Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ТЕМПЕРАТУРНОЕ И СКОРОСТНОЕ ПОЛЯ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

А. И. Борисенко, А. Д. Мышкис

(Харьков)

В большинстве электрических машин между вращающимся ротором и неподвижным статором находится воздух. Исследования (например, [1]) показали, что его движение в этом случае сохраняет ламинарный характер до тех пор, пока число Рейнольдса $N_{\mathrm{Re}} = \rho W_1 (R_2 - R_1) : \mu$ остается меньше критического значения, равного $41.2 \sqrt{R_m : (R_2 - R_1)}$; здесь R_2 и R_1 — соответственно радиусы внешнего и внутреннего цилиндров, μ — коэффициент вязкости, ρ — плотность, W_1 — линейная скорость вращающегося внутреннего цилиндра (при неподвижном внешнем), $R_m = (R_1 + R_2) : 2$. Как показывают числовые подсчеты, для многих реальных электрических машин это условие выполняется и движение в воздушном зазоре ламинарно.

Так как значительная часть тепла, выделяемого в роторе, передается через воздушный зазор, то исследование состояния воздуха в нем имеет существенное значение для расчетов теплообмена. Применение изоляции повышенного класса, допускающей значительные перепады температуры, ставит вопрос об изучении влияния изменения физических свойств (вязкости и теплопроводности) воздуха с температурой на характер движения.

В последние годы электромашиностроение освоило новый тип машин — так называемые погружные электромашины, в которых зазор заполнен маслом. Как известно, вязкость капельных жидкостей сильно изменяется с температурой, поэтому для таких типов машин поставленный здесь вопрос становится особенно актуальным. Аналогичная задача возникает, например, при измерении вязкости методом вращающихся цилиндров [2] и в других областях техники.

Исследование данного вопроса в случае, когда коэффициенты вязкости и теплопроводности пропорциональны T^n при $n = 1$ и $1/2$, содержится в работе Л. Г. Степанянца [3]. Близкие вопросы рассмотрены также в работах С. М. Тарга ([4], особенно § 25) и А. И. Борисенко [5].

Авторы выражают свою благодарность Л. Г. Лойцянскому, который ознакомился с работой при рецензировании и высказал замечания, учтенные при окончательном редактировании текста.

§ 1. Вывод уравнений поля и постановка задачи. Рассмотрим плоское ($W_z = 0$, $\partial/\partial z = 0$) ламинарное установившееся ($\partial/\partial t = 0$) осесимметричное ($\partial/\partial\varphi = 0$) движение жидкости или газа между двумя коаксиальными цилиндрами радиусов R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), ось которых совпадает с осью z. Тогда прежде всего из рассмотрения части потока, заключенного между цилиндрами радиусов R_1 и R, $R_1 < R < R_2$ (с той же осью), вытекает, что $W_R = 0$, т. е. движение среды осуществляется по концентрическим окружностям $R = \mathrm{const}$.

Основные уравнения потока легко вывести, рассматривая элементарный слой пространства, заключенный между цилиндрами радиусов R и $R + dR$; при этом мы будем пренебрегать массовыми силами. Обозначим через ρ плотность среды, а через p — давление. Так как центробежные силы должны уравновешиваться разностью давлений на поверхностях этого слоя, то

$$\frac{W^2}{R}2\pi R\,dR\rho = 2\pi R\,dp, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dR} = \frac{W^2}{R} \tag{1.1}$$

Суммарный момент вязких сил, действующих на указанный слой, должен равняться нулю. Значит,

$$d(p_{R\varphi}2\pi RR) \equiv d\left[\mu\left(\frac{dW}{dR} - \frac{W}{R}\right)2\pi R^2\right] = 0 \tag{1.2}$$

Выражение для $p_{R\varphi}$ легко вывести (см., например, [4], стр, 41). Интегрируя соотношение (1.2), получим

$$\mu\frac{d}{dR}\left(\frac{W}{R}\right) + \frac{A}{R^3} = 0 \qquad (A = \text{const}) \tag{1.3}$$

Наконец, напишем уравнение энергии в цилиндрическом слое:

$$d\left(\lambda\frac{dT}{dR}2\pi R\right) = -E2\pi RdR \equiv -\mu\left(\frac{dW}{dR} - \frac{W}{R}\right)^2 2\pi R\,dR \tag{1.4}$$

Здесь E — функция рассеяния, значение которой в данном случае получается, например, из [4] (стр. 48), а λ — коэффициент теплопроводности среды, взятый в единицах механической энергии. Из (1.3) и (1.4) получим

$$\frac{d}{dR}\left(\lambda R\frac{dT}{dR}\right) + \frac{A^2}{\mu R^3} = 0 \tag{1.5}$$

Постоянная A и три постоянные интегрирования уравнений (1.3) и (1.5) должны быть определены из четырех граничных условий Два из них состоят в задании скорости цилиндров, т. е. в задании

$$W(R_1) = W_1, \qquad W(R_2) = W_2 \tag{1.6}$$

Два других условия дают температурный режим на поверхности цилиндров; они состоят или в задании температуры цилиндров (условия 1-го рода)

$$T(R_1) = T_1, \qquad T(R_2) = T_2 \tag{1.7}$$

или в задании теплового потока через цилиндры (условия 2-го рода), или же, наконец, в задании закона теплообмена между средой и цилиндрами (условия 3-го рода).

Для определенности будем считать, что скорость $W_2 = 0$, температура $T_1 > T_2$ и что рассматриваются условия 1-го рода (1.7), хотя аналогичным образом можно было бы разобрать все остальные случаи. После решения системы уравнений (1.3), (1.5) при граничных условиях (1.6), (1.7) уравнение (1.1) (с учетом уравнения состояния) может быть применено для определения $p(R)$.

Из уравнения (1.5) видно, что всякая стационарная точка функции $T(R)$ является точкой максимума; поэтому если $T \leqslant T_1$ (это ограничение естественно из физических соображений), то функция $T(R)$ монотонно убывает. Введем безразмерные величины

$$x = \frac{R_2 - R}{R_2 - R_1}, \qquad h = \frac{R_2 - R_1}{R_2}, \qquad \vartheta = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2}, \qquad w = \frac{W}{W_1}$$
$$\alpha(\vartheta) = \frac{\lambda(T)}{\lambda_2}, \qquad \beta(\vartheta) = \frac{\mu(T)}{\mu_2} \qquad (\lambda_2 = \lambda_{T=T_2}, \ \mu_2 = \mu_{T=T_2}) \tag{1.8}$$

Тогда уравнения (1.3) и (1.5) и граничные условия (1.6), (1.7) перепишутся в виде

$$\frac{d}{dx}\frac{w}{1-hx}-\frac{a}{\beta(\vartheta)(1-hx)^3}=0 \tag{1.9}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\alpha(\vartheta)(1-hx)\frac{d\vartheta}{dx}\right]+\varkappa\frac{a^2}{\beta(\vartheta)(1-hx)^3}=0 \tag{1.10}$$

$$\vartheta(0)=w(0)=0, \qquad \vartheta(1)=w(1)=1 \qquad (0\leqslant x\leqslant 1,\ h<1) \tag{1.11}$$

где a — неизвестная постоянная, а

$$\varkappa=\frac{W_1^2\mu_2}{(T_1-T_2)\lambda_2} \tag{1.12}$$

В общем виде для произвольной зависимости $\alpha(\vartheta)$ и $\beta(\vartheta)$ система уравнений (1.9), (1.10) неразрешима в квадратурах. Основная цель данной работы, — отправляясь от частных случаев, когда решение можно получить в квадратурах построить по методу малого параметра приближенные формулы по возможности для более общих случаев, охватывающих реальные условия.

§ 2. Случай малой постоянной $\varkappa$. Для некоторых случаев постоянная $\varkappa$ мала; так будет, например, если средой является воздух или вода, причем скорость W_1 не слишком велика, а перепад температур T_1-T_2 не слишком мал.

Например, если $W_1=20\,\textit{мсек}^{-1}$, $T_1=80^\circ$ C, $T_2=30^\circ$ C, то вычисления по формуле (1.12) дают для воздуха, воды и смазочного масла соответственно

$$\varkappa=5.79\cdot10^{-3}, \qquad \varkappa=1.04\cdot10^{-2}, \qquad \varkappa=8.9$$

Здесь значения постоянных λ и μ взяты из [4] (стр. 22), а значение $\varkappa$ для смазочного масла при тех же условиях приведено, чтобы подчеркнуть, что $\varkappa$ может быть и не мало.

Предполагая $\varkappa$ малой, можно применить разложение

$$\vartheta=\vartheta_0+\varkappa\vartheta_1+\varkappa^2\vartheta_2+\ldots, \qquad w=w_0+\varkappa w_1+\varkappa^2 w_2+\ldots,$$
$$a=a_0+\varkappa a_1+\varkappa^2 a_2+\ldots \tag{2.1}$$

Уравнения, определяющие члены этих рядов, получаются в результате подстановки рядов в уравнения (1.9), (1.10) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $\varkappa$. Так, для главных частей разложений будут удовлетворяться те же соотношения (1.9) — (1.11), но при $\varkappa=0$. В этом случае легко произвести интегрирование. Именно, из уравнения (1.10) и граничных условий для ϑ_0 получаем

$$\int_0^{\vartheta_0}\alpha(\vartheta)\,d\vartheta=\frac{\ln(1-hx)}{\ln(1-h)}\int_0^1\alpha(\vartheta)\,d\vartheta \tag{2.2}$$

Отсюда определяется зависимость $\vartheta_0(x)$. Подстановка этого результата в (1.9) и учет граничных условий для w_0 дают (2.3)

$$w_0(x)=a_0(1-hx)\int_0^x\frac{dx}{\beta[\vartheta_0(x)](1-hx)^3}, \quad a_0=\left[(1-h)\int_0^1\frac{dx}{\beta[\vartheta_0(x)]\,(1-hx)^3}\right]^{-1}$$

Уравнения, определяющие члены первого порядка малости, получаются после приравнивания коэффициентов при $\varkappa$ в первой степени. При этом, конечно, надо применять разложение вида

$$\alpha(\vartheta) = \alpha(\vartheta_0) + \varkappa\vartheta_1\alpha'(\vartheta_0) + \varkappa^2\left[\vartheta_2\alpha'(\vartheta_0) + \frac{\vartheta_1^2}{2}\alpha''(\vartheta_0)\right] + \ldots$$

С учетом этого замечания указанные уравнения приобретают вид:

$$\frac{d}{dx}\frac{w_1}{1-hx} - \frac{a_1}{\beta(\vartheta_0)(1-hx)^3} + \frac{a_0\vartheta_1\beta'(\vartheta_0)}{[\beta(\vartheta_0)]^2(1-hx)^3} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\alpha(\vartheta_0)(1-hx)\frac{d\vartheta_1}{dx} + \vartheta_1\alpha'(\vartheta_0)(1-hx)\frac{d\vartheta_0}{dx}\right] + \frac{a_0^2}{\beta(\vartheta_0)(1-hx)^3} = 0$$

$$\vartheta_1(0) = w_1(0) = \vartheta_1(1) = w_1(1) = 0$$

где функции $\vartheta_0(x)$, $w_0(x)$ и постоянная a_0 уже найдены. Отсюда при помощи интегрирования находим

$$\vartheta_1 = \frac{a_0^2}{\alpha(\vartheta_0)}\left(\frac{\ln(1-hx)}{\ln(1-h)}\int\limits_0^1 \frac{G_1(x)\,dx}{1-hx} - \int\limits_0^x \frac{G_1(x)\,dx}{1-hx}\right) \tag{2.4}$$

$$w_1 = (1-hx)\left[a_1G_1(x) - a_0G_2(x)\right] \qquad \left(a_1 = a_0\frac{G_2(1)}{G_1(1)}\right) \tag{2.5}$$

$$G_1(x) = \int\limits_0^x \frac{dx}{\beta(\vartheta_0)(1-hx)^3}, \qquad G_2(x) = \int\limits_0^x \frac{\vartheta_1\beta'(\vartheta_0)\,dx}{[\beta(\vartheta_0)]^2(1-hx)^3} \tag{2.6}$$

Аналогичным образом в случае необходимости можно найти члены второго и высших порядков малости относительно $\varkappa$.

Рассмотрим для примера случай капельной жидкости с малым $\varkappa$ (в частности, воды). Здесь можно положить

$$\alpha(\vartheta) \equiv 1, \qquad \beta(\vartheta) = \frac{1}{1+\beta^\circ(\vartheta)}, \qquad \beta^\circ = \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1}$$

В общем виде этот случай исследован в работе [2]; оказалось, что решение выражается через функции Бесселя (отметим, что при этом для больших значений аргументов удобно пользоваться асимптотическими разложениями этих функций). Если $\varkappa$ мала, то можно получить приближенную формулу, включающую только элементарные функции. Именно, вычисление по формулам (2.2) и (2.3) дает

$$\vartheta_0 = \frac{\ln(1-hx)}{\ln(1-h)}$$

$$w_0 = \frac{a_0}{1-hx}\left[\frac{x(2-hx)}{2} + \beta^\circ\,\frac{2\ln(1-hx) + hx(2-hx)}{4h\ln(1-h)}\right]$$

$$a_0 = (1-h)\left[\frac{2-h}{2} + \beta^\circ\,\frac{2\ln(1-h) + h(2-h)}{4h\ln(1-h)}\right]^{-1}$$

Поправки на $\varkappa$ вычисляются по формулам (2.4) и (2.5), причем все участвующие интегралы берутся и приводят к таким же функциям, что и в выражении для $w_0(x)$, хотя результаты имеют довольно громоздкий вид. Ограничимся случаем малого относительного зазора (т. е. малого h), когда можно удерживать только члены первой степени относительно

h и $\varkappa$. Вычисление дает

$$\vartheta_0 = x - h\frac{x(1-x)}{2} + \ldots, \qquad \vartheta_1 = \frac{2x(1-x)}{3(2+\beta^\circ)^2}(3+\beta^\circ+\beta^\circ x) + \ldots$$

$$w_0 = \frac{x(2+\beta^\circ x)}{2+\beta^\circ} - h\frac{x(1-x)}{3(2+\beta^\circ)^2}(1+10\beta^\circ+16\beta^\circ x+8\beta^{\circ 2}x) + \ldots$$

$$w_1 = \frac{\beta^\circ x^2(1-x)}{3(2+\beta^\circ)^3}(4+\beta^\circ+\beta^\circ x) + \ldots$$

Таким образом, для малых $\varkappa$ и h для капельной жидкости получаем приближенные формулы (с погрешностью второго порядка малости)

$$\vartheta \approx x - h\frac{x(1-x)}{2} + \varkappa\frac{2x(1-x)}{3(2+\beta^\circ)^2}(3+\beta^\circ+\beta^\circ x)$$

$$w \approx \frac{x(2+\beta^\circ x)}{2+\beta^\circ} - h\frac{x(1-x)}{3(2+\beta^\circ)^2}(\lambda+10\beta^\circ+16\beta^\circ x+8\beta^{\circ 2}x) + \\ + \varkappa\frac{\beta^\circ x^2(1-x)}{3(2+\beta^\circ)^3}(4+\beta^\circ+\beta^\circ x)$$

Если коэффициент теплопроводности λ (а с ним и величину α) нельзя считать вполне постоянным, то для уточнения результата можно вместо λ_2 пользоваться коэффициентом $(\lambda_1+\lambda_2):2$ или же можно представить $\alpha(\vartheta) = 1 + \alpha_0(\vartheta)$ с малым коэффициентом α_0 и, произведя разложение участвующих величин по степеням α_0, ограничиться членами первого порядка малости.

Приведем в заключение условия, при которых в случае любой среды (т. е. любых законов $\alpha(\vartheta)$ и $\beta(\vartheta)$) можно при решении системы уравнений (1.9) и (1.10) заведомо отбросить член с $\varkappa$, т. е. принять за точное решение функции ϑ_0 и w_0, определенные формулами (2.2) и (2.3). Для этого будем интегрировать уравнения (1.9) и (1.10), а из получающихся интегралов выносить переменные величины их средними значениями (они будут обозначаться звездочкой и могут принимать в различных формулах разные значения). Таким образом, получим последовательно

$$\frac{w}{1-hx} = \frac{a}{\beta^*}\int_0^x \frac{dx}{(1-hx)^3} = \frac{a(2x-hx^2)}{2\beta^*(1-hx)^2}, \qquad a = \frac{2\beta^*(1-h)}{2h} \tag{2.7}$$

$$\alpha(\vartheta)(1-hx)\frac{d\vartheta}{dx} = C - \varkappa\frac{a^2(2x-hx^2)}{2\beta^*(1-hx)^2}$$

$$\int_0^\vartheta \alpha(\vartheta)\,d\vartheta = -\frac{C}{h}\ln(1-hx) - \frac{\varkappa a^2}{2\beta^*}\left[\frac{1}{2h^2}\left(\frac{1}{(1-hx)^2}-1\right) + \frac{1}{h^2}\ln(1-hx)\right]$$

$$C = -\frac{h}{\ln(1-h)}\int_0^1 \alpha(\vartheta)\,d\vartheta - \frac{h}{\ln(1-h)}\frac{\varkappa a^2}{2\beta^*}\left[\frac{1}{2h^2}\left(\frac{1}{(1-h)^2}-1\right) + \frac{1}{h^2}\ln(1-h)\right]$$

$$\int_0^\vartheta \alpha(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{\ln(1-hx)}{\ln(1-h)}\int_0^1 \alpha(\vartheta)\,d\vartheta + \frac{\varkappa a^2}{2}F(x)$$

Здесь

$$F(x) = \frac{\ln(1-hx)}{\ln(1-h)}\frac{1}{\beta^*}\left[\frac{1}{2h^2}\left(\frac{1}{(1-h)^2}-1\right) + \frac{1}{h^2}\ln(1-h)\right] - \\ - \frac{1}{\beta^*}\left[\frac{1}{2h^2}\left(\frac{1}{(1-hx)^2}-1\right) + \frac{1}{h^2}\ln(1-hx)\right] \tag{2.8}$$

Если в последнем соотношении положить $\varkappa = 0$, то оно перейдет в уравнение (2.2), причем ϑ изменится на $\Delta\vartheta$ Из теоремы о среднем значении вытекает, что

$$\left|\Delta\vartheta\right| = \frac{\varkappa a^2}{2\alpha^*}\left|F(x)\right|$$

Так как вычитаемое и уменьшаемое в выражении (2.8) для $F(x)$ положительны и (без учета β^*) монотонно возрастают, то

$$\left|\Delta\vartheta\right| \leqslant \frac{\varkappa a^2}{2\alpha^*\beta^*}\left[\frac{1}{2h^2}\left(\frac{1}{(1-h)^2}-1\right)+\frac{1}{h^2}\ln(1-h)\right] \qquad (2.9)$$

Таким образом, отбрасывание члена с $\varkappa$ в уравнении (1.10) приводит к погрешности в $T(R)$, не превышающей по абсолютной величине после преобразования правой части (2.9):

$$\frac{2h-h^2+2(1-h)^2\ln(1-h)}{(2-h)^2h^2}\,\frac{\mu_2\mu_{\max}}{\mu_{\min}\lambda_{\min}}W_1^2 \qquad (2.10)$$

Если эта погрешность менее принятой точности в определении T, то указанное отбрасывание может быть заведомо осуществлено. Отметим, что выражение (2.10) существенно упрощается в случае малого зазора, т. е. если членами порядка h можно пренебречь, то оно переходит в

$$\frac{\mu_2\mu_{\max}}{\lambda_{\min}\mu_{\min}}\,\frac{W_1^2}{2}$$

Например, если зазор воздушный и $0°\,C \leqslant T \leqslant 200°\,C$, значение $\mu_{\max}$ берем из [6] (стр. 256), то выражение (2.10) начинает превосходить 1° только при

$$W_1 > \sqrt{\frac{5.76\cdot10^{-6}\cdot427}{2.64\cdot10^{-6}}\cdot2} = 42.8\,\frac{м}{сек}$$

Возможность отбрасывания в уравнении (1.10) члена с $\varkappa$ по существу означает, что в рассматриваемых условиях при расчете распределения температур можно считать цилиндры покоящимися.

§ 3. Случай медленно меняющихся коэффициентов λ и μ. Для газов, в частности для воздуха, коэффициенты λ и μ меняются медленно; так будет и для других сред, если перепад температур $T_1 - T_2$ невелик. В этом случае можно положить

$$\alpha(\vartheta) = 1+\alpha_0\varphi(\vartheta), \qquad \beta(\vartheta) = 1+\beta_0\psi(\vartheta)$$

где коэффициенты α_0 и β_0 малы. Такие формулы охватывают все могущие представиться зависимости $\alpha(\vartheta)$ и $\beta(\vartheta)$. Уравнения (1.9), (1.10) можно переписать в виде

$$(1+\beta_0\psi(\vartheta))\,\frac{d}{dx}\left(\frac{w}{1-hx}\right)-\frac{a}{(1-hx)^3}=0 \qquad (3.1)$$

$$(1+\beta_0\psi(\vartheta))\frac{d}{dx}\left[(1+\alpha_0\varphi(\vartheta))(1-hx)\frac{d\vartheta}{dx}\right]+\frac{\varkappa a^2}{(1-hx)^3}=0 \qquad (3.2)$$

решение искать разложенным по степеням α_0, β_0:

$$\vartheta = \vartheta_0+\alpha_0\vartheta_1+\beta_0\vartheta_2+\ldots, \qquad w = w_0+\alpha_0 w_1+\beta_0 w_2+\ldots,$$

$$a = a_0+\alpha_0 a_1+\beta_0 a_2+\ldots$$

Для главных разложений получаем уравнения (3.1), (3.2), в которых положено $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, т. е. получаем случай постоянных λ и μ. Тогда уравнения (при граничных условиях (1.11)) легко интегрируются (см., например, [4], стр. 379); получим

$$\vartheta_0 = \frac{\ln(1-hx)}{\ln(1-h)} + \frac{\varkappa}{h(2-h)^2}\left[\frac{(2-h)\ln(1-hx)}{\ln(1-h)} - \frac{(1-h)^2 x(2-hx)}{(1-hx)^2}\right] \tag{3.3}$$

$$w_0 = \frac{(1-h)x(2-hx)}{(2-h)(1-hx)}, \qquad a_0 = \frac{2(1-h)}{2-h} \tag{3.4}$$

Для нахождения членов первого порядка малости относительно α_0, β_0 приравняем в формулах (3.1) и (3.2) коэффициенты при α_0 и β_0 в первой степени; это даст

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{w_1}{1-hx}\right) - \frac{a_1}{(1-hx)^3} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{w_2}{1-hx}\right) + \psi(\vartheta_0)\frac{d}{dx}\left(\frac{w_0}{1-hx}\right) - \frac{a_2}{(1-hx)^3} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-hx)\frac{d\vartheta_1}{dx}\right] + \frac{d}{dx}\left[\varphi(\vartheta_0)(1-hx)\frac{d\vartheta_0}{dx}\right] + \frac{2\varkappa a_0 a_1}{(1-hx)^3} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-hx)\frac{d\vartheta_2}{dx}\right] + \varphi(\vartheta_0)\frac{d}{dx}\left[(1-hx)\frac{d\vartheta_0}{dx}\right] + \frac{2\varkappa a_0 a_2}{(1-hx)^3} = 0$$

Отсюда с учетом нулевых граничных условий и уравнений для w_0 и ϑ_0 легко найти все функций w_1, w_2, ϑ_1. ϑ_2 и постоянные a_1, a_2 в явном виде

$$w_1 = a_1\frac{x(2-hx)}{2(1-hx)}, \qquad 0 = a_1\frac{2-h}{2(1-h)} \text{ или } a_1 = 0, \qquad w_1 = 0$$

$$w_2 = (1-hx)\left[a_2\frac{x(2-hx)}{2(1-hx)^2} - a_0 G_3(x)\right], \qquad a_2 = \frac{4(1-h)^3}{(2-h)^2}G_3(1),$$

или

$$w_2 = \frac{2(1-h)(1-hx)}{(2-h)}\left[\frac{(1-h)^2 x(2-hx)}{(2-h)(1-hx)^2}G_3(1) - G_3(x)\right]$$

$$\vartheta_1 = \frac{\ln(1-hx)}{\ln(1-h)}G_4(1) - G_4(x)$$

$$\vartheta_2 = \frac{4\varkappa(1-h)^2}{(2-h)^2}\left\{\left[\int_0^x \frac{G_5(x)\,dx}{1-hx} - \frac{\ln(1-hx)}{\ln(1-h)}\int_0^1 \frac{G_5(x)\,dx}{1-hx}\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{(1-h)^2}{h(2-h)}\left[\frac{x(2-hx)}{(1-hx)^2} - \frac{\ln(1-hx)}{\ln(1-h)}\frac{2-h}{(1-h)^3}\right]G_3(1)\right.$$

$$G_3(x) = \int_0^x \frac{\psi(\vartheta_0)\,dx}{(1-hx)^3}, \qquad G_4(x) = \int_0^x \varphi(\vartheta_0)\frac{d\vartheta_0}{dx}dx, \qquad G_5(x) = \int_0^x \frac{G(\vartheta_0)dx}{(1-hx)^3}$$

Аналогичным образом выражаются члены второго и высших порядков малости.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда зависимости $\lambda(T)$ и $\mu(T)$ линейны, а постоянная $\varkappa$ весьма мала (так будет, в частности, для воздушного зазора). Тогда можно принять

$$\alpha(\vartheta) = 1 + \alpha_0\vartheta; \qquad \beta(\vartheta) = 1 + \beta_0\vartheta, \quad \text{или} \quad \varphi(\vartheta) \equiv \psi(\vartheta) \equiv \vartheta$$

где постоянные α_0 и β_0 находятся по формулам

$$\alpha_0 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2}, \qquad \beta_0 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2}$$

(Отметим, что если, как это можно часто считать, число Прандтля не зависит от температуры, то надо положить $\alpha_0 = \beta_0$, что несколько упрощает получающиеся формулы.)

Ограничимся членами второго порядка относительно α_0, β_0 и членами первого порядка относительно $\varkappa$. При этом можно было бы применить только что описанный метод, однако удобнее привлечь также формулы (2.2), (2.3) для группы членов, не зависящих от $\varkappa$.

Из уравнения (2.2) получаем для этой группы членов уравнение

$$\vartheta_0 + \frac{\alpha_0}{2}\vartheta_0^2 = \left(1 + \frac{\alpha_0}{2}\right) y \qquad \left(\frac{\ln(1 - hx)}{\ln(1 - h)} = y, \ 0 \leqslant y \leqslant 1\right)$$

Отсюда

$$\vartheta_0 = y + \alpha_0 \frac{y(1 - y)}{2} - \alpha_0^2 \frac{y^2(1 - y)}{2} + \ldots$$

Подстановка этого результата в (2.3) после вычислений дает выражение для w_0; получим, сохраняя только член первого порядка малости:

$$w_0 = \frac{(1 - h)x(2 - hx)}{(2 - h)(1 - hx)} + \beta_0 \frac{(1 - h)}{(2 - h)h(1 - hx)}\left(x\frac{2 - hx}{2 - h} - y\right) + \ldots \tag{3.5}$$

(Отметим, что здесь ϑ_0, w_0 имеют тот же смысл, что в § 2, но не тот, что в начале настоящего параграфа.) Что касается поправки на $\varkappa$, то ее возьмем из формул (3.3), (3.4). В частности, из формулы (3.4) видно, что в выражении для w член первой степени относительно $\varkappa$ и не содержащий α_0 и β_0 отсутствует. Объединяя полученные результаты, получим приближенную формулу для ϑ

$$\vartheta \approx y + \alpha_0 \frac{y(1 - y)}{2} - \alpha_0^2 \frac{y^2(1 - y)}{2} + \frac{\varkappa}{h(2 - h)^2}\left[(2 - h)y - \frac{(1 - h)^2 x(2 - hx)}{(1 - hx)^2}\right]$$

Член с α_0^2 в этой формуле не превосходит $(^2/_{27})\alpha_0^2$ и потому дает в выражении $T(R)$ слагаемое, не превосходящее

$$\frac{2}{27}\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2}\right)^2 (T_1 - T_2)$$

Этот член играет роль при очень большом перепаде температур; например, если $0° \leqslant T \leqslant 200°$ C, то при $T_1 - T_2 < 125°$ он меньше 1°. Член же с $\varkappa$ начинает играть роль только при достаточно большой скорости W_1; например, можно подсчитать, что в случае малого относительного зазора h для $0° \leqslant T \leqslant 200°$ C он становится порядка 1° только при $W_1 > 70$ *м/сек*. Если же перепад температур $T_1 - T_2$ и скорость W_1 не слишком велики, то можно пользоваться удобной приближенной формулой

$$\vartheta \approx y + \alpha_0 \frac{y(1 - y)}{2}$$

выражение же для w дает формула (3.5).

Если относительный зазор h мал, то можно произвести дополнительное разложение по h и оставить члены только с h в первой степени. Если к тому же оставить члены не выше второго порядка малости относительно α_0, β_0 и первого относительно $\varkappa$, то после вычисления получим

$$\vartheta \approx x + \alpha_0 \frac{x(1-x)}{2} - \alpha_0^2 \frac{x^2(1-x)}{2} + \varkappa \frac{x(1-x)}{2} - h\frac{x(1-x)}{2}$$

$$w \approx x + \beta_0 \frac{x(1-x)}{2} - \alpha_0\beta_0 \frac{x(1-x)(1-2x)}{12} - \beta_0^2 \frac{x(1-x)(1+4x)}{12} - h\frac{x(1-x)}{2}$$

Если же можно отбросить члены с $\alpha_0^2, \alpha_0\beta_0, \beta_0^2, \varkappa$ и h, то формулы становятся крайне простыми.

§ 4. Случай малого относительного зазора. В этом случае можно воспользоваться разложениями

$$\vartheta = \vartheta_0 + h\vartheta_1 + h^2\vartheta_2 + \ldots, \qquad w = w_0 + hw_1 + h^2w_2 + \ldots,$$
$$a = a_0 + ha_1 + h^2a_2 + \ldots$$

Уравнения для главных членов имеют вид равенств (1.9) — (1.11), в которых положено $h = 0$; это соответствует случаю, когда цилиндры вырождаются в параллельные плоскости. Уравнения при этом условии были в общем виде проинтегрированы в работе [5]. Уравнения для членов первого порядка малости приобретают вид:

$$\frac{dw_1}{dx} + \frac{d}{dx}(xw_0) - \frac{a_1}{\beta(\vartheta_0)} + \frac{a_0\vartheta_1\beta'(\vartheta_0)}{[\beta(\vartheta_0)]^2} - \frac{3a_0x}{\beta(\vartheta_0)} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\vartheta_1\alpha'(\vartheta_0)\frac{d\vartheta_0}{dx} - x\alpha(\vartheta_0)\frac{d\vartheta_0}{dx} + \alpha(\vartheta_0)\frac{d\vartheta_1}{dx}\right] + $$
$$+ \frac{2\varkappa a_0a_1}{\beta(\vartheta_0)} - \frac{\varkappa a_0^2\vartheta_1\beta'(\vartheta_0)}{[\beta(\vartheta_0)]^2} + \frac{3\varkappa a_0^2x}{\beta(\vartheta_0)} = 0$$

Эта система уравнений, хотя и линейная, в общем виде неразрешима Однако она разрешима в некоторых специальных случаях. Таким, например является случай капельной жидкости (при любом $\varkappa$). Тогда система уравнений для главных членов имеет постоянные коэффициенты и легко решается при помощи тригонометрических функций (например, [4], стр. 382). В этом случае и уравнение для ϑ_1 будет иметь постоянные коэффициенты, а после нахождения ϑ_1 функция w_1 определяется при помощи простого интегрирования.

Поступила 12 III 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Wendt F. Turbulente Strömungen zwischen zwei rotierenden konaxialen Zylindern. Ing.-Arch., IV, № 6, 577—595, 1933.
2. Гораздовский Т. Я., Ригерер С. А. Движение ньютоновской жидкости между вращающимися коаксиальными цилиндрами при наличии внутренних тепловых процессов, влияющих на вязкие свойства. Ж. техн. физ., XXVI, вып. 7, стр. 1532—1541, 1956.
3. Степанянц Л. Г. Некоторые случаи движения сжимаемого вязкого газа. Труды Ленингр. политехн. ин-та им. М. И. Калинина. Энергомашиностроение, техническая гидромеханика, № 5, 111—128, 1953.
4. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. ГТТИ, М.— Л., 1951.
5. Борисенко О. І. Швидкісне та температурне поле в шарі рідини між двома пластинками при відносному русі однеї паралельно другій. Прикладна механіка, т. II, вип. 4, стр. 425—437, 1956.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд-во иностр. лит., М., 1956.