0.73162 & -0.92329 & 0.39706 & 0.06136 & -0.389836 \\ 0.62010 & 0.86567 & -0.61092 & -0.03306 & -0.25588 & -0.506616 \\ 0.78187 & 0.91362 & -0.23207 & +0.10838 & -0.46293 & -0.664797 \end{array}$$

Получены следующие значения a_n :

$$a_0 = 3.22389, \quad a_1 = -3.80398, \quad a_2 = -1.20411, \quad a_3 = -0.49295, \quad a_4 = -0.13810$$

По формулам (2.17) и (2.18) вычислены значения

$$I_1 = 1.38530, \quad I_2 = 0.41096$$

По формулам (2.20) и (2.21) определены отношение параметров сосуда и коэффициент расхода:

$$b/B = 0.749, \quad \varepsilon = 0.932$$

Рассмотренная здесь задача истечения приближенно, на базе уравнения Трикоми, была решена Усубакуновым в 1955 г. Он получил, что $\varepsilon = 0.936$ при $b/B = 0.64$.

Это противоречит полученному выше результату, так как очевидно, что функция $\varepsilon = \varepsilon(b/B)$ должна быть монотонно возрастающей.

Уточнение результата, полученного в данной работе, может быть достигнуто более точным удовлетворением краевого условия на характеристике и более точным вычислением функций $\zeta_n(\tau)$.

Работа выполнена под руководством С. В. Фальковича, которому выражаю самую искреннюю благодарность.

Поступила 9 I 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях. ГИТТЛ, 1949.
2. Фалькович С. В. К теории газовых струй. ПММ, т. XXI, № 4, 1957.
3. Франкль Ф. И. О задачах С. А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений. Изв. АН СССР, сер. матем., т. 9, № 2, 1945.
4. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. Гостехиздат, 1947.
5. Cherry T. M. Asymptotic expansions for the hypergeometric functions occurring in gas-flow theory. Proceedings of the Royal Society of London, ser. A, vol. 202, № 1071, 1950.
6. Франкль Ф. И. К теории сопел Лавалья. Изв. АН СССР, сер. матем., т. 9, № 5, 1945.
7. Франкль Ф. И. Истечение сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками. Докл. АН СССР, т. LVIII, № 3, 1947.
8. Асланов С. К. Асимптотика функций Чаплыгина и их производных. ПММ, т. XXI, № 2, 1957.
9. Truesdell C. On a function which occurs in the theory of the structure of polymers. Annals of Mathematics, vol. 46, № 1, pp. 144—157, 1945.

О ЗАДАЧЕ СИММЕТРИЧНОГО ОБТЕКАНИЯ ЗАДАННОГО СИММЕТРИЧНОГО ПРОФИЛЯ ПРИ ДОЗВУКОВОЙ СКОРОСТИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ И МЕСТНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Ф. И. Франкль

(Нальчик)

В работе [1] автор сформулировал задачу обтекания профиля при наличии местной сверхзвуковой зоны, оканчивающейся прямым скачком уплотнения; в работе [2] им сформулирована аналогичная задача для случая искривленного скачка уплотнения.

При этом требовалось задать годограф части профиля, а также годограф самого скачка уплотнения. Обтекаемый профиль находится при этом задним числом, так что эта задача — не прямая, а обратная.

В настоящей работе покажем, как можно в первом приближении построить обтекание произвольно заданного гладкого профиля с заданной скоростью на бесконечности, предполагая решенной задачу работы [1], если этот профиль близок тому, который получается при решении указанной задачи¹. Первую задачу для краткости обозначим через I, вторую — через II.

Достаточно рассматривать верхнюю половину потока — выше нулевой линии тока, которая состоит из двух бесконечных полупрямых, лежащих на оси x , и верхней части профиля. Верхнюю часть профиля, полученного при решении задачи I, обозначим через L° , соответствующую часть заданного профиля — через L (фиг. 1).

Расстояние точек профиля L от соответствующих точек профиля L° по внешней нормали к последнему обозначим через $\delta n(\sigma)$, где σ — какой-либо параметр, меняющийся вдоль профиля L° . Предполагается, что $\delta n(\sigma)$ — достаточно малая величина.

¹ Задача работы [1] была при некоторых условиях решена Ю. В. Девингталем [3].

