Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫХ ЗАДАЧ О ВЗРЫВЕ С УЧЕТОМ ПРОТИВОДАВЛЕНИЯ

В. П. Коробейников и Е. В. Рязанов
(Москва)

Постановка и полное аналитическое решение одномерной автомодельной задачи о сильном точечном взрыве в газе даны Л. И. Седовым [1] (см. также [2]). При этом предполагалось, что начальная плотность газа ρ_1 либо постоянна, либо зависит от геометрической координаты r по следующему закону:

$$\rho_1(r) = Ar^{-\omega}, \quad \omega, \quad A - \text{const}, \ A > 0 \tag{0.1}$$

Кроме того, считалось, что начальным давлением p_1 невозмущенного газа можно пренебречь по сравнению с давлением p_2 на фронте ударной волны. Известно, что последнее предположение верно лишь для начальной стадии развития взрыва, т. е. для малых моментов времени. По мере распространения ударной волны влияние начального давления становится существенным. Поэтому в начальных условиях задачи появляется дополнительный размерный параметр p_1, в силу чего задача перестает быть автомодельной, и все безразмерные характеристики течения будут зависеть уже не от одной, а от двух переменных. Неавтомодельную задачу можно решать путем численного интегрирования системы нелинейных уравнений, что было сделано для случая постоянной начальной плотности [3] при помощи быстродействующих вычислительных машин.

Однако можно предложить более простой путь решения задачи для значений $(p_2 - p_1)/p_1 < 1$, который основан на линеаризации исходных уравнений около автомодельного решения. Для задачи о взрыве в совершенном газе с постоянной плотностью и показателем адиабаты $\gamma = 1{,}4$ линеаризированные решения были получены ранее [1, 4, 5]. В этих работах линеаризация велась по безразмерному параметру q, характеризующему интенсивность ударной волны и равному отношению квадрата скорости звука в невозмущенном газе к квадрату скорости ударной волны:

$$q = a_1^2 c^{-2} = \gamma p_1 \rho_1^{-1} c^{-2} \tag{0.2}$$

В настоящей работе рассматривается решение линеаризированной задачи о взрыве с учетом противодавления в среде с переменной начальной плотностью, определяемой формулой (0.1). Используя метод линеаризации по переменному параметру q, выведены уравнения, описывающие одномерные движения, близкие к автомодельным. Найден первый интеграл полученной системы линеаризированных уравнений и дано точное аналитическое решение задачи при

$$\omega = \omega_1 = \frac{3\nu - 2 + \gamma(2 - \nu)}{\gamma + 1}, \tag{0.3}$$

где $\nu = 3$ для сферических, $\nu = 2$ для цилиндрических и $\nu = 1$ для плоских волн.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Исходную систему уравнений газовой динамики, описывающих одномерные адиабатические возмущенные движения совершенного газа за фронтом ударной волны, возьмем в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\nu - 1}{r}v\right) = 0 \\
&\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial r} + \gamma p\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\nu - 1}{r}v\right) = 0
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Для решения задачи о точечном взрыве требуется найти решение системы (1.1) с граничными условиями на фронте ударной волны:

$$v_2 = \frac{2}{\gamma+1}(1-q)c, \qquad \rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1+2q}\rho_1, \qquad p_2 = \frac{2\gamma-(\gamma-1)q}{(\gamma+1)q}p_1 \quad (1.2)$$

Индексом 2 отмечены величины непосредственно за фронтом ударной волны. Пусть $r_2(t)$ — радиус ударной волны. Тогда

$$v_2 = v(r_2, t), \quad \rho_2 = \rho(r_2, t), \quad p_2 = p(r_2, t), \quad c = dr_2/dt$$

Зависимости $v_2(t)$, $\rho_2(t)$, $p_2(t)$, $r_2(t)$ заранее неизвестны, их определение равносильно определению зависимости $q(t)$. Кроме условий (1.2), имеем еще граничное условие для скорости в центре симметрии

$$v(0, t) = 0 \quad (1.3)$$

В момент времени $t = 0$ в центре симметрии выделяется конечная энергия E_0 и заданы начальные условия

$$v(r, 0) = 0, \quad \rho(r, 0) = \rho_1(r) = Ar^{-\omega}, \quad p(r, 0) = p_1 = \text{const}, \quad r_2(0) = 0 \quad (1.4)$$

Из системы определяющих параметров этой задачи A, p_1, E_0, γ, ω, r, t вытекает, что искомые безразмерные функции

$$f = v/c, \qquad g = \rho/\rho_2, \qquad h = p/p_2 \quad (1.5)$$

будут зависеть от двух безразмерных переменных, за которые мы примем

$$\lambda = r/r_2, \qquad q = a_1^2/c^2$$

и постоянных параметров γ и ω.

Переходя к введенным безразмерным переменным и учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r_2}\frac{\partial}{\partial \lambda}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{c}{r_2}\left(r_2\frac{dq}{dr_2}\frac{\partial}{\partial q} - \lambda\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)$$

$$\frac{2}{c^2}\frac{dc}{dt} = \frac{2}{c}\frac{dc}{dr_2} = \frac{d\ln c^2}{dr_2} = \left(\omega - \frac{r_2}{q}\frac{dq}{dr_2}\right)r_2$$

$$\frac{1}{c}\frac{d\ln\rho_2}{dt} = \frac{d\ln\rho_2}{dr_2} = -\frac{1}{r_2}\left(\omega + \frac{2}{\gamma-1+2q}r_2\frac{dq}{dr_2}\right)$$

$$\frac{1}{c}\frac{d\ln p_2}{dt} = \frac{d\ln p_2}{dr_2} = -\frac{2\gamma}{[2\gamma-(\gamma-1)q]q}\frac{dq}{dr_2}$$

систему (1.1) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
&(f-\lambda)\frac{df}{d\lambda} + \frac{(\gamma-1+2q)[2\gamma-(\gamma-1)q]}{\gamma(\gamma+1)^2}\frac{1}{g}\frac{\partial h}{\partial\lambda} + \left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{f}{2q}\right)r_2\frac{dq}{dr_2} + \frac{\omega}{2}f = 0\\
&(f-\lambda)\frac{\partial\ln g}{\partial\lambda} + \frac{\partial f}{\partial\lambda} + \frac{\nu-1}{\lambda}f + \left(\frac{\partial\ln g}{\partial q} - \frac{2}{\gamma-1+2q}\right)r_2\frac{dq}{dr_2} - \omega = 0\\
&(f-\lambda)\frac{\partial\ln h}{\partial\lambda} + \gamma\left(\frac{\partial f}{\partial\lambda} + \frac{\nu-1}{\lambda}f\right) + \left(\frac{\partial\ln h}{\partial q} - \frac{2\gamma}{[2\gamma-(\gamma-1)q]q}\right)r_2\frac{dq}{dr_2} = 0
\end{aligned} \quad (1.6)$$

Безразмерный радиус R_2 ударной волны определим формулой

$$R_2 = r_2/r^\circ \qquad \left(r^\circ = (E_0/p_1)^{\frac{1}{\nu}}\right)$$

где r° — динамическая характерная длина.

Чтобы получить полное решение задачи в принятых переменных, нужно определить зависимости $f(\lambda, q)$, $g(\lambda, q)$, $h(\lambda, q)$, а также $R_2(q)$.

Для этого необходимо найти такое решение системы (1.6) в плоскости λ, q внутри квадрата $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ и $0 \leqslant q \leqslant 1$, которое удовлетворяет следующим краевым условиям:

на скачке

$$f(1, q) = g(1, q) = h(1, q) = 1 \qquad \text{при } \lambda = 1 \tag{1.7}$$

в центре симметрии

$$f(0, q) = 0 \qquad \text{при } \lambda = 0 \tag{1.8}$$

и начальным условиям

$$f(\lambda, 0) = f_0(\lambda), \qquad g(\lambda, 0) = g_0(\lambda), \qquad h(\lambda, 0) = h_0(\lambda) \qquad \text{при } q = 0 \tag{1.9}$$

где $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$, $h_0(\lambda)$ — известные функции, соответствующие автомодельной задаче [1, 2]. Они удовлетворяют системе

$$\begin{gathered}
(f_0 - \lambda) f_0' + \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \frac{h_0'}{g_0} + \frac{\omega - \nu}{2} f_0 = 0 \\
(f_0 - \lambda) \frac{g_0'}{g_0} + f_0' + \frac{\nu - 1}{\lambda} f_0 - \omega = 0 \\
(f_0 - \lambda) \frac{h_0'}{h_0} + \gamma \left(f_0' + \frac{\nu - 1}{\lambda} f_0 \right) - \nu = 0
\end{gathered} \tag{1.10}$$

причем

$$f_0(1) = \frac{2}{\gamma + 1}, \qquad g_0(1) = h_0(1) = 1, \qquad f_0(0) = 0 \tag{1.11}$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, штрихи будут означать дифференцирование по λ. Заметим, что систему (1.10) можно получить из (1.6) предельным переходом при $q \to 0$.

При малых значениях q, т. е. для моментов времени, когда взрыв еще достаточно сильный, решение поставленной выше задачи можно искать в виде

$$\begin{gathered}
f(\lambda, q) = f_0(\lambda) + q f_1(\lambda) + \ldots \\
g(\lambda, q) = g_0(\lambda) + q g_1(\lambda) + \ldots \qquad \frac{R_2}{q} \frac{dq}{dR_2} = \frac{\nu}{1 + A_1 q + \ldots} \\
h(\lambda, q) = h_0(\lambda) + q h_1(\lambda) + \ldots
\end{gathered} \tag{1.12}$$

Так как будет решаться линеаризированная задача, то из (1.6), принимая во внимание систему (1.10) и пренебрегая членами порядка q^2 и выше, получим для определения функций $f_1(\lambda)$, $g_1(\lambda)$, $h_1(\lambda)$ и постоянной A_1 систему линейных уравнений

$$\begin{gathered}
(f_0 - \lambda) g_0 f_1' + \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} h_1' + \left(f_0' + \frac{\omega + \nu}{2} \right) g_0 f_1 + \\
+ \left[(f_0 - \lambda) f_0' + \frac{\omega - \nu}{2} f_0 \right] g_1 + \frac{4\gamma - (\gamma - 1)^2}{\gamma (\gamma + 1)^2} h_0' + \frac{\nu}{2} f_0 g_0 A_1 = 0 \\
g_0 f_1' + (f_0 - \lambda) g_1' + \left(\frac{\nu - 1}{\lambda} g_0 + g_0' \right) f_1 + \\
+ \left(\frac{\nu - 1}{\lambda} f_0 + f_0' + \nu - \omega \right) g_1 - \frac{2\nu}{\gamma - 1} g_0 = 0 \\
\gamma h_0 f_1' + (f_0 - \lambda) h_1' + \left(h_0' + \gamma \frac{\nu - 1}{\lambda} h_0 \right) f_1 + \gamma \left(f_0' + \frac{\nu - 1}{\lambda} f_0 \right) h_1 - \\
- \nu \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} - A_1 \right) h_0 = 0
\end{gathered} \tag{1.13}$$

Из условий (1.7), (1.8), учитывая (1.11) и (1.12), получим краевые условия для искомых функций $f_1(\lambda)$, $g_1(\lambda)$ и $h_1(\lambda)$:

$$f_1(1) = -\frac{2}{\gamma+1}, \qquad g_1(1) = h_1(1) = f_1(0) = 0 \tag{1.14}$$

Систему (1.13) можно преобразовать к виду, более удобному для дальнейших исследований. С этой целью введем новые искомые функции $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ и $H(\lambda)$, связанные с функциями $f_1(\lambda)$, $g_1(\lambda)$ и $h_1(\lambda)$ соотношениями

$$f_1(\lambda) = (f_0-\lambda)F, \qquad g_1(\lambda) = g_0 G, \qquad h_1(\lambda) = h_0 H \tag{1.15}$$

После преобразований система (1.13) запишется так:

$$(f_0-\lambda)^2 F' + \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\frac{h_0'}{g_0} H' + (f_0-\lambda)\left(2f_0' + \frac{\omega+\nu-2}{2}\right)F + \tag{1.16}$$

$$+\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\frac{h_0'}{g_0} H + \left[(f_0-\lambda)f_0' + \frac{\omega-\nu}{2}f_0\right]G + \frac{4\gamma-(\gamma-1)^2}{\gamma(\gamma+1)^2}\frac{h_0'}{g_0} + \frac{\nu}{2}f_0 A_1 = 0$$

$$(f_0-\lambda)F' + (f_0-\lambda)G' + (f_0'-1)F + \left(\frac{\nu-1}{\lambda} + \frac{g_0'}{g_0}\right)(f_0-\lambda)F +$$

$$+\left(\frac{\nu-1}{\lambda}f_0 + f_0' + \nu - \omega\right)G + (f_0-\lambda)\frac{g_0'}{g_0}G - \frac{2\nu}{\gamma-1} = 0 \tag{1.17}$$

$$\gamma(f_0-\lambda)F' + (f_0-\lambda)H' + (f_0'-1)\gamma F + (f_0-\lambda)\left(\frac{h_0'}{h_0} + \gamma\frac{\nu-1}{\lambda}\right)F +$$

$$+(f_0-\lambda)\frac{h_0'}{h_0}H + \gamma\left(f_0' + \frac{\nu-1}{\lambda}f_0\right)H - \nu\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} - A_1\right) = 0 \tag{1.18}$$

Из двух последних уравнений этой системы можно получить первый интеграл. Покажем это.

2. Интеграл системы (1.16) — (1.18) и закон движения ударной волны. Если исключить из уравнений (1.17) и (1.18) величины g_0'/g_0 и h_0'/h_0, то будем иметь

$$(f_0-\lambda)(F'+G') + (\omega-\nu)F + \nu G - \frac{2\nu}{\gamma-1} = 0$$

$$(f_0-\lambda)(\gamma F' + H') - \nu(\gamma-1)F + \nu H - \nu\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} - A_1\right) = 0$$

Сделав замену независимой переменной по формуле

$$\mu = \int_\lambda^1 \frac{d\lambda}{f_0-\lambda}$$

получим

$$\frac{d}{d\mu}(F+G) + (\omega-\nu)F + \nu G - \frac{2\nu}{\gamma-1} = 0$$

$$\frac{d}{d\mu}(\gamma F + H) - \nu(\gamma-1)F + \nu H - \nu\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} - A_1\right) = 0$$

Умножая теперь первое уравнение на $\nu(2\gamma-1)/(\omega-2\nu)$, прибавляя к полученному второе уравнение и интегрируя результат, находим

$$\left[\frac{\nu(2\gamma-1)}{\omega-2\nu} + \gamma\right]F + \frac{\nu(2\gamma-1)}{\omega-2\nu}G + H = C_1\exp(-\nu\mu) + \frac{2\nu}{\gamma-1}\frac{2\gamma-1}{\omega-2\nu} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} - A_1$$

Из граничных условий

$$F(1) = \frac{2}{\gamma-1}, \qquad G(1) = 0, \qquad H(1) = 0, \qquad \mu(1) = 0$$

найдем постоянную интегрирования

$$C_1 = \frac{(3\gamma-1)(\gamma+1)}{2\gamma(\gamma-1)} + A_1$$

Если воспользоваться уравнением адиабатичности для автомодельных движений

$$(f_0-\lambda)\left(\frac{h_0'}{h_0} - \gamma\frac{g_0'}{g_0}\right) + \gamma\omega - \nu = 0$$

и учесть, что $\mu = 0$, $g_0 = 1$, $h_0 = 1$ при $\lambda = 1$, то получим

$$e^{-\mu} = (h_0 / g_0^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma\omega-\nu}}$$

Таким образом, найден первый интеграл системы (1.16)—(1.18), удовлетворяющий граничным условиям на ударной волне:

$$\left[\frac{\nu(2\gamma-1)}{\omega-2\nu} + \gamma\right]F + \frac{\nu(2\gamma-1)}{\omega-2\nu}G + H =$$

$$= \left[\frac{(3\gamma-1)(\gamma+1)}{2\gamma(\gamma-1)}A_1\right]\left(\frac{h_0}{g_0^{\gamma}}\right)^{\frac{\nu}{\gamma\omega-\nu}} + \frac{2\nu}{\gamma-1}\frac{2\gamma-1}{\omega-2\nu} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} - A_1 \qquad (2.1)$$

Существование интеграла, аналогичного (2.1), было доказано М. Л. Лидовым [6].

При помощи полученного интеграла (2.1) задача сводится к решению системы двух линейных уравнений, которое для произвольных значений ω может быть найдено численным интегрированием.

После нахождения величины A_1 можно найти зависимости $R_2(q)$ и $\tau(q)$, где $R_2 = r_2 / r^\circ$, $\tau = t / t^\circ$, при этом r° — динамическая длина, введенная ранее, а t° — динамическое время, определенное формулой

$$t^\circ = E_0^{1/\nu} A^{1/2} r^{\circ-\omega/2} p_1^{-(\nu+2)/2\nu}$$

Известно [1], что для автомодельного решения имеют место

$$r_2(t) = \left(\frac{E_0}{\alpha A}\right)^{\delta/2} t^{\delta}, \qquad c^2 = \delta^2 r_2^2 t^{-2}, \qquad \delta = \frac{2}{\nu+2-\omega} \qquad (2.2)$$

где $\alpha(\gamma, \omega)$ — известная величина.

Если преобразовать (2.2) к введенным безразмерным переменным, то можно найти зависимость $R_2(q)$ и $\tau(q)$ в автомодельной задаче:

$$R_2^{\nu}(q) = \frac{\delta^2}{\gamma\alpha}q, \qquad \tau(q) = \left(\frac{\delta^2}{\gamma\alpha}\right)^{\frac{2-\nu\delta}{2\nu\delta}} (\nu\gamma^{1/2})^{-1} q^{\frac{1}{\nu\delta}} \qquad (2.3)$$

Для линеаризированной задачи из (1.12) путем интегрирования и с учетом (2.3) получим

$$R_2^{\nu}(q) = \frac{\delta^2}{\gamma\alpha} q \exp(A_1 q) \qquad (2.4)$$

Найдем $\tau(q)$. Используя определения q, τ, R_2, легко показать, что

$$\frac{dR_2}{d\tau} = \left(\frac{\gamma R_2^{\omega}}{q}\right)^{1/2}$$

Так как $d\tau/dq = (dR_2/dq)(d\tau/dR_2)$, то, учитывая (2.4), найдем

$$\frac{d\tau}{dq} = \left(\frac{\delta^2}{\gamma\alpha}\right)^{\frac{2-\omega}{2\nu}} \left(\nu\gamma^{1/2}\right)^{-1} (1 + A_1 q)\, q^{\frac{2-\nu-\omega}{2\nu}} \exp\left(\frac{2-\omega}{2\nu} A_1 q\right)$$

Для малых значений q можно записать

$$(1 + A_1 q)\exp\left(\frac{2-\omega}{2\nu} A_1 q\right) = 1 + \frac{2\nu + 2 - \omega}{2\nu} A_1 q$$

Таким образом, для определения $\tau(q)$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\tau}{dq} = \left(\frac{\delta^2}{\gamma\alpha}\right)^{\frac{2-\omega}{2\nu}} \left(\nu\gamma^{1/2}\right)^{-1} \left[1 + \frac{2\nu + 2 - \omega}{2\nu} A_1 q\right] q^{\frac{2-\nu-\omega}{2\nu}}$$

Интегрируя это уравнение и определяя постоянную интегрирования из условия $\tau(0) = 0$, находим искомую зависимость

$$\tau(q) = \left(\frac{\delta^2}{\gamma\alpha}\right)^{\frac{2-\nu\delta}{2\nu\delta}} \left(\nu\gamma^{1/2}\right)^{-1} q^{\frac{1}{\nu\delta}} \left[\nu\delta + \frac{\nu\delta + 2}{2(\nu\delta + 1)} A_1 q\right] \tag{2.5}$$

Соотношения (2.4), (2.5) в параметрическом виде дают закон движения ударной волны, т. е. зависимость $R_2(\tau)$.

Пользуясь (2.4), (2.5) и условиями на ударной волне (1.2), можно определить зависимость всех характеристик фронта ударной волны от ее радиуса и времени.

3. Точное решение задачи при $\omega = \omega_1$. Выше показано, что решение линеаризированной задачи о взрыве в среде с переменной плотностью всегда можно получить путем численного интегрирования системы (1.16)—(1.18). Однако в случае, когда

$$\omega = \omega_1 = \frac{3\nu - 2 + \gamma(2-\nu)}{\gamma + 1}$$

решение этой задачи можно дать в виде конечных формул. Это объясняется тем, что при этом значении ω автомодельное решение имеет простой вид:

$$f_0(\lambda) = \frac{2}{\gamma + 1}\lambda, \qquad g_0(\lambda) = \lambda^{\nu-2}, \qquad h_0(\lambda) = \lambda^\nu \tag{3.1}$$

Подставив $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$, $h_0(\lambda)$ из (3.1) в коэффициенты уравнений (1.16) — (1.18), получим систему трех обыкновенных неоднородных уравнений с коэффициентами, зависящими от параметров γ и ν:

$$\lambda F' + \frac{2}{\gamma - 1}\lambda H' - \frac{2(\nu+1)}{\gamma - 1} F - \frac{2\nu}{\gamma - 1} G + \frac{2\nu}{\gamma - 1} H +$$
$$+ \frac{\nu}{(\gamma-1)^2}\left[\frac{4\gamma - (\gamma-1)^2}{\gamma} + A_1(\gamma+1)\right] = 0$$

$$\lambda F' + \lambda G' + 2(\nu - 1) F + \frac{2\nu(\gamma+1)}{(\gamma-1)^2} - \frac{\nu(\gamma+1)}{\gamma - 1} G = 0 \tag{3.2}$$

$$\lambda\gamma F' + \lambda H' + \nu(\gamma + 1) F - \frac{\nu(\gamma+1)}{\gamma-1} H + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\nu\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} - A_1\right) = 0$$

Эта система есть система уравнений с постоянными коэффициентами, если за независимую переменную принять $l = \ln\lambda$.

При решении системы (3.2) можно было бы воспользоваться интегралом (2.1), который при $\omega = \omega_1$ имеет вид:

$$\left[\frac{\nu(2\gamma-1)}{\omega_1-2\nu}+\gamma\right]F+\frac{\nu(2\gamma-1)}{\omega_1-2\nu}G+H=$$

$$=\left[\frac{(3\gamma-1)(\gamma+1)}{2\gamma(\gamma-1)}+A_1\right]\lambda^{\frac{\nu(\gamma+1)}{\gamma-1}}+\frac{2\nu}{\gamma-1}\,\frac{2\gamma-1}{\omega_1-2\nu}+\frac{\gamma-1}{2\gamma}-A_1 \tag{3.3}$$

Но так как полная система (3.2) легко интегрируется, то интегралом (3.3) можно не пользоваться. Однако он может оказаться полезным при вычислении зависимости искомых функций от λ, а также для контроля расчета.

Найдем общее решение однородной системы уравнений (3.2). Характеристическое уравнение системы (3.2) записывается так:

$$\begin{vmatrix} n-\frac{2(\nu+1)}{\gamma-1} & -\frac{2\nu}{\gamma-1} & \frac{2}{\gamma-1}(n+\nu) \\ n+2(\nu-1) & n-\frac{\nu(\gamma+1)}{\gamma-1} & 0 \\ \gamma n+\nu(\gamma+1) & 0 & n-\frac{\nu(\gamma+1)}{\gamma-1} \end{vmatrix}=0 \tag{3.4}$$

Каждому корню n_i уравнения (3.4) соответствует решение $\exp(n_i l)=\lambda^{n_i}$ однородной системы.

Первый корень уравнения (3.4) равен

$$n_1=\nu(\gamma+1)/(\gamma-1) \tag{3.5}$$

Второй и третий корни уравнения (3.4) удовлетворяют следующему квадратному уравнению:

$$n^2+\frac{5\nu\gamma+3\nu+2}{\gamma+1}n-\frac{2\nu(\nu\gamma+1)(3-\gamma)}{\gamma^2-1}=0$$

и равны

$$n_2=-\frac{b_1}{2}+\sqrt{\frac{b_1^2}{4}+b_2},\qquad n_3=-\frac{b_1}{2}-\sqrt{\frac{b_1^2}{4}+b_2} \tag{3.6}$$

где

$$b_1=\frac{5\nu\gamma+3\nu+2}{\gamma+1},\qquad b_2=\frac{2\nu(\nu\gamma+1)(3-\gamma)}{\gamma^2-1}$$

Из (3.6) видно, что $n_2=0$ при $\gamma=3$. Зависимость корней n_1, n_2 и n_3 от ν и γ дана в таблице.

Общее решение однородной системы, соответствующей системе (3.2), представляется в виде

$$F(\lambda)=c_2\lambda^{n_2}+c_3\lambda^{n_3}$$

$$G(\lambda)=c_1\lambda^{n_1}+\frac{(n_2+2\nu-2)(\gamma-1)}{(\gamma+1)\nu-(\gamma-1)n_2}c_2\lambda^{n_2}+\frac{(n_3+2\nu-2)(\gamma-1)}{(\gamma+1)\nu-(\gamma-1)n_3}c_3\lambda^{n_3} \tag{3.7}$$

$$H(\lambda)=\frac{\gamma-1}{2\gamma}c_1\lambda^{n_1}+\frac{(\gamma n_2+\nu\gamma+\nu)(\gamma-1)}{(\gamma+1)\nu-(\gamma-1)n_2}c_2\lambda^{n_2}+\frac{(\gamma n_3+\nu\gamma+\nu)(\gamma-1)}{(\gamma+1)\nu-(\gamma-1)n_3}c_3\lambda^{n_3}$$

Частное решение неоднородной системы уравнений (3.2) будет таким:

$$F=\alpha_1,\qquad G=\alpha_2,\qquad H=\alpha_3 \tag{3.8}$$

причем α_1, α_2, α_3 выражаются через A_1, ν и γ по формулам

$$\alpha_1 = \frac{\nu(\gamma+1)}{2(\gamma-1)(\nu\gamma+1)} A_1, \qquad \alpha_2 = \frac{\nu-1}{\nu\gamma+1} A_1 + \frac{2}{\gamma-1} \tag{3.9}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{\gamma-1}{\gamma} - \frac{\nu\gamma-\nu+2}{\nu\gamma+1} A_1\right]$$

Используя (3.7) и (3.8), получим решение системы (1.13) для $\omega = \omega_1$ в следующем виде:

$$f_1(\lambda) = \frac{1-\gamma}{\gamma+1} \lambda \left[\alpha_1 + c_2\lambda^{n_2} + c_3\lambda^{n_3}\right]$$

$$g_1(\lambda) = \lambda^{\nu-2}\left[\alpha_2 + c_1\lambda^{n_1} + \frac{(n_2+2\nu-2)(\gamma-1)}{\nu(\gamma+1)-(\gamma-1)n_2} c_2\lambda^{n_2} + \right. \tag{3.10}$$
$$\left. + \frac{(n_3+2\nu-2)(\gamma-1)}{\nu(\gamma+1)-(\gamma-1)n_3} c_3\lambda^{n_3}\right]$$

$$h_1(\lambda) = \lambda^{\nu}\left[\alpha_3 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} c_1\lambda^{n_1} + \frac{(\gamma n_2+\nu\gamma+\nu)(\gamma-1)}{\nu(\gamma+1)-(\gamma-1)n_2} c_2\lambda^{n_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(\gamma n_3+\nu\gamma+\nu)(\gamma-1)}{\nu(\gamma+1)-(\gamma-1)n_3} c_3\lambda^{n_3}\right]$$

Постоянные c_1, c_2, c_3 и A_1 определим так, чтобы функции $f_1(\lambda)$, $g_1(\lambda)$, $h_1(\lambda)$ удовлетворяли краевым условиям (1.14).

Так, из последнего условия (1.14) (скорость в центре должна быть равна нулю), учитывая, что n_3 при любых γ является отрицательной величиной и по модулю больше единицы, получим $c_3 = 0$; из других условий (1.14) получим систему неоднородных линейных уравнений с коэффициентами, зависящими от γ и ν:

$$\alpha_1 + c_2 + \frac{2}{\gamma-1} = 0 \tag{3.11}$$

$$\alpha_2 + c_1 + \frac{(n_2+2\nu-2)(\gamma-1)}{\nu(\gamma+1)-(\gamma-1)n_2} c_2 = 0 \tag{3.12}$$

$$\alpha_3 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} c_1 + \frac{(\gamma n_2+\nu\gamma+\nu)(\gamma-1)}{\nu(\gamma+1)-(\gamma-1)n_2} c_2 = 0 \tag{3.13}$$

4. Результаты расчетов по формулам точного решения. Если в уравнение (3.13) подставить c_1 из (3.12) и воспользоваться затем уравнениями (3.11) и (3.9), то получим соотношение для определения A_1. Величина A_1 будет зависеть от γ и ν.

Определив A_1, из системы уравнений (3.9), (3.11), (3.12) найдем зависимость от γ и ν величин α_1, α_2, α_3, c_1, c_2.

Расчетные формулы для нахождения указанных величин имеют вид:

$$A_1 = \frac{B_6}{B_5}, \qquad \alpha_1 = \frac{1}{\gamma-1} B_3 A_1, \qquad \alpha_2 = \frac{\nu-1}{\nu\gamma+1} A_1 + \frac{2}{\gamma-1}$$

$$\alpha_3 = \frac{\gamma-1}{2\gamma} - B_4 A_1, \qquad c_2 = \frac{2}{\gamma-1} - \alpha_1, \qquad c_1 = -\left[\alpha_2 + (\gamma-1) B_1 c_2\right]$$

где

$$B_1 = \frac{n_2+2\nu-2}{\nu(\gamma+1)-(\gamma-1)n_2}, \qquad B_2 = \frac{\gamma n_2+\nu\gamma+\nu}{\nu(\gamma+1)-(\gamma-1)n_2}$$

$$B_3 = \frac{\nu(\gamma+1)}{2(\nu\gamma+1)}, \qquad B_4 = \frac{\nu\gamma-\nu+2}{2(\nu\gamma+1)}$$

$$B_5 = \frac{\gamma-1}{2\gamma}\left(B_1 B_3 - \frac{\nu-1}{\nu\gamma-1}\right) - B_2 B_3 - B_4, \qquad B_6 = \frac{3-\gamma}{2\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma} B_1 - 2B_2$$

Таблица

ν	γ	ω_1	n_1	n_2	$-n_3$	α_1	α_2	$-\alpha_3$	$-c_1$	c_2	A_1
	1.2	2.6364	33.000	5.9131	19.095	7.0942	10.860	0.4756	11.923	2.9058	1.9778
	1.4	2.3333	18.000	3.1540	16.487	3.2461	5.7213	0.4342	6.5665	1.7540	1.8755
3	$^5/_3$	2.0000	12.000	1.7684	15.268	1.8211	3.6070	0.4070	4.2717	1.1789	1.8211
	3.0	1.0000	6.000	0.0000	14.000	0.5333	1.3556	0.3778	1.6667	0.4667	1.7778
	7.0	0.0000	4.000	—0.8031	13.697	0.1635	0.4968	0.3887	0.6098	0.1699	1.7979
	1.2	1.8182	22.000	4.1894	13.280	6.6951	10.609	0.6470	13.228	3.3049	2.0694
	1.4	1.6667	12.000	2.2240	11.391	3.1520	5.5253	0.5926	6.3238	1.8481	1.9962
2	$^5/_3$	1.5000	8.000	1.2394	10.489	1.7715	3.4429	0.5381	4.0315	1.2285	1.9191
	3.0	1.0000	4.000	0.0000	9.500	0.5238	1.2619	0.4524	1.5000	0.4762	1.8333
	7.0	0.5000	2.667	—0.5431	9.207	0.1621	0.4549	0.4225	0.5326	0.1712	1.8237

Результаты расчетов приведены в таблице.

Формулы (3.10) с учетом того, что $c_3 = 0$, запишутся так:

$$f_1(\lambda) = \frac{1-\gamma}{\gamma+1}\lambda(\alpha_1 + c_2\lambda^{n_2})$$

$$g_1(\lambda) = \lambda^{\nu-2}[\alpha_2 + c_1\lambda^{n_1} + (\gamma-1)B_1c_2\lambda^{n_2}] \qquad (4.1)$$

$$h_1(\lambda) = \lambda^{\nu}\left[\alpha_3 + \frac{\gamma-1}{2\gamma}c_1\lambda^{n_1} + (\gamma-1)B_2c_2\lambda^{n_2}\right]$$

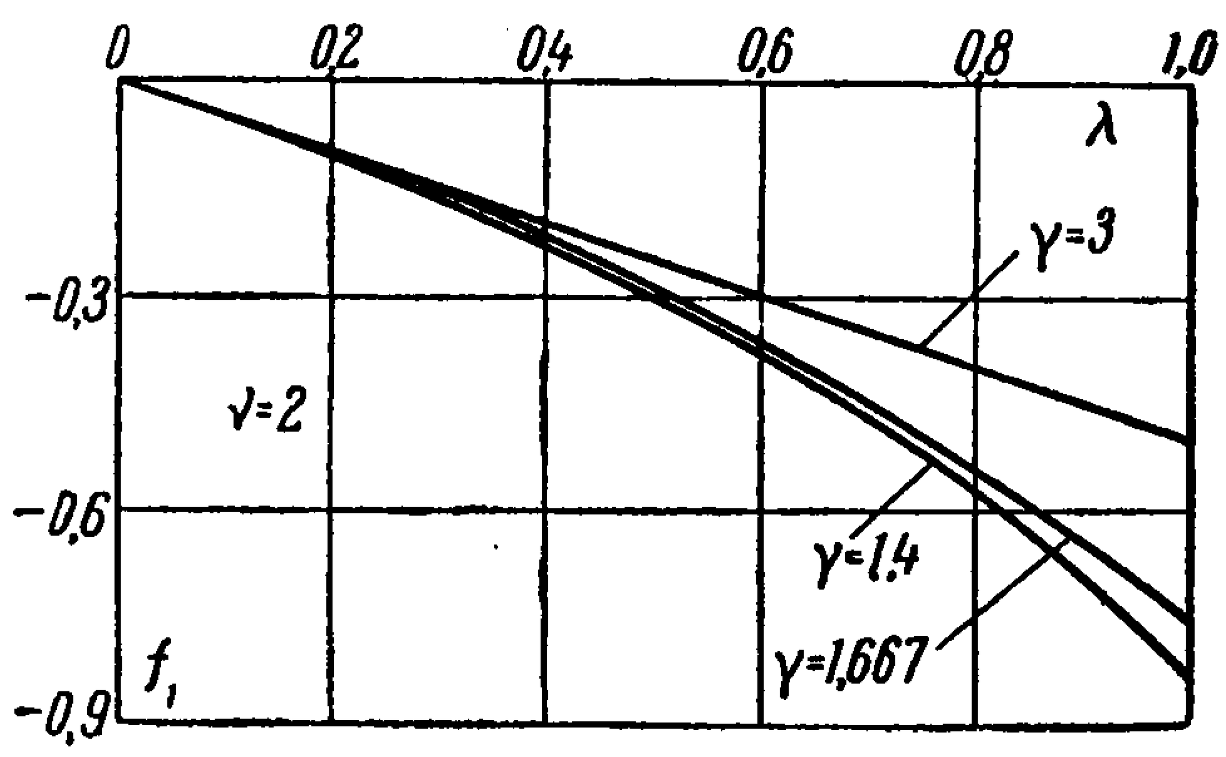
Из соотношения (0.3) в случае сферических ($\nu = 3$), цилиндрических ($\nu = 2$) и плоских ($\nu = 1$) волн соответственно будем иметь

$$\omega_1 = \frac{7-\gamma}{\gamma+1}, \qquad \omega_1 = \frac{4}{\gamma+1}, \qquad \omega_1 = 1$$

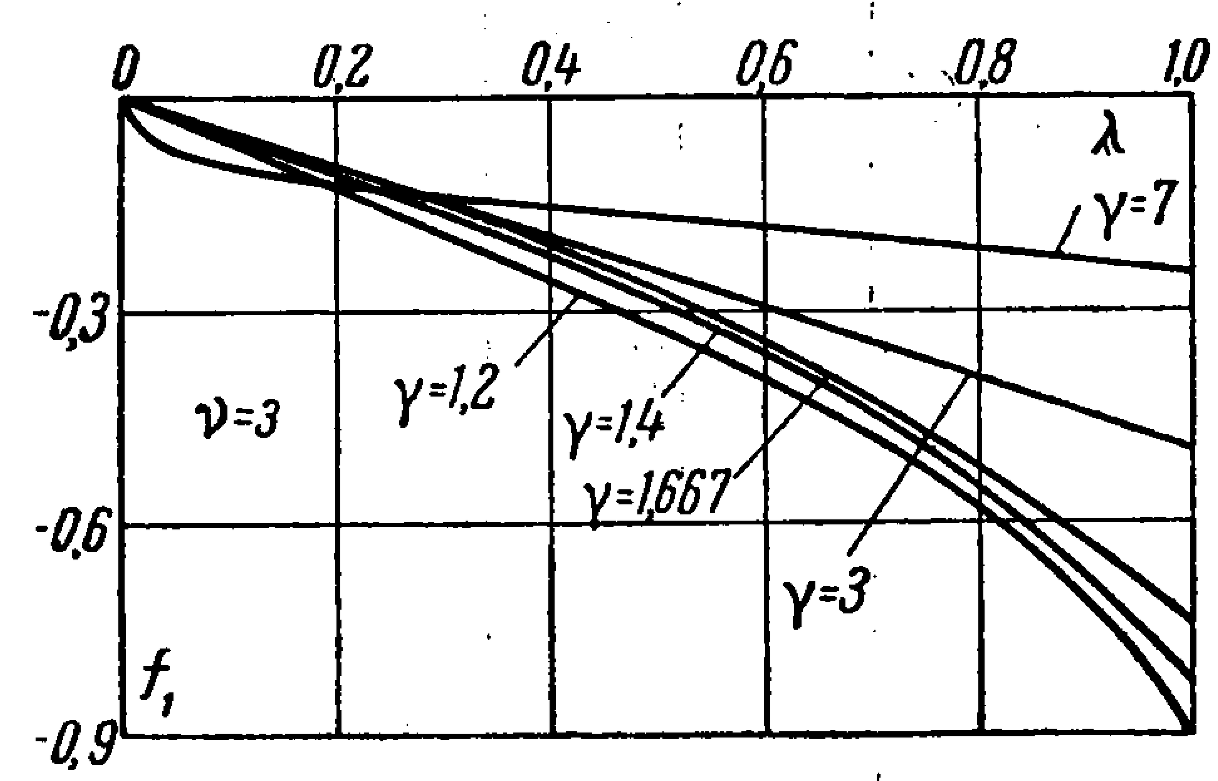
Формула для нахождения массы вещества, заключенного в некотором конечном объеме, содержащем начало координат,

$$m = \sigma_\nu \int_0^r \rho r^{\nu-1}\,dr$$

показывает, что начальная масса будет конечной величиной только в сферическом и цилиндрическом случаях. Поэтому расчеты были проведены для этих двух случаев.



a



б

Фиг. 1

Интеграл (3.3) в случае сферической симметрии примет вид:

$$\frac{(\gamma-3)(\gamma-1)}{7\gamma-1}F - \frac{3(2\gamma-1)(\gamma+1)}{7\gamma-1}G + H =$$

$$= \left[\frac{(3\gamma-1)(\gamma+1)}{2\gamma(\gamma-1)} + A_1\right]\lambda^{\frac{3(\gamma+1)}{\gamma-1}} - \frac{6}{\gamma-1}\frac{(2\gamma-1)(\gamma+1)}{7\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} - A_1$$

а в цилиндрическом случае

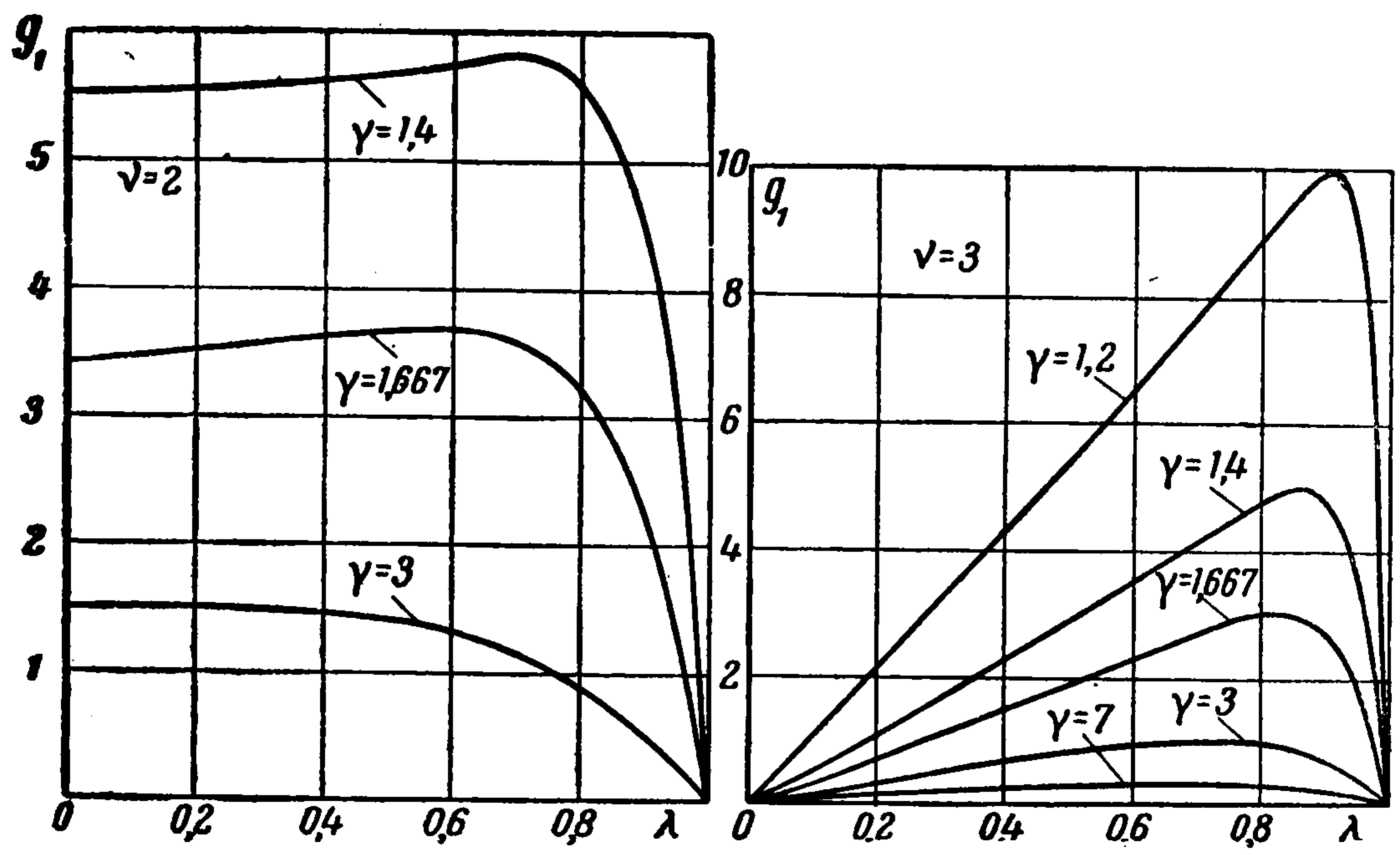
$$-\frac{\gamma-1}{2\gamma}F-\frac{(2\gamma-1)(\gamma+1)}{2\gamma}G+H=\left[\frac{(3\gamma-1)(\gamma+1)}{2\gamma(\gamma-1)}+A_1\right]\lambda^{\frac{2(\gamma+1)}{\gamma-1}}+$$

$$+\frac{\gamma-1}{2\gamma}-\frac{(2\gamma-1)(\gamma+1)}{\gamma(\gamma-1)}-A_1$$

Зависимость $R_2(q)$ и $\tau(q)$ находится из соотношений (2.4) и (2.5), в которых нужно положить $\delta=\delta_1$, где

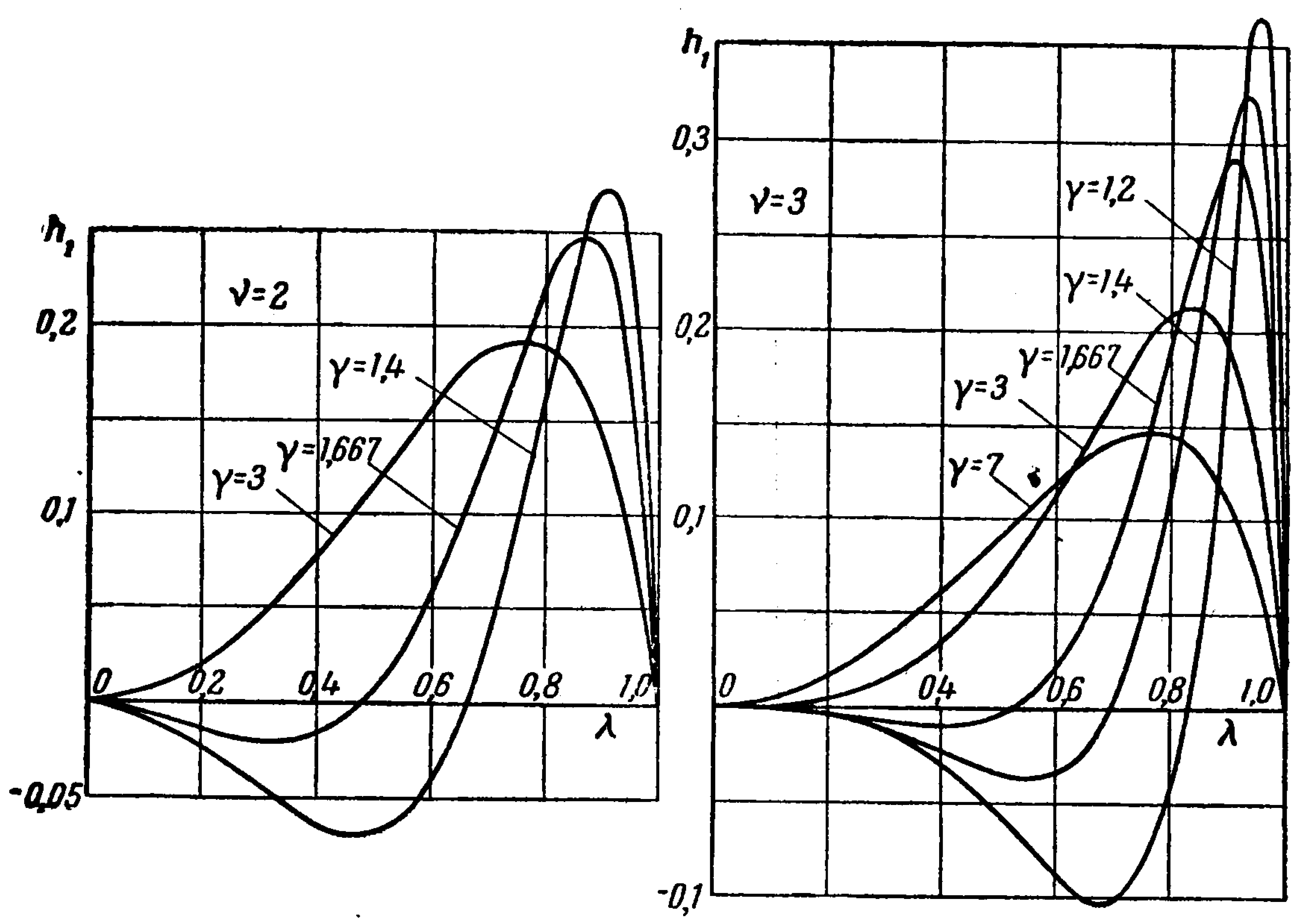
$$\delta_1=\delta(\omega_1)=\frac{\gamma+1}{\nu\gamma-\nu+2}$$

Используя вычисленные константы и формулы (4.1), были построены зависимости $f_1(\lambda)$, $g_1(\lambda)$ и $h_1(\lambda)$ (фиг. 1, 2, 3 соответственно) для разных величин γ и ν. При



а б

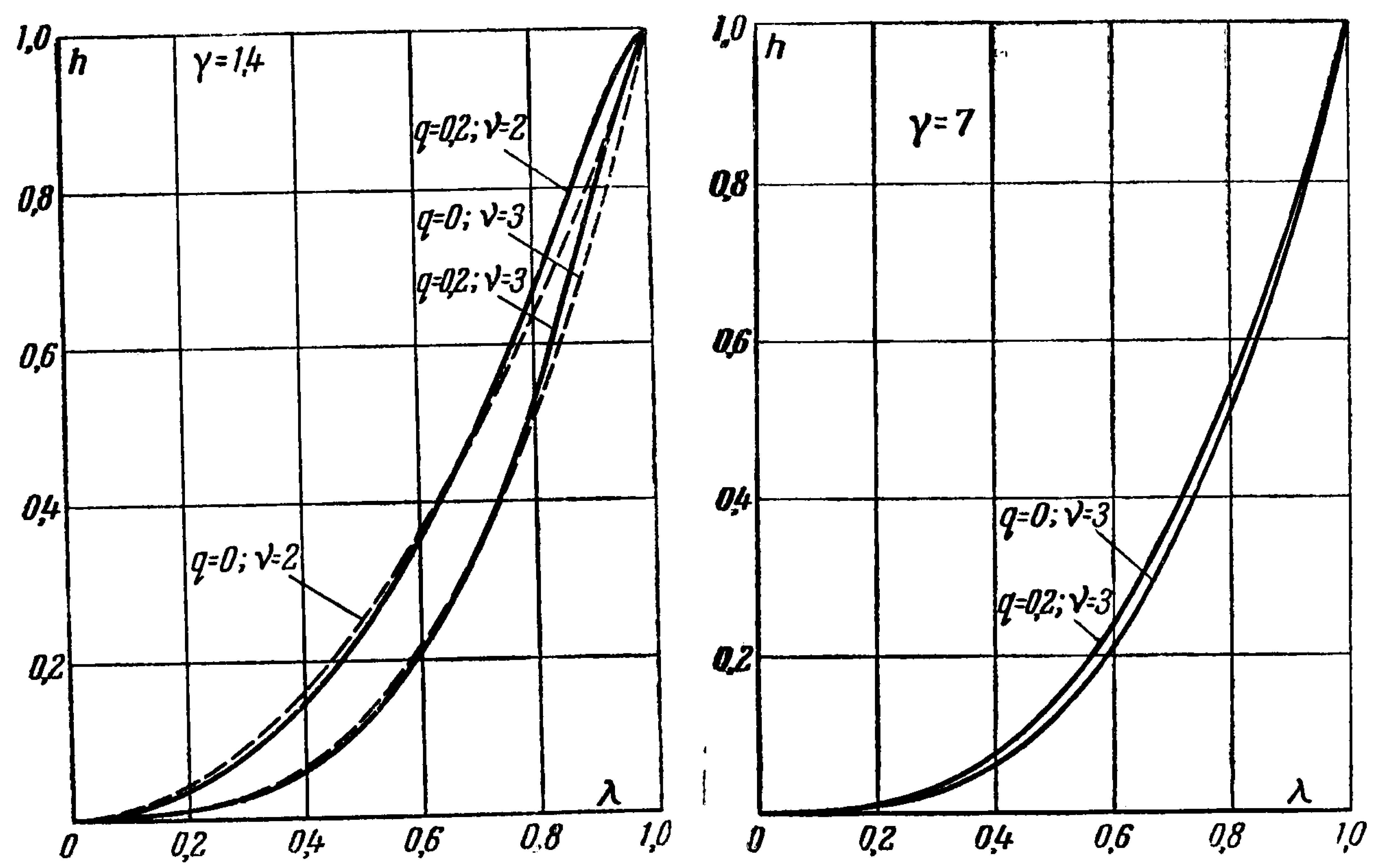
Фиг. 2



а б

Фиг. 3

помощи функций $f_1(\lambda)$, $g_1(\lambda)$ и $h_1(\lambda)$, зная постоянную A_1, можно рассчитать характеристики движения для малых q.



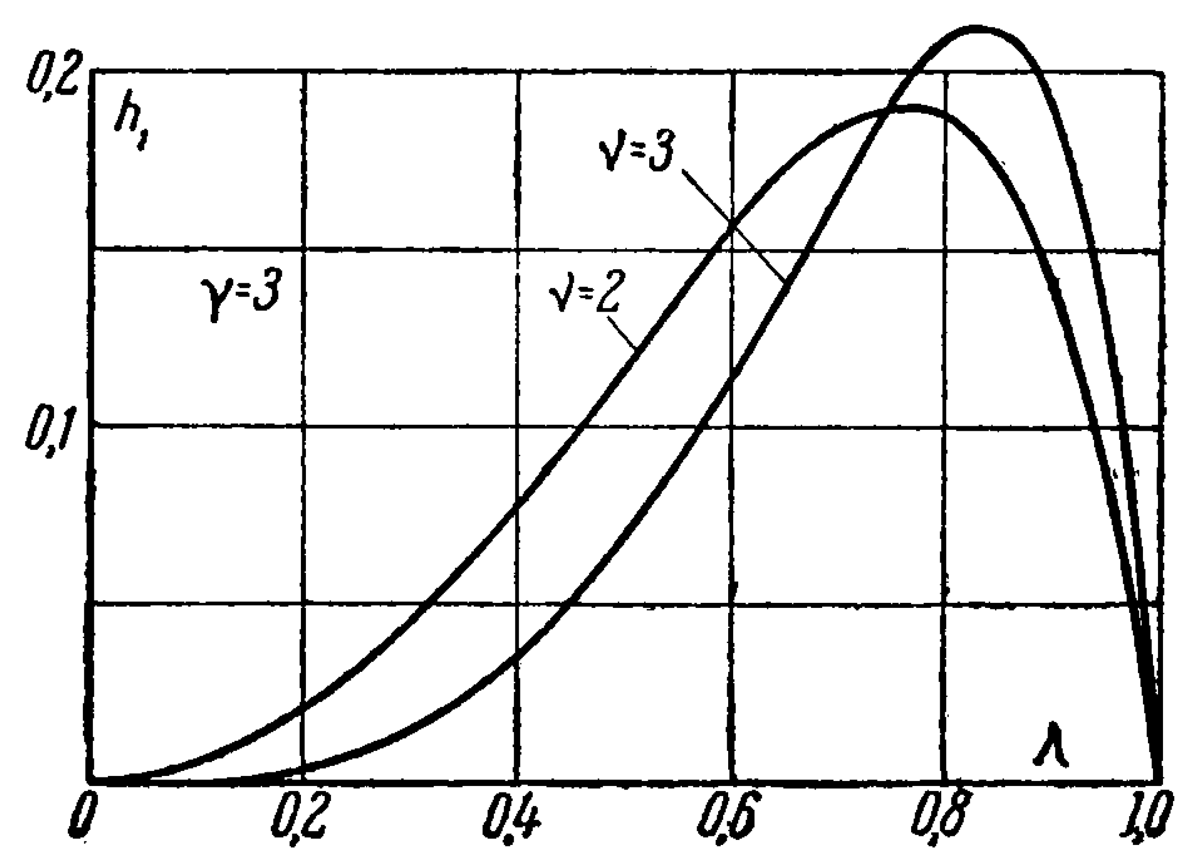
а *б*

Фиг. 4

На фиг. 4*а* и 4*б* дано распределение безразмерного давления $h = h_0 + qh_1$ в сферическом случае при $\gamma = 1.4$ и $\gamma = 7$ и в цилиндрическом случае при $\gamma = 1.4$ для значений $q = 0$ и $q = 0.2$.

Эти графики показывают влияние противодавления на развитие взрыва в начальной стадии.

Если приравнять значения для ω_1, найденные при $\nu = 3$ и $\nu = 2$, то получим $\gamma = 3$. В этом случае $\omega_1 = 1$. Сравнение величин безразмерного давления для $\gamma = 3$, $\omega_1 = 1$ и разных ν ($\nu = 3$, $\nu = 2$) дано на фиг. 5.



Фиг. 5

Отметим в заключение, что полученное в данной работе точное решение при $\omega = \omega_1$ в частном случае $\nu = 3$ дополняет и уточняет результаты работы [7] (см. также [8]).

Авторы искренне благодарят Н. С. Мельникову за обсуждение некоторых вопросов, рассмотренных в настоящей статье.

Поступила 7.II.1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. 4-е изд., М., 1957.
2. Коробейников В. П. и Рязанов Е. В. Представление решения задачи о точечном взрыве в газе в особых случаях. ПММ, т. XXIII, вып. 2, 1959.
3. Охоцимский Д. Е., Кондрашева И. Л., Власова З. П., Казакова Р. К. Расчет точечного взрыва с учетом противодавления. Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. L, 1957.
4. Sakurai A. On propagation and structure of the blast wave. J. phys. Soc. Japan, v. 8, № 5, 1953; v. 9, № 2, 1954.
5. Брушлинский Д. Н. и Соломахова Т. С. Исследование задачи о сильном взрыве с учетом противодавления. Сб. ст. № 19, вып. 7. Теорет. гидромеханика, под ред. Л. И. Седова. Оборонгиз, 1956.
6. Лидов М. Л. К теории линеаризированных решений около одномерных автомодельных движений газа. Докл. АН СССР, т. CII, № 6, 1955.
7. Коробейников В. П. и Мельникова Н. С. О точных решениях линеаризированной задачи о точечном взрыве с противодавлением. Докл. АН СССР, т. CXVI, № 2, 1957.
8. Коробейников В. П., Мельникова Н. С. Письмо в редакцию ДАН. Докл. АН СССР. т. CXXVI, № 1, 1959.