Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБТЕКАНИЕ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКОМ СИЛЬНО РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

Н. Т. Пащенко

(Москва)

В работах [1–8] определялось давление, лобовое сопротивление, теплопередача, грение выпуклых тел, движущихся поступательно в свободно-молекулярном потоке разреженного газа.

В данной работе определяется полная сила, действующая на единицу поверхности, совершающей кроме поступательного, малые нестационарные движения, и как проекции ее на соответствующие направления — давление, трение и т. д. Сделана попытка оценить пригодность рассмотрения методом свободно-молекулярного потока обтекания поверхностей с вогнутостями и получены ограничения на форму поверхности и движение ее. В качестве конкретного примера рассмотрено обтекание колеблющейся пластинки и найдено, что выражение для избыточного давления с точностью до множителя совпадает с известной формулой «поршневой» теории, что может представлять известный теоретический интерес.

1. Пусть в разреженном газе относительно некоторой фиксированной в пространстве системы отсчета поверхность движется поступательно со скоростью $\mathbf{v}$ (это поступательное движение назовем невозмущенным), и пусть при этом поверхность может совершать малые колебания относительно невозмущенного движения. Распределение молекул по скоростям на бесконечности считаем максвелловским; граничное значение функции распределения в системе координат, нормально связанной с поверхностью, задается в виде

$$f(\mathbf{c}, \mathbf{u}) = \begin{cases} N_\infty (h_\infty / \pi)^{3/2} \exp [- h_\infty (\mathbf{c} + \mathbf{u})^2] & \text{при } \mathbf{c}.\mathbf{n} < 0 \\ N_\infty (h_\infty / \pi)^{3/2} (1 - \varepsilon) \exp \{- h_\infty [\mathbf{c} + \mathbf{u} - 2\mathbf{n} (\mathbf{c}.\mathbf{n})]^2\} + \\ \qquad + \varepsilon N (h / \pi)^{3/2} \exp \{- h c^2\} & \text{при } \mathbf{c}.\mathbf{n} > 0 \end{cases} \qquad (1.1)$$

$$(h = m_0 / 2kT)$$

Здесь $\mathbf{c}$ — скорость движения молекул относительно поверхности, $\mathbf{u}$ — скорость возмущенного движения поверхности относительно фиксированной системы отсчета, $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности в возмущенном состоянии, N — число молекул в единице объема, m_0 — масса молекулы, k — постоянная Больцмана. Выражение для T согласно [1] принято в виде $T = T_0 + \frac{\alpha}{\varepsilon}(T_w - T_0)$, где T_w — температура стенки и α — коэффициент аккомодации, T_0 —температура торможения. Индекс ∞ относится к параметрам среды на бесконечности, параметры без индекса характеризуют среду вблизи тела.

Функция распределения в виде (1.1) соответствует функции распределения в условиях обтекания тела свободно-молекулярным потоком, когда длина свободного пробега превышает характерный размер тела; в качестве механизма взаимодействия молекул с поверхностью принята комбинация зеркального отражения и диффузного отражения с аккомодацией [1] с коэффициентом рассеяния ε.

Силу, действующую на поверхность, определяем из соотношения

$$d\mathbf{K} = -\mathbf{F}\,dt$$

$\mathbf{K}$ — количество движения; определяя изменение $\mathbf{K}$ в результате соударений молекул с поверхностью, получим, что действующая на единицу поверхности в единицу времени сила

$$\mathbf{F} = -\left\{m_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dc^1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dc^2 \int\limits_{0}^{\infty} (\mathbf{cn})\,\mathbf{c} f(\mathbf{c}, \mathbf{u})\, dc^3 + m_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dc^1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dc^2 \int\limits_{-\infty}^{0} (\mathbf{cn})\,\mathbf{c} f(\mathbf{c}, \mathbf{u})\, dc^3\right\}$$

Подставляя вместо $f(c, u)$ ее значение из (1.1), получим

$$\mathbf{F} = -\varepsilon\rho_\infty \mathbf{u}\left\{\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{h_\infty}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\right)\right] + \frac{\exp\left[-h_\infty(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})^2\right]}{2\sqrt{\pi h_\infty}}\right\} -$$

$$-\rho_\infty(2 - 2\varepsilon)\,\mathbf{n}\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\left\{\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{h_\infty}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\right)\right] + \frac{\exp\left[-h_\infty(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})^2\right]}{2\sqrt{\pi h_\infty}}\right\} -$$

$$-\frac{(2-\varepsilon)\,\rho_\infty \mathbf{n}}{4h_\infty}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{h_\infty}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\right)\right] - \frac{\varepsilon\rho\mathbf{n}}{4h} \qquad (1.2)$$

Проекция вектора $\mathbf{F}$ на $-\mathbf{n}$ (знак минус, так как положительная нормаль — внешняя) дает выражение давления

$$p = (2-\varepsilon)\,\rho_\infty(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\left\{\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{h_\infty}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\right)\right] + \frac{\exp\left[-h_\infty(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})^2\right]}{2\sqrt{\pi h_\infty}}\right\} +$$

$$+\frac{(2-\varepsilon)}{4h_\infty}\rho_\infty\left[1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{h_\infty}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\right)\right] + \frac{\rho\varepsilon}{4h} \qquad (1.3)$$

Проекция $\mathbf{F}$ на касательную $\mathbf{t}$, ориентированную в направлении скорости $\mathbf{u}$, дает выражение для трения

$$\tau = -\varepsilon\rho_\infty(\mathbf{u}\cdot\mathbf{t})\left\{\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{h_\infty}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\right)\right] + \frac{\exp\left[-h_\infty(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})^2\right]}{2\sqrt{\pi h_\infty}}\right\} \qquad (1.4)$$

Аналогично можно вычислить лобовое сопротивление и подъемную силу.

Таким же образом можно получить количество энергии E, отданное единице поверхности в единицу времени соударяющимися с ней молекулами (при этом учитывается только кинетическая энергия молекул):

$$E = -\frac{m_0}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dc^1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dc^2 \int\limits_{-\infty}^{0} (\mathbf{c}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{c}^2 f(\mathbf{c}, \mathbf{u})\, dc^3 - \frac{m_0}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dc^1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dc^2 \int\limits_{0}^{\infty} (\mathbf{c}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{c}^2 f(\mathbf{c}, \mathbf{u})\, dc^3$$

Или, подставляя $f(\mathbf{c}, \mathbf{u})$:

$$E = \frac{\varepsilon\rho_\infty}{2}\left\{\frac{\exp\left[-h_\infty(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})^2\right]}{h_\infty\sqrt{\pi h_\infty}} + \frac{\mathbf{u}^2\exp\left[-h_\infty(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})^2\right]}{2\sqrt{\pi h_\infty}} + \right. \qquad (1.5)$$

$$\left. + \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{u}^2}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{h_\infty}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\right)\right] + \frac{5}{4}\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})}{h_\infty}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{h_\infty}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\right)\right] - \frac{\rho}{2h\sqrt{\pi h}}\right\}$$

Входящее в (1.2) — (1.5) значение $\rho = m_0 N$ может быть найдено из условия сохранения массы у поверхности

$$-m_0\int\limits_{-\infty}^{\infty} dc^1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dc^2 \int\limits_{-\infty}^{0} (\mathbf{c}\cdot\mathbf{n})\, f(\mathbf{c}, \mathbf{u})\, dc^3 = m_0\int\limits_{-\infty}^{\infty} dc^1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dc^2 \int\limits_{0}^{\infty} (\mathbf{c}\cdot\mathbf{n})\, f(\mathbf{c}, \mathbf{u})\, dc^3$$

Отсюда

$$\rho = \rho_\infty \left\{ \sqrt{\frac{T_\infty}{T}} \exp\left[-h_\infty (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})^2\right] + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) \sqrt{\pi h} \left[1 + \operatorname{erf}(\sqrt{h_\infty}\, \mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\right] \right\} \tag{1.6}$$

Полученное для E выражение при дополнительных предположениях о характере теплообмена может быть использовано для определения нагревания тела.

2. При выводе формул (1.2) — (1.6) принималось, что сталкивающиеся с поверхностью молекулы попадают на поверхность из «бесконечности» в том смысле, что функция распределения при $(\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}) < 0$ принимается максвелловской, соответствующей условиям на бесконечности, что, вообще говоря, справедливо лишь для выпуклых тел. Оценим погрешность, допускаемую при выводе (1.2) — (1.6) за счет того, что с телом, имеющим вогнутость, столкнутся молекулы, не только пришедшие из «бесконечности», но и уже отразившиеся от поверхности.

В случае жесткой поверхности молекулы, отразившиеся и вновь попавшие на поверхность (см. фигуру),— это молекулы, отразившиеся под углом, меньшим или равным β. Так как действительные скорости молекул велики, то можно считать, что расстояния, сравнимые с размерами рассматриваемых поверхностей, молекулы пролетают мгновенно, и в случае поверхностей, изменяющих свою форму во времени, можно подсчитывать молекулы, попадающие на поверхность после отражения, так же, как и в случае жестких поверхностей.

Подсчитаем число молекул, отражающихся под углом β:

$$n_\beta = \iiint_\Omega \mathbf{c}\cdot\mathbf{n} f(\mathbf{c}, \mathbf{u})\, d\Omega$$

Область интегрирования Ω

$$-\infty < c^1 < \infty, \qquad -\infty < c^2 < \infty, \qquad 0 \leqslant c^3 \leqslant \operatorname{tg}\beta \sqrt{(c^1)^2 + (c^2)^2}$$

Вычисляя n_β, получим

$$\begin{aligned} n_\beta = \frac{\varepsilon N}{2\sqrt{\pi h}} \frac{\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta} + (1-\varepsilon) N_\infty (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) \sin\beta \Bigg\{ \sqrt{\frac{h_\infty}{\pi}}\, u \exp(-h_\infty u^2) + \\ + \frac{1}{4}\left[1 - \operatorname{erf}(\sqrt{h_\infty}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\right]\Bigg\} - \frac{N_\infty (1-\varepsilon)}{2\sqrt{\pi h_\infty}} \sin^2\beta \exp(-h_\infty u^2) - \\ - \frac{1}{4}\sin^2\beta N_\infty \sqrt{\frac{h_\infty}{\pi}}\, u^2 \exp(-h_\infty u^2) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Из (2.1) видно, что для малости n_β достаточно выполнения условий:

$$\sin^2\beta \ll 1, \qquad \operatorname{tg}^2\beta \ll 1, \qquad \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{c^\circ}\right)^2 \ll 1 \tag{2.2}$$

где c° — наиболее вероятная скорость молекул в невозмущенной среде. Тогда можно пренебречь молекулами, попавшими на поверхность после отражения, по сравнению с общим числом молекул. При этом, как видно из (2.2), погрешность тем меньше, чем больше $u = |\mathbf{u}|$.

Пусть в фиксированной в пространстве системе отсчета положение точек поверхности в невозмущенном состоянии характеризуется радиусом вектором

$$\mathbf{r}(x^i, t) = \mathbf{r}_0(x^i) + \mathbf{v}t$$

В качестве основного координатного базиса возьмем $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3 = \boldsymbol{\nu}$, где $\boldsymbol{\nu}$ — нормаль к поверхности в невозмущенном состоянии. Пусть точкам деформируемой поверхности отвечает радиус-вектор

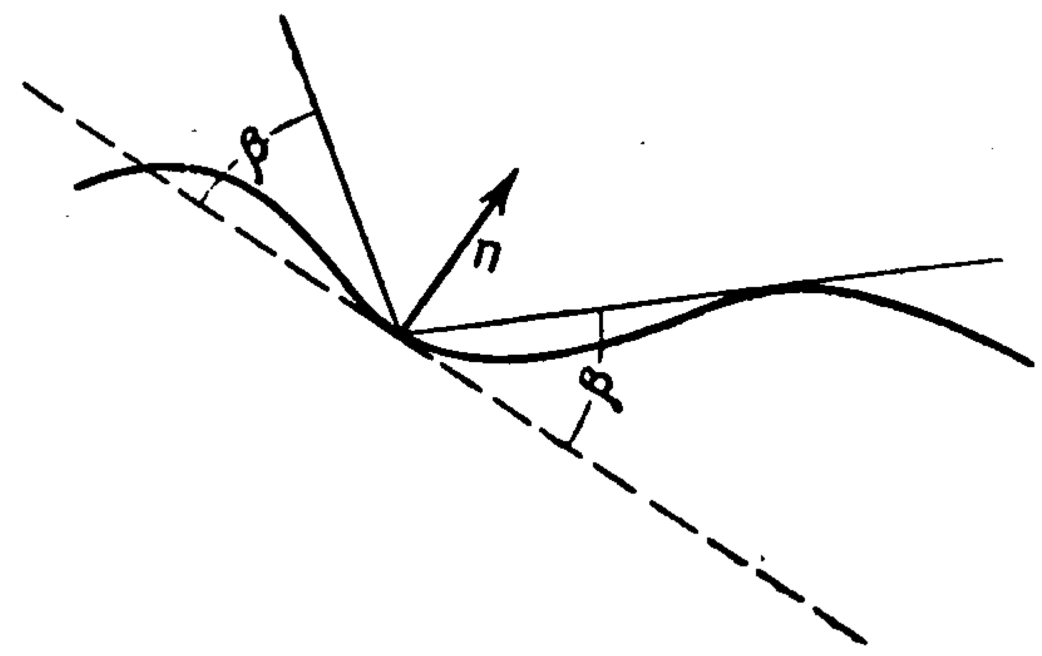
$$\mathbf{R}(x^i, t) = \mathbf{r}(x^i, t) + \mathbf{w}(x^i, t)$$

где $\mathbf{w}(x^i, t) = w^\alpha r_\alpha$ — вектор смещения.

Скорость возмущенного движения поверхности

$$\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = (v^\alpha + w^\alpha{}_{\cdot/t})\,\mathbf{r}_\alpha$$

Вычисляя $\mathbf{n} = n^\alpha \mathbf{r}_\alpha$ и $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = u^\alpha n_\alpha$, можно видеть, что для малости n_β достаточно считать малыми v^3/c°, $w^3{}_{\cdot/t}c^\circ$, $w^3{}_{\cdot/j}$, так чтобы в выражениях для $\mathbf{n}$ и $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$ сохранять лишь линейные относительно этих величин члены. Из геометрических рассмотрений можно видеть (см. фигуру), что этого достаточно для выполнения остальных условий (2.2). Символика $w^i{}_{\cdot/j}$, означающая ковариантную производную, заимствована из [4], дифференцирование производится в базисе $\mathbf{r}_i$.



Полагая для удобства суммирования $w^3{}_{\cdot/3} = -1$, получим с принятой точностью

$$\mathbf{n} = -\mathbf{r}_\alpha g^{\alpha\beta} \overset{3}{w}{}_{\cdot/\beta}, \qquad \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = w^3{}_{\cdot/t} - v^\mu \overset{3}{w}{}_{\cdot/\mu}$$

где $g^{\alpha\beta}$ — основной метрический тензор координации r_i.

Подставляя $\mathbf{n}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$ в (1.2)—(1.6) и удерживая лишь линейные относительно малых величин члены, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \mathbf{r}_\alpha \Bigg\{ &-\frac{\varepsilon\rho_\infty c^\circ}{2\sqrt{\pi}}(v^\alpha + w^\alpha{}_{\cdot/t}) - \frac{\varepsilon\rho_\infty}{2}(v^\alpha - \delta_3{}^\alpha v^3)(w^\alpha{}_{\cdot/t} - v^\mu w^3{}_{\cdot/\mu}) + \\ &+ \left[\frac{p_\infty(2-\varepsilon)}{2} + \frac{\varepsilon p_\infty}{2}\sqrt{\frac{T}{T_\infty}}\right] g^{\alpha\beta} w^3{}_{\cdot/\beta} - \\ &- \delta_3{}^\alpha \left[\frac{\varepsilon\rho_\infty\sqrt{2\pi RT}}{4} + \frac{(4-3\varepsilon)\rho_\infty c^\circ}{2\sqrt{\pi}}\right](w^3{}_{\cdot/t} - v^\mu w^3{}_{\cdot/\mu})\Bigg\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} p = &\left[\frac{2-\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{T}{T_\infty}}\right] p_\infty + \\ &+ \left[\frac{\rho_\infty(2-\varepsilon)c^\circ}{\sqrt{\pi}} + \frac{\varepsilon\rho_\infty\sqrt{2\pi RT}}{4}\right](w^3{}_{\cdot/t} - v^\mu w^3{}_{\cdot/\mu}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\tau = -\frac{\varepsilon\rho_\infty}{2}\sqrt{u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta}}\left(\frac{c^\circ}{\sqrt{\pi}} + w^3{}_{\cdot/t} - v^\mu w^3{}_{\cdot/\mu}\right) \tag{2.5}$$

(при этом вектор $\mathbf{t}$ находится с той же точностью из условий, что $\mathbf{t}\cdot\mathbf{n} = 0$, $|\mathbf{t}| = 1$ и $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{u}$ лежат в одной плоскости).

$$\begin{aligned} E = \frac{\varepsilon\rho_\infty}{2}\Bigg\{ &\frac{2R\,c^\circ}{\sqrt{\pi}}(T_\infty - T) + \frac{c^\circ}{2\sqrt{\pi}}(v^\alpha v^\beta g_{\alpha\beta} + 2g_{\alpha\beta}v^\alpha w^\beta{}_{\cdot/t}) + \\ &+ \tfrac{1}{2}[v^\alpha v^\beta g_{\alpha\beta}(w^3{}_{\cdot/t} - v^\mu w^3{}_{\cdot/\mu})] + \frac{R}{2}(5RT_\infty - 4T)(w^3{}_{\cdot/t} - v^\mu w^3{}_{\cdot/\mu})\Bigg\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

3. В качестве примера рассмотрим пластинку, движущуюся поступательно без угла атаки со скоростью $\mathbf{v}$ в направлении оси x^1 (x^1, x^2 — декартовы координаты в плоскости пластинки); пусть колебания пластинки таковы, что точки ее могут перемещаться лишь в направлении ν; тогда

$$w^1 \equiv w^2 \equiv 0, \quad v^2 \equiv v^3 \equiv 0, \quad w^3 = w, \quad w^3{}_{\cdot/j} = \frac{\partial w}{\partial x^j}, \quad w^3{}_{\cdot/t} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

В этом случае силы, действующие на пластинку, могут быть выражены как функции производных от прогибов и термодинамических переменных в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}_1 \left\{ -\varepsilon\rho_\infty v \left(\frac{\partial w}{\partial t} - v\frac{\partial w}{\partial x^1} \right) - \frac{\varepsilon\rho_\infty c^\circ}{2\sqrt{\pi}} v + \frac{\partial w}{\partial x^1} \left[\frac{(2-\varepsilon)}{2} p_\infty + \frac{\varepsilon p_\infty}{2} \sqrt{\frac{T}{T_\infty}} \right] \right\} +$$
$$+ \mathbf{r}_2 \frac{\partial w}{\partial x^2} \left[\frac{(2-\varepsilon)}{2} p_\infty + \frac{\varepsilon p_\infty}{2} \sqrt{\frac{T}{T_\infty}} \right] + \mathbf{r}_3 \left\{ \left[-\frac{(4-3\varepsilon)\rho_\infty \sqrt{2RT_\infty}}{2\sqrt{\pi}} - \right. \right.$$
$$\left. \left. - \frac{\varepsilon\rho_\infty \sqrt{2\pi RT}}{4} \right] \left(\frac{\partial w}{\partial t} - v\frac{\partial w}{\partial x^1} \right) - \left[\frac{(2-\varepsilon)}{2} p_\infty + \frac{\varepsilon p_\infty}{2} \sqrt{\frac{T}{T_\infty}} \right] - \frac{\varepsilon\rho_\infty \sqrt{RT_\infty}}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial w}{\partial t} \right\} \tag{3.1}$$

$$p = p_\infty \left[\frac{(2-\varepsilon)}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{T}{T_\infty}} \right] + \left(\frac{\partial w}{\partial t} - v\frac{\partial w}{\partial x^1} \right) \left[\frac{\varepsilon\rho_\infty \sqrt{2\pi RT}}{4} + \frac{\rho_\infty (2-\varepsilon) c^\circ}{\sqrt{\pi}} \right] \tag{3.2}$$

$$\tau = -\frac{\rho_\infty \varepsilon v}{2} \left[\frac{c^\circ}{\sqrt{\pi}} + \frac{\partial w}{\partial t} - v\frac{\partial w}{\partial x^1} \right] \tag{3.3}$$

Количество энергии, отданное пластинке:

$$E = \frac{\varepsilon\rho_\infty}{2} \left\{ 2R \frac{c^\circ}{\sqrt{\pi}} (T_\infty - T) + \frac{v^2 c^\circ}{2\sqrt{\pi}} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{v^2}{2} + \frac{R}{2} (5T_\infty - 4T) \right] \left(\frac{\partial w}{\partial t} - v\frac{\partial w}{\partial x^1} \right) \right\} \tag{3.4}$$

Рассмотрим выражения для давления (1.3) и (3.2). Если поверхность находится в состоянии покоя, давление на нее

$$p_0 = p_\infty \left[\frac{2-\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{T}{T_\infty}} \right]$$

где $p_\infty = \rho_\infty RT_\infty$— давление в невозмущенной среде. Давление на поверхность совпадает с давлением в невозмущенной среде, когда либо $\varepsilon = 0$ (только зеркальное отражение, соответствующее граничным условиям идеальной жидкости), либо $\alpha = 0$ (нет обмена энергией между газом и поверхностью [1]). В случае же взаимодействия молекул с поверхностью, при котором происходит обмен энергией, давление на покоящуюся поверхность, а также плотность газа у поверхности отличаются от значений p_∞ и ρ_∞ в невозмущенной среде. На возможность такого явления в разреженных газах указывал еще Максвелл [5].

Рассмотрим избыточное давление на пластинку за счет возмущенного движения ее:

$$\Delta p = p - p_0 = \left[\frac{\varepsilon\rho_\infty \sqrt{2\pi RT}}{4} + \frac{\rho_\infty (2-\varepsilon) c^\circ}{\sqrt{\pi}} \right] \left(\frac{\partial w}{\partial t} - v\frac{\partial w}{\partial x^1} \right) \tag{3.5}$$

Выражение (3.5) с точностью до множителя совпадает с линеаризированной формулой для давления в «поршневой» теории. Это совпадение представляется естественным, так как ограничения на форму поверхности и угол атаки в обоих случаях одни и те же, а граничное условие для функции распределения в виде (1.1) фактически означает принятие гипотезы плоских сечений, следствием которой является «поршневая» теория.

Отличие состоит, главным образом, в том, что предполагая диффузное отражение, т. е. вводя частичное или полное (в зависимости от величины ε) прилипание газа у поверхности, выходим за рамки идеальной жидкости (в смысле граничных условий).

В ряде работ (например, [6]) рассматривались вопросы взаимодействия упругих тонких панелей с газовой средой, избыточное давление которой учитывалось формулой «поршневой теории». Простой пересчет на случай разреженных газов показывает, что наблюдаемые на обычных высотах многие эффекты аэроупругости могли бы быть заметными на больших высотах (вследствие незначительности сил) лишь при скоростях полета, пока еще не достигнутых. Можно показать, однако, что в некоторых неблагоприятных случаях при наличии термических напряжений вопросы динамической устойчивости обшивок могут представлять известный интерес.

Аналогичные выражения могут быть получены для конуса, движущегося без угла атаки со скоростью $\mathbf{v}$; при этом угол раствора конуса должен быть мал, так чтобы величиной $(v/c^\circ)\sin\beta$ можно было пренебречь. В качестве криволинейных координат взяты угол φ и расстояние вдоль образующей l. Тогда при тех же предположениях о характере смещений точек поверхности

$$\Delta p = \left[\frac{(2-\varepsilon)\,\rho_\infty c^\circ}{\sqrt{\pi}} + \frac{\varepsilon\rho_\infty\sqrt{2\pi RT}}{4}\right]\left(\frac{\partial w}{\partial t} - v\cos\beta\,\frac{\partial w}{\partial l} + v\sin\beta\right)$$

$$\tau = -\frac{\varepsilon\rho_\infty v\cos\beta}{2}\left[\frac{c^\circ}{\sqrt{\pi}} + \frac{\partial w}{\partial t} - v\cos\beta\,\frac{\partial w}{\partial l} + v\sin\beta\right]$$

Для цилиндрической поверхности, движущейся в направлении своей оси со скоростью $\mathbf{v}$:

$$\Delta p = -\left[\frac{(2-\varepsilon)}{\sqrt{\pi}}\,\rho_\infty c^\circ + \frac{\varepsilon\rho_\infty\sqrt{2\pi RT}}{4}\right]\left(\frac{\partial w}{\partial t} - v\,\frac{\partial w}{\partial l}\right) \qquad (3.6)$$

$$\tau = -\frac{\varepsilon\rho_\infty v}{2}\left[\frac{c^\circ}{\sqrt{\pi}} + \frac{\partial w}{\partial t} - v\,\frac{\partial w}{\partial l}\right] \qquad (3.7)$$

где криволинейные координаты — угол φ и расстояние вдоль образующей l.

Выражения (3.6), (3.7) такие же, как и для пластинки. Подобные рассмотрения могут быть проведены и для других поверхностей, удовлетворяющих условиям (2.2).

Поступила 9 I 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Tsien H. S. Superaerodynamics, Mechanics of Rarefied Gases, IAS, vol. 13, No. 12, 1946 (русский перевод — сб. статей «Газовая динамика» под ред. С. Г. Попова и С. В. Фальковича, Изд-во иностр. лит., М., 1950).
2. Stalder I. R., Jukoff D. Heat Transfer to Bodies Travelling at High Speed in the Upper Atmosphere. NACA Report, No. 944, 1949 (русский перевод — ВРТ, № 5, 1952).
3. Heyneman M. Theory of Drag in Highly Rarefied Gases, Comm. on Appl. Math., vol. 1, No. 3, 1948.
4. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. ГИТТЛ, М.—Л., 1947.
5. Maxwell J. C. On Stresses in Rarefied Gases Arising from Inequalities of Temperature. Scientific Papers, vol. 2, Paris, 1927.
6. Мовчан А. А. Об устойчивости панели, движущейся в газе. ПММ, т. XXI, вып. 2, 1957.