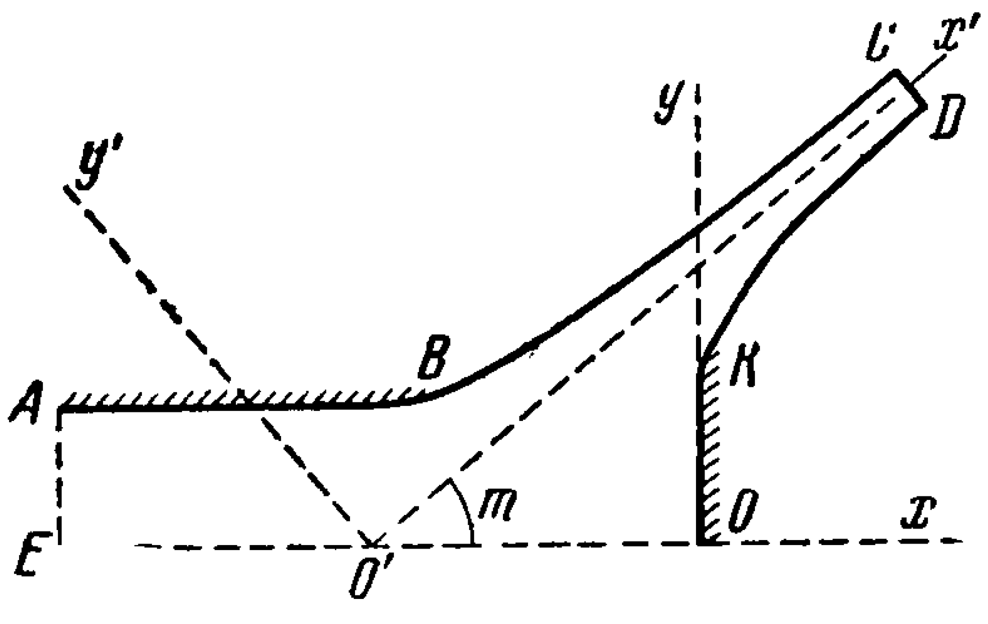
ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНКИ СТРУЕЙ ГАЗА, ВЫТЕКАЮЩЕЙ ИЗ КАНАЛА

В. И. Трошин

(Москва)

Дается решение задачи об обтекании пластинки струей газа, вытекающей из канала с параллельными стенками. При решении используется предложение С. В. Фальковича [1], позволяющее распространить метод Чаплыгина [2] решения задач о газовых струях на струйные задачи с числом характерных скоростей, бо́льшим одной. Решения задачи обтекания пластинки свободной струей газа [2], задачи обтекания пластинки струей несжимаемой жидкости, вытекающей из канала [3], а также других задач следуют из решения данной задачи как частные случаи.

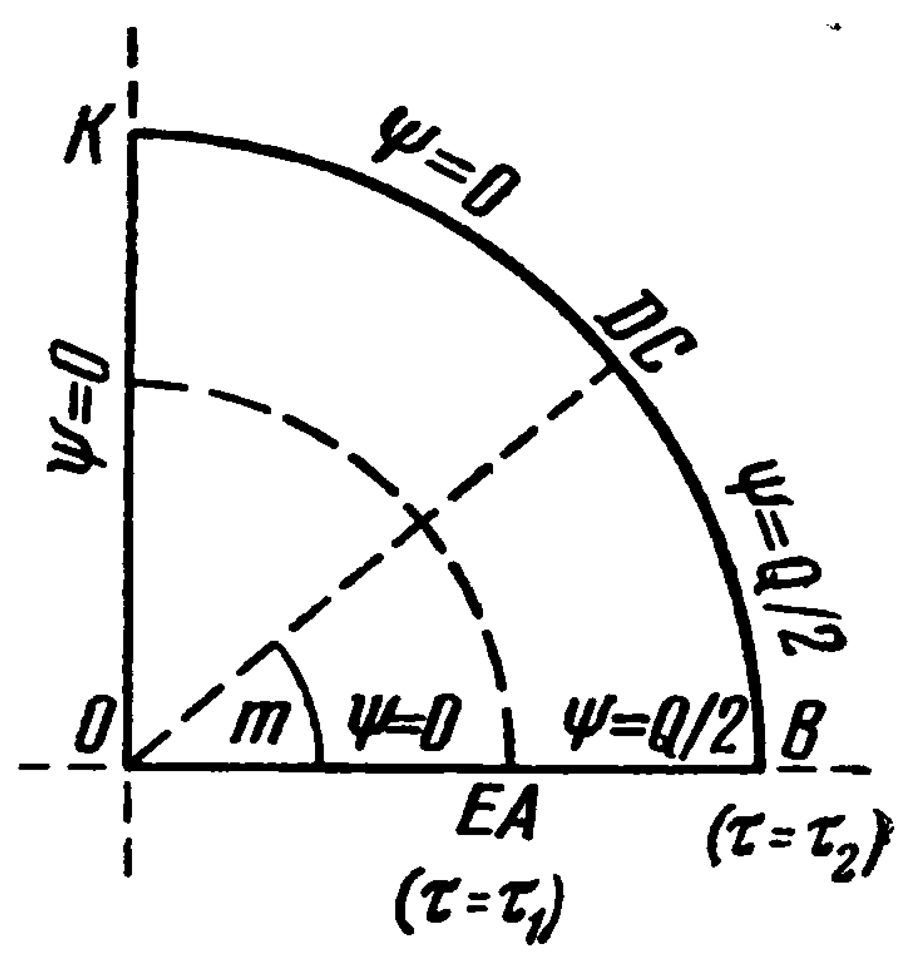


Фиг. 1

§ 1. Ввиду симметрии задачи достаточно рассмотреть лишь половину области течения (фиг. 1).

Здесь AB — стенка канала, EO — ось симметрии, OK — пластинка, BC и DK — свободные поверхности струи. Пусть v_1 — скорость газа на бесконечности в канале, v_2 — скорость газа на свободных струйных поверхностях, m — угол наклона скорости струи газа за пластинкой в бесконечности, $2l$ — длина пластинки, $2d$ — диаметр канала, s — расстояние пластинки от отверстия канала. Если обозначить расход газа через Q и на линии тока $EOKD$ принять $\psi = 0$, то на линии ABC будет $\psi = {}^1/_2\, Q$.

В плоскости годографа $\tau\theta$, т. е. переменных $\tau = v^2 / v_{\max}^2$, где v — скорость, $v_{\max}$ — максимальная скорость истечения, θ — угол наклона скорости к оси x, область течения представится четвертью круга (фиг. 2).



Фиг. 2

Граничные условия следующие:

$$\psi = 0 \quad \text{при } 0 < \tau < \tau_1, \ \theta = 0$$
$$\psi = \frac{1}{2} Q \quad \text{при } \tau_1 < \tau < \tau_2, \ \theta = 0 \qquad (1.1)$$
$$\psi = 0 \quad \text{при } 0 < \tau < \tau_2, \ \theta = \frac{1}{2}\pi$$

$$\psi = \frac{1}{2} Q \quad \text{при } \tau = \tau_2, \ 0 < \theta < m$$
$$\psi = 0 \quad \text{при } \tau = \tau_2, \ m < \theta < \frac{1}{2}\pi \qquad (1.2)$$

Предполагая, что скорости дозвуковые, ищем решение в следующем виде:

$$\frac{\pi}{Q}\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n(\tau) \sin 2n\theta \qquad \text{для } 0 < \tau < \tau_1 \qquad (1.3)$$

$$\frac{\pi}{Q}\psi_2 = \frac{\pi - 2\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n z_n(\tau) + B_n \zeta_n(\tau)\} \sin 2n\theta \text{ для } \tau_1 < \tau < \tau_2 \qquad (1.4)$$

Здесь ψ — функция тока, $z_n(\tau)$ — регулярный при $\tau = 0$ интеграл уравнения Чаплыгина [2], а $\zeta_n(\tau)$ — другой, линейно независимый к первому, интеграл этого же уравнения [1,4].

В дальнейшем будет использовано равенство

$$W(z_n, \zeta_n) = \begin{vmatrix} z_n' \zeta_n' \\ z_n \zeta_n \end{vmatrix} = n\,\frac{(1-\tau)^\beta}{\tau} \qquad \left(\beta = \frac{1}{\gamma - 1}\right) \qquad (1.5)$$

Здесь γ — показатель политропы.

Функция тока ψ, определенная равенствами (1.3) и (1.4), удовлетворяет граничному условию (1.1). Потребуем теперь, чтобы удовлетворялось граничное условие (1.2) и чтобы ψ_2 была аналитическим продолжением ψ_1 из области $0<\tau<\tau_1$ в область $\tau_1<\tau<\tau_2$:

$$\psi_2(\tau_2)=\frac{1}{2}Q \text{ при } 0<\theta<m, \qquad \psi_2(\tau_2)=0 \qquad \text{при } m<\theta<\frac{1}{2}\pi \tag{1.6}$$

$$\psi_1(\tau_1)=\psi_2(\tau_1), \qquad \left[\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau}\right]_{\tau=\tau_1}=\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau}\right]_{\tau=\tau_1} \qquad \text{при } 0<\theta<\frac{1}{2}\pi \tag{1.7}$$

Из (1.6), (1.7), подставив в них выражения для ψ_1 и ψ_2, находим коэффициенты a_n, A_n, B_n. Тем самым определяется и функция тока ψ. Имеем

$$\frac{\pi}{Q}\psi_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{-\cos 2mn+\frac{\tau_1}{n(1-\tau_1)^{\beta}}\left[z_n'(\tau_1)\zeta_n(\tau_2)-z_n(\tau_2)\zeta_n'(\tau_1)\right]\right\}\frac{z_n(\tau)}{z_n(\tau_2)}\sin 2n\theta \tag{1.8}$$

$$\frac{\pi}{Q}\psi_2=\frac{\pi-2\theta}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}f_n(\tau)\sin 2n\theta \tag{1.9}$$

где для удобства записи положено

$$f_n(\tau)=\cos 2mn\frac{z_n(\tau)}{z_n(\tau_2)}-\frac{\tau_1}{(1-\tau_1)^{\beta}n}\left[\zeta_n(\tau_2)z_n(\tau)-z_n(\tau_2)\zeta_n(\tau)\right]\frac{z_n'(\tau_1)}{z_n(\tau_2)} \tag{1.10}$$

При $\tau_1=\tau_2=\tau_0$ из (1.8), используя (1.5), найдем

$$\frac{\pi}{Q}\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-\cos 2mn)\frac{z_n(\tau)}{z_n(\tau_0)}\sin 2n\theta \tag{1.11}$$

Последняя формула дает функцию тока для обтекания пластинки свободной струей газа, полученную С. А. Чаплыгиным [2].

§ 2. Учитывая, что вдоль пластинки $\psi=0=\text{const}$ и $\theta={}^1\!/_2\pi=\text{const}$, получим

$$dy=\frac{1}{\sqrt{2\alpha\tau}}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\Big|_{\theta={}^1\!/_2\pi}d\tau=-\frac{1}{\sqrt{2\alpha\tau}}\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\Big|_{\theta={}^1\!/_2\pi}d\tau \tag{2.1}$$

Здесь $\sqrt{2\alpha}=v_{\max}$. Подставляя в (2.1) функцию тока ψ, данную соотношениями (1.8) и (1.9), и интегрируя от $\tau=0$ $(y=0)$ до $\tau=\tau_2$ $(y=l)$, получим

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{Q}l\sqrt{2\alpha}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n4}{4n^2-1}&\left\{\frac{\cos 2mn}{z_n(\tau_2)(1-\tau_2)^{\beta}}\frac{d}{d\tau}(z_n\sqrt{\tau})_{\tau=\tau_2}-\right.\\
&-\frac{\tau_1}{(1-\tau_1)^{\beta}n}\left[z_n'(\tau_1)\zeta_n(\tau_2)-z_n(\tau_2)\zeta_n(\tau_1)\right]\frac{1}{z_n(\tau_2)(1-\tau_1)^{\beta}}\frac{d}{d\tau}(z_n\sqrt{\tau})_{\tau=\tau_1}-\\
&-\frac{\tau_1}{(1-\tau_1)^{\beta}n}\frac{z_n'(\tau_1)}{z_n(\tau_2)}\left[\zeta_n(\tau_2)\left(\frac{1}{(1-\tau_2)^{\beta}}\frac{d}{d\tau}(z_n\sqrt{\tau})_{\tau=\tau_2}-\frac{1}{(1-\tau_1)\beta}\frac{d}{d\tau}(z_n\sqrt{\tau})\right)_{\tau=\tau_1}-\right.\\
&\left.\left.-z_n(\tau_2)\left(\frac{1}{(1-\tau_2)^{\beta}}\frac{d}{d\tau}(\zeta_n\sqrt{\tau})_{\tau=\tau_2}-\frac{1}{(1-\tau_1)^{\beta}}\frac{d}{d\tau}(\zeta_n\sqrt{\tau})_{\tau=\tau_1}\right)\right]\right\}+\\
&+\left[\frac{1}{\sqrt{\tau_1}(1-\tau_1)\beta}-\frac{1}{\sqrt{\tau_2}(1-\tau_2)^{\beta}}\right]\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь использовано равенство [2]

$$\int_0^{\tau}\frac{1-(2\beta+1)\tau}{\tau(1-\tau)^{\beta+1}}z_n\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}=\frac{4}{4n^2-1}\frac{1}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{d}{d\tau}(z_n\sqrt{\tau})$$

Такое же соотношение имеет место для $\zeta_n(\tau)$. Было также принято во внимание, что

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{1-(2\beta+1)\tau}{\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}=\frac{1}{\sqrt{\tau_1}(1-\tau_1)^{\beta}}-\frac{1}{\sqrt{\tau_2}(1-\tau_2)^{\beta}}$$

Если развернуть выражения $d(z_n\sqrt{\tau})/d\tau$ и $d(\zeta_n\sqrt{\tau})/d\tau$ и исключить $\zeta_n'(\tau)$, пользуясь (1.5), то найдем из (2.2)

$$\frac{\pi}{Q}e\sqrt{2\alpha\tau_2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2}{4n^2-1}\left\{\frac{\cos 2mn}{(1-\tau_2)^\beta}\left[1+2\tau_2\frac{z_n'(\tau_2)}{z_n(\tau_2)}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(1-\tau_1)^\beta}\left[\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{1/2}+2\tau_1\frac{z_n'(\tau_1)}{z_n(\tau_2)}\right]\right\}+\left[\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{1/2}\frac{1}{(1-\tau_1)^\beta}-\frac{1}{(1-\tau_2)^\beta}\right] \qquad (2.3)$$

Таким образом, функции $\zeta_n(\tau)$ вообще исключаются.

Если использовать функцию Чаплыгина $x_n(\tau)$ и выражение для расхода

$$x_n(\tau)=\frac{\tau}{n}\frac{z_n'(\tau)}{z_n(\tau)}, \qquad Q=2d\sqrt{2\alpha\tau_1}(1-\tau_1)^\beta \qquad (2.4)$$

а также равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos 2mn}{4n^2-1}=\frac{\pi\cos m-2}{4} \qquad (2.5)$$

то (2.3) можно записать следующим образом:

$$\frac{l}{d}=1-\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^{1/2}\left(\frac{1-\tau_1}{1-\tau_2}\right)^\beta\cos m+$$

$$+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4n}{4n^2-1}\left[\frac{z_n(\tau_1)}{z_n(\tau_2)}x_n(\tau_1)-\left(\frac{1-\tau_1}{1-\tau_2}\right)^\beta x_n(\tau_2)\cos 2mn\right] \qquad (2.6)$$

§ 3. Для дальнейшего из (1.10) имеем

$$f_n(\tau_2)=\cos 2mn \qquad (3.1)$$

$$f_n'(\tau_2)=\frac{n}{\tau_2}\left[\cos 2mn\, x_n(\tau_2)-\left(\frac{1-\tau_2}{1-\tau_0}\right)^\beta\frac{z_n(\tau_1)}{z_n(\tau_2)}x_n(\tau_1)\right] \qquad (3.2)$$

Соотношение (3.2) получим, дифференцируя (1.10) и используя (1.5) и (2.4).

Вместо осей x, y введем оси x', y', приняв за ось x' прямую, к которой стремятся свободные поверхности струй за пластинкой, а за начало координат O' точку пересечения этой прямой с осью симметрии (фиг. 1). Пусть O' имеет координаты $x=a$, $y=0$. Будем также рассматривать расстояние s как координату, т. е. учитывать ее знак. В новых осях будем иметь

$$\frac{\partial y'}{\partial\theta'}=\frac{1}{v(1-\tau)^\beta}\left[2\tau\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\sin\theta'+\frac{\partial\psi}{\partial\theta'}\cos\theta'\right] \qquad (\theta'=\theta-m) \qquad (3.3)$$

Интегрируя (3.3) от $\theta'=0$ до $\theta'={}^1/_2\pi-m$ и полагая $\tau=\tau_2$, получим для точки K ординату $y'=a\sin m+l\cos m$. Интегрируя от $\theta'=0$ до $\theta'=-m$ и полагая $\tau=\tau_2$, получим для точки B ординату $y'=-(s-a)\sin m+d\cos m$. Если из первого полученного таким образом соотношения вычесть второе, выполнить квадратуры и использовать (2.4), то будем иметь (3.4)

$$\frac{\pi}{2}\frac{v_2(1-\tau_2)^\beta}{v_1(1-\tau_1)^\beta}\left[\frac{s}{d}\sin m+\frac{l}{d}\cos m-\cos m\right]=-\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\tau_2 f_n(\tau_2)}{n}\left[\cos m\frac{2n(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sin m\frac{2n}{4n^2-1}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}2f_n(\tau_2)\left[\cos m\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}-\sin m\frac{1}{4n^2-1}\right]+\cos m+\sin m\right\}$$

Подставив в (3.4) выражения l/d, $f_n(\tau_2)$, $f_n'(\tau_2)$ через (2.6), (3.1) и (3.2), получим

$$\frac{s}{d}=-\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^{1/2}\left\{\left(\frac{1-\tau_1}{1-\tau_2}\right)^\beta\sin m+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{4n^2-1}\left[\frac{z_n(\tau_1)}{z_n(\tau_2)}x_n(\tau_1)-\left(\frac{1-\tau_1}{1-\tau_2}\right)^\beta x_n(\tau_2)\cos 2mn\right]\right\} \qquad (3.5)$$

Соотношения (2.6) и (3.5) устанавливают связь между параметрами задачи l / d, s / d, τ_1, τ_2 и m. Что же касается давления на пластинку R, то оно весьма просто определится из закона о количестве движения

$$R = Qv_2 \left[\frac{v_1}{v_2} - \cos m + F(\tau_1, \tau_2)\right] \qquad (3.6)$$

где

$$F(\tau_1, \tau_2) = \frac{1-\tau_1}{2(\beta+1)\sqrt{\tau_1\tau_2}} \left[\left(\frac{1-\tau_2}{1-\tau_1}\right)^{\beta+1} - 1\right] \qquad (3.7)$$

Легко убедиться, что при $v_{\max} \to \infty$ функция $F(\tau_1, \tau_2)$ переходит в функцию

$$F(v_1, v_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{v_2}{v_1} - \frac{v_1}{v_2}\right) \qquad (3.8)$$

§ 4. Из полученных общих формул вытекают решения ряда частных случаев.

Положив $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$, получим решение задачи об обтекании пластинки свободной струей газа [2]. Из (3.5) найдем $s = -\infty$, что и должно быть. Формулы же (2.6) и (3.6) дадут

$$\frac{l}{d} = 1 - \cos m + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4n}{4n^2 - 1} (1 - \cos 2mn)\, x_n(\tau_0), \qquad R = Qv_0(1 - \cos m)$$

Положив $m = {}^1/_2\pi$, получим решение задачи об ударе газовой струи, вытекающей из канала по беспредельной плоскости. Заметим, что эту задачу можно рассматривать также как задачу о соударении двух газовых струй, вытекающих из двух одинаковых и симметрично расположенных каналов.

Расположение пластинки и канала на фиг. 1 соответствует случаю $s < 0$. При $s > 0$ будем иметь решение задачи об обтекании пластинки, находящейся внутри канала и на конечном расстоянии от выхода из него.

В частности, при $m = 0$ будем иметь решение задачи об обтекании пластинки в канале, имеющем бесконечно удаленный выход. Эта же последняя задача, как было замечено еще Жуковским [3], эквивалентна задаче об истечении из сосуда конечной ширины и бесконечно большой длины, которая для случая газа была решена С. В. Фальковичем [2]. Метод С. В. Фальковича и был использован автором при решении данной задачи.

Полагая в (2.6), (3.5), (3.6), что $\tau_1 = \tau_2 = 0$, получим решение задачи об обтекании пластинки струей несжимаемой жидкости, вытекающей из канала. Ряды в этом случае легко суммируются. Будем иметь

$$\frac{l}{d} = 1 - \frac{v_1}{v_2}\cos m + \frac{2}{\pi}\left[\sin m \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m}{2}\right) + \left(\frac{v_1}{v_2} - \frac{v_2}{v_1}\right) \operatorname{arc\,tg} \frac{v_1}{v_2}\right]$$

$$\frac{s}{d} = -\frac{v_1}{v_2}\left\{\sin m + \frac{2}{\pi}\left[\cos m \ln \operatorname{tg}\frac{m}{2} + \left(\frac{v_1}{v_2} + \frac{v_2}{v_1}\right) \operatorname{Ar\,th}\frac{v_1}{v_2}\right]\right\}$$

$$R = Qv_2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{v_2}{v_1} + \frac{v_1}{v_2}\right) - \cos m\right]$$

Если положить в последних формулах, что

$$\frac{v_1}{v_2} = \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}$$

то они могут быть легко приведены к виду, указанному Жуковским [3].

Поступила 16 IV 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Фалькович С. В. К теории газовых струй. ПММ, XXI, вып. 4, стр. 459—464. 1957.
2. Чаплыгин С. А. О газовых струях. ГТТИ, М.— Л., 1949.
3. Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгоффа... Избр. соч., т. 1, ГИТТЛ, М.— Л., 1948.
4. Cherry T. M. Asymtotic Expansions for the Hypergeometric Functions Occuring in Gas-Flow Theory. Proceedings of the Royal Society of London, ser. A, vol. 202, 1950.