

НОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ПЛАСТИЧНОСТИ И ДЕФОРМАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ

В. Д. Ключников

(Москва)

В настоящей работе проводится сравнение некоторых выводов трех новых теорий пластичности (теория скольжения Батдорфа и Будянского [1], теория Сандерса, основанная на линейных функциях нагружения [2], и теория, предложенная в работе [3]) и одного модельного представления [4].

Как известно, исследование соотношений «напряжение — деформация» в теории скольжения затруднительно ввиду крайней сложности этих соотношений для общего случая. Поэтому большинство авторов ограничиваются исследованием качественного характера. Что касается строгого анализа, то здесь, кроме выводов довольно общего порядка, получены [5] лишь некоторые сведения для случая простого растяжения (сжатия) и последующей малой догрузки растяжением (сжатием) и кручением. Выяснено, что при простом растяжении (сжатии) вблизи точки догрузки плоскости «осевое — касательное напряжение» кривая пластичности образует угол (угол пластичности), стороны которого всегда касаются начальной кривой пластичности (эллипс Мизеса). Оказалось, что если догрузка направлена во внешний (по отношению к началу координат) угол между касательными к начальной кривой пластичности из точки догрузки, то отношение G_i приращения касательного напряжения к приращению деформации сдвига не зависит от направления догрузки внутри этого угла и совпадает с тем, что дает обычная деформационная теория:

$$G_i = \frac{G}{1 + 3G [(1/E_s) - (1/E)]} \quad (0.1)$$

(E , G — упругие модули сдвига и растяжения, E_s — секущий модуль). Если догрузка направлена во внутренний угол (внутрь угла пластичности), то $G_i = G$. Наконец, при догрузке вовне этих углов G_i плавно меняется между этими значениями и в том случае, когда догрузка осуществляется одним кручением (ортогональная догрузка), G_i определяется формулой, которая отличается от (0.1) только тем, что коэффициент $3G$ заменяется на $(3/2)G$.

Этих данных для поставленной в настоящей работе цели недостаточно. Поскольку же получение более полных сведений на основании соотношений в общем случае сопряжено с большими математическими трудностями, мы ниже сделаем одно упрощающее предположение, которое позволит получить нужные результаты, в частности указанные выше, элементарным путем. Вторая из сравниваемых теорий — теория Сандерса — исследована лишь в общих чертах и, насколько нам известно, для нее вообще не получено формулы связи «напряжение — деформация». Для случая плоских путей нагружения построение такой зависимости проводится ниже.

Как обычно, векторами напряжения P приращения напряжения (догрузки) δP , деформации \mathcal{E} , пластической деформации \mathcal{E}^p и приращения пластической деформации $\delta \mathcal{E}^p$ будем называть векторы, компонентами которых являются составляющие соответствующих девиаторов; одноиндексные составляющие этих девиаторов условимся откладывать вдоль одного и того же орта векторного пространства. Поскольку в дальнейшем рассматриваются только плоские пути нагружения, то удобно

ввести следующие единые обозначения. Направление догрузки будем характеризовать углом α , который образует вектор δP и орт q , перпендикулярный к орту p :

$$q = \delta p / |\delta p| = p \delta p / \delta \sigma \cos \alpha, \quad p = P / p$$

$$p = |P| = \sqrt{\sum S_{ij}^2}, \quad \delta \sigma = |\delta P| = \sqrt{\sum \delta S_{ij}^2}, \quad \mathcal{E}^p = |\mathcal{E}^p| = \sqrt{\sum \mathcal{E}_{ij}^p{}^2} \quad (0.2)$$

Величина и положение угла пластичности (дифференциальный элемент кривой пластичности) в точке P определяются углами φ и ψ , которые составляют его стороны с направлением орта q .

1. Соотношение «напряжение — деформация», предложенное в работе [3] для плоских путей нагружения. Основу системы предположений, принятой в работе [3], составляют предположения о том, что взаимосвязь между углом пластичности в точке догрузки и векторами δP и $\delta \mathcal{E}^p$ не зависит от положения в плоскости нагружения жестко связанной системы « δP , $\delta \mathcal{E}^p$, угол пластичности» и предположения о локально минимальном характере изменения кривой пластичности на бесконечно малых отрезках путей нагружения. В случае, когда на кривой $\mathcal{E}^p \sim p$ для простого нагружения выполняется условие

$$\frac{d\mathcal{E}^p}{dp} = A \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \quad (1.1)$$

в указанной работе получено

$$\delta \mathcal{E}^p = A \left\{ p \delta p \left[(\alpha + \varphi) + \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha} \sin \varphi \right] + p \delta p \left[(\alpha + \varphi) - \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \alpha} \cos \varphi \right] \right\} \quad \text{при } -\varphi \leq \alpha \leq \psi \quad (1.2)$$

$$\delta \mathcal{E}^p = A \left\{ p \delta p \left[(\varphi + \psi) + \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\sin \alpha} \sin(\alpha + \varphi - \psi) \right] + p \delta p \left[(\varphi + \psi) - \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos \alpha} \cos(\alpha + \varphi - \psi) \right] \right\} \quad \text{при } \alpha \geq \psi$$

Величины φ и ψ в этих формулах произвольны и имеется возможность исследовать отношение теории к эксперименту для различных способов изменения углов пластичности в процессе нагружения.

2. Вывод соотношения «напряжение — деформация» в теории Сандерса для плоских путей нагружения. Основные предположения, лежащие в основе теории Сандерса, для случая плоского нагружения можно сформулировать следующим образом.

А) Для любого состояния P , достигнутого данным путем нагружения, существует замкнутая кривая (кривая пластичности), являющаяся огибающей плоского семейства прямых (прямых пластичности), такая, что любой путь из P , идущий внутри или по самой кривой (и только такой), вызывает лишь упругое деформирование материала.

В) В процессе пластического деформирования прямые пластичности могут перемещаться лишь в противоположную от начала координат сторону и только поступательно (самопараллельно), причем перемещаются только те прямые, которые имеют с вектором напряжения общую точку.

С) При перемещении данной прямой пластичности на величину dh возникает приращение пластической деформации $d\mathcal{E}_0^p$, определяемое соот-

ношением

$$d\mathcal{E}_0^p = \Phi(h) dh \mathbf{n} \quad (2.1)$$

где h — расстояние от начала координат до данной прямой, \mathbf{n} — единичный вектор нормали к этой прямой в плоскости нагружения.

Д) Общая пластическая деформация $\delta\mathcal{E}^p$, вызванная догрузкой δP , находится суммированием пластических деформаций $d\mathcal{E}_0^p$ от перемещения отдельных прямых пластичности.

Е) Объемная деформация упруга.

Пусть из некоторого состояния P производится догрузка δP . Эта догрузка приводит к перемещению тех

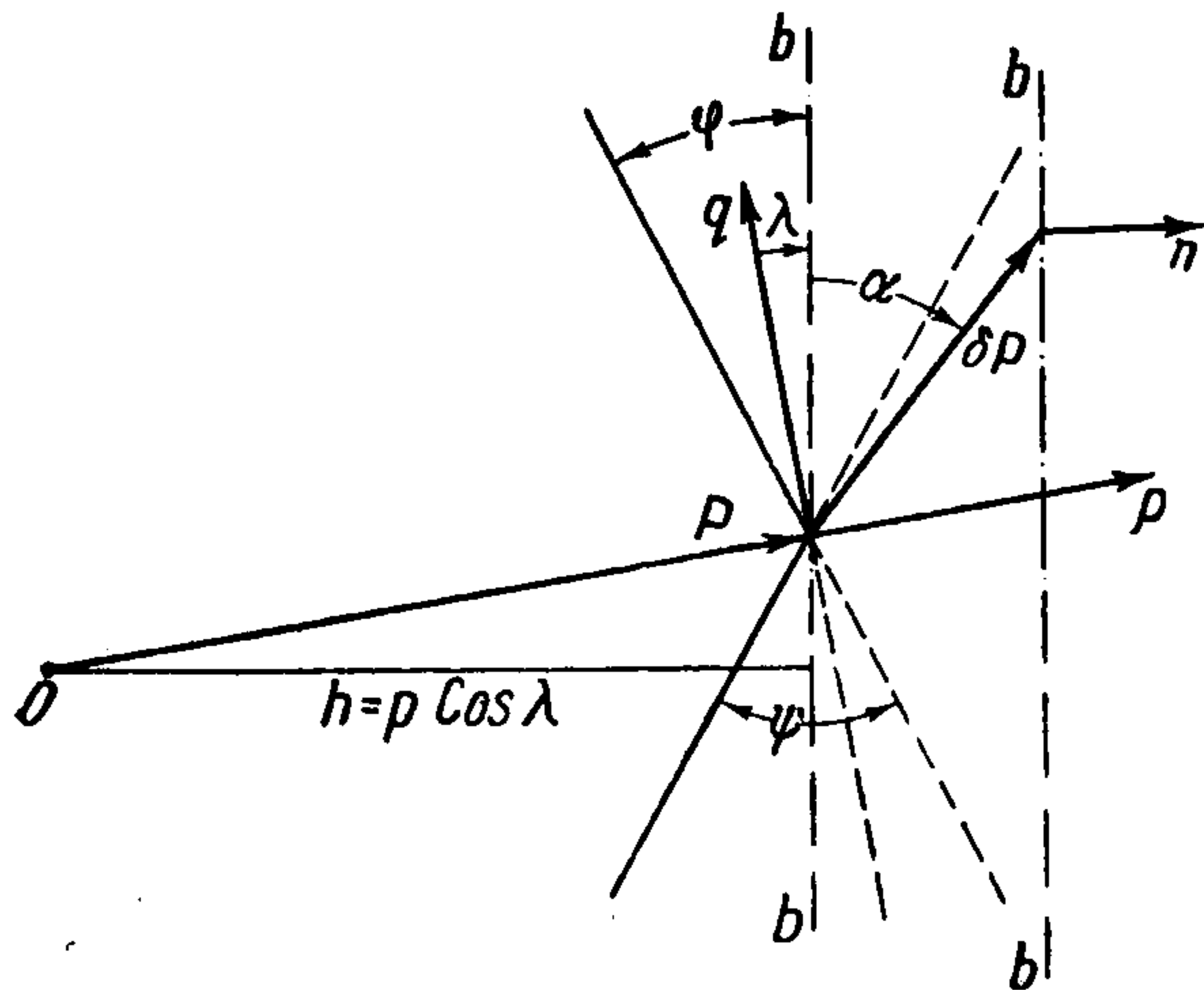
прямых пластичности bb , которые составляют углы λ с ортом \mathbf{q} , лежащие в пределах (фиг. 1)

$$\begin{aligned} -\varphi \leq \lambda \leq \alpha & \quad \text{при} \quad -\varphi \leq \alpha \leq \psi \\ -\varphi \leq \lambda \leq \psi & \quad \text{при} \quad \alpha \geq \psi \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из фиг. 1 найдем

$$h = p \cos \lambda \quad (2.3)$$

$$dh = \delta\sigma \sin(\alpha - \lambda), \quad \mathbf{n} = p \cos \lambda - \mathbf{q} \sin \lambda$$



Фиг. 1

Вследствие сделанных предположений общее приращение пластической деформации есть

$$\delta\mathcal{E}^p = \delta\sigma \int_{-\varphi}^x \Phi(h) \sin(\alpha - \lambda) [p \cos \lambda - \mathbf{q} \sin \lambda] d\lambda \quad (2.4)$$

причем

$$x = \begin{cases} \alpha & \text{при} \quad -\varphi \leq \alpha \leq \psi \\ \psi & \text{при} \quad \alpha \geq \psi \end{cases} \quad (2.5)$$

Предположение В дает метод построения углов пластичности для любой точки произвольного пути нагружения (метод внешних касательных), представленный на фиг. 2, на основании чего определяются углы φ и ψ , входящие в соотношения (2.4) и (2.5). Неизвестная функция Φ может быть определена из опыта на простое нагружение. Если положить

$$\Phi(h) = \Phi(p \cos \lambda) = A = \text{const} \quad (2.6)$$

то на основании формул (2.4) и (2.5) для простого нагружения

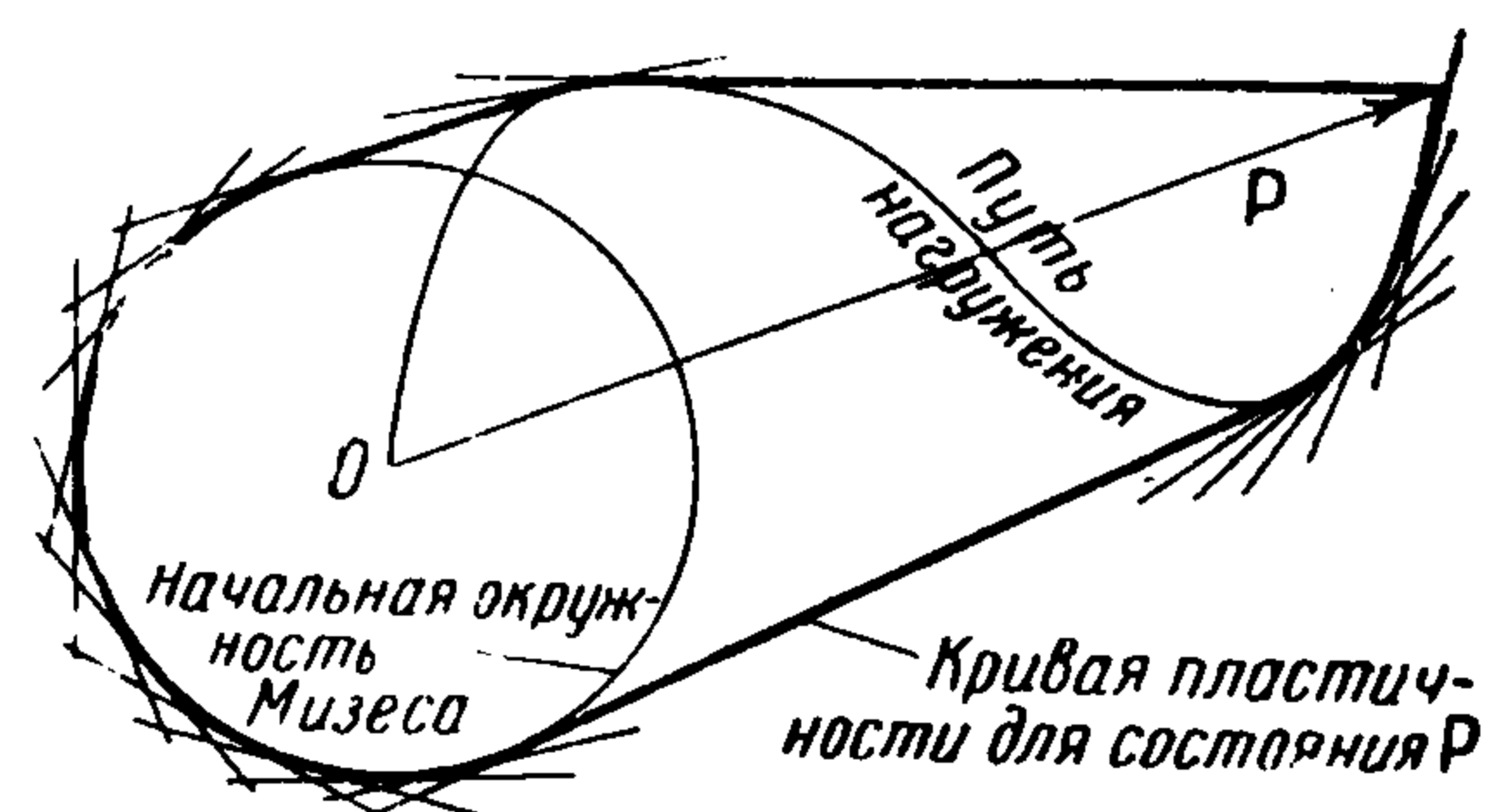
$$\varphi = \psi, \quad \alpha = 1/2\pi, \quad \delta\sigma = dp$$

$$|\delta\mathcal{E}^p| = \delta|\mathcal{E}^p| = \delta\mathcal{E}^p$$

на кривой $\mathcal{E}^p \sim p$ должно выполняться то же условие, что и принятое в предыдущем разделе [формула (1.1)]. В общем случае нагружения имеем

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}^p = \frac{A\delta\sigma}{2} \{ & [\sin \alpha (\lambda + \frac{1}{2} \sin 2\lambda) + \frac{1}{2} \cos \alpha \cos 2\lambda] p + \\ & + [\frac{1}{2} \sin \alpha \cos 2\lambda + \cos \alpha (\lambda - \frac{1}{2} \sin 2\lambda)] \mathbf{q} \}^x_{-\varphi} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Если теперь использовать первую из формул (0.2) и произвести подстановку пределов с учетом формулы (2.5), то придем к тем же самым



[Фиг. 2]

соотношениям, что и (1.2), только теперь уже входящие в них величины φ и ψ вполне определены на основании метода внешних касательных.

3. Вывод соотношения «напряжение — деформация» в теории скольжения на основе модели плоского тела. Предположения этой теории пластичности обычно формулируются в терминах пластичности микроструктуры материала. Однако эти предположения допускают следующую трактовку их применительно к деформации континуальной среды.

А) Пластическая деформация окрестности данной точки материала является следствием необратимых сдвигов по некоторым плоскостям, проходящим через точку.

В) Необратимые сдвиги происходят только в тех плоскостях, в которых найдется хоть одно направление, вдоль которого компонента τ касательного напряжения данной плоскости превосходит некоторое постоянное значение τ_s и, кроме того, будет больше всех своих предшествующих значений.

С) В каждом таком направлении на данной плоскости происходит пластический сдвиг γ_0^p , величина которого зависит только от τ .

Д) Общая пластическая деформация окрестности точки материала найдется суммированием единичных деформаций от необратимых сдвигов вдоль всех направлений на всех плоскостях.

Е) Объемная деформация упруга.

Ниже мы рассмотрим следствие этой системы предположений применительно к модели «плоского тела». Под последним мы понимаем материал, который деформируется только в плоскости приложения нагрузок. Указанные в пункте А сдвиги здесь могут происходить только по плоскостям, перпендикулярным к плоскости приложения нагрузок. Для данного материала напряженно-деформированное состояние определяется тремя компонентами напряжений и деформаций ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$) в некоторых неподвижных осях x и y в плоскости приложения нагрузок. Девятерные части компонент напряжений и деформаций в данном случае определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y), & \mathcal{E}_{xx} &= \epsilon_x - \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) = \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \\ S_{yy} &= \sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x), & \mathcal{E}_{yy} &= \epsilon_y - \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) = \frac{1}{2}(\epsilon_y - \epsilon_x) \\ S_{xy} &= S_{yx} = \tau_{xy}, & \mathcal{E}_{xy} &= \mathcal{E}_{yx} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Если для трехмерного материала векторное пространство «напряжений — деформаций» вообще девятимерно, то для рассматриваемого материала оно имеет только четыре измерения. Кроме того, поскольку при любом нагружении должны выполняться равенства

$$S_{xx} + S_{yy} = 0, \quad S_{xy} = S_{yx}, \quad \mathcal{E}_{xx} + \mathcal{E}_{yy} = 0, \quad \mathcal{E}_{xy} = \mathcal{E}_{yx} \quad (3.2)$$

то пути нагружения и деформирования принадлежат одной и той же двумерной плоскости в этом четырехмерном пространстве и, следовательно, векторы \mathbf{P} и \mathcal{E} , определенные по тому же правилу, что и для трехмерного материала, должны представляться через два неподвижных орта этой двумерной плоскости. Пусть $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$ — ортонормирован-

ный базис. По определению и при учете (3.2) имеем (3.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= S_{xx}\mathbf{k}_1 + S_{yy}\mathbf{k}_2 + S_{xy}\mathbf{k}_3 + S_{yx}\mathbf{k}_4 = S_{xx}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + S_{xy}(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \\ \mathfrak{D} &= \mathfrak{D}_{xx}\mathbf{k}_1 + \mathfrak{D}_{yy}\mathbf{k}_2 + \mathfrak{D}_{xy}\mathbf{k}_3 + \mathfrak{D}_{yx}\mathbf{k}_4 = \mathfrak{D}_{xx}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \mathfrak{D}_{xy}(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \end{aligned}$$

Положим $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 = \sqrt{2}\mathbf{i}$, $\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 = \sqrt{2}\mathbf{j}$. Легко видеть, что векторы \mathbf{i} и \mathbf{j} единичные и ортогональные. На основании сказанного имеем

$$\mathbf{P} = \sqrt{2}[S_{xx}\mathbf{i} + S_{xy}\mathbf{j}], \quad \mathfrak{D} = \sqrt{2}[\mathfrak{D}_{xx}\mathbf{i} + \mathfrak{D}_{xy}\mathbf{j}] \quad (3.4)$$

Точно так же выражаются через орты \mathbf{i} и \mathbf{j} составляющие соответствующих девиаторов векторы $\delta\mathbf{P}$, \mathfrak{D}^p и $\delta\mathfrak{D}^p$.

Пусть образец из плоского материала находится в некотором напряженном состоянии. Тогда в некотором направлении под углом ω к оси x возникает касательное напряжение

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\omega + \tau_{xy}\cos 2\omega = S_{xx}\sin 2\omega + S_{xy}\cos 2\omega \quad (3.5)$$

В тех направлениях, где τ превысит постоянное значение τ_s и будет больше своих предшествующих значений в соответствии с предположением (В), произойдет пластический сдвиг

$$\gamma_0^p = F(\tau) \quad (3.6)$$

который создает единичную пластическую деформацию в осях x и y , легко определяемую из геометрических соображений при учете предположений (Е):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{p0} &= \frac{1}{2}\gamma_0^p\sin 2\omega = \frac{1}{2}F(\tau)\sin 2\omega & \varepsilon_y^{p0} &= -\varepsilon_x^{p0} \\ \gamma_{xy}^{p0} &= \gamma_0^p\cos 2\omega = F(\tau)\cos 2\omega \end{aligned} \quad (3.7)$$

Общая пластическая деформация в осях x и y найдется суммированием по всем углам ω , где для τ выполняются указанные выше условия. Все возможные углы ω заключены в пределах $-\pi/2 \leq \omega \leq \pi/2$, но поскольку пластические деформации тела, которые происходят от сдвигов в двух направлениях, составляющих угол $\pi/2$, равны, то можно ограничиться рассмотрением лишь углов $0 \leq \omega \leq \pi/2$, удвоив при этом результат. При учете этого обстоятельства и второй формулы (3.4) имеем

$$\mathfrak{D}^p = \sqrt{2} \int F(\tau) [\sin 2\omega\mathbf{i} + \cos 2\omega\mathbf{j}] d\omega \quad (3.8)$$

Если из некоторого напряженного состояния производится догрузка, то аналогичными рассуждениями легко показать, что соответствующее приращение пластической деформации определяется соотношением

$$\delta\mathfrak{D}^p = \sqrt{2} \int F'(\tau) d\tau [\sin 2\omega\mathbf{i} + \cos 2\omega\mathbf{j}] d\omega \quad (3.9)$$

где

$$F'(\tau) = \frac{dF(\tau)}{d\tau}, \quad \delta\tau = \delta S_{xx}\sin 2\omega + \delta S_{xy}\cos 2\omega \quad (3.10)$$

Обозначим через β угол, который на плоскости нагружения образует векторы \mathbf{P} и \mathbf{i} (фиг. 3). Тогда

$$\mathbf{i} = \rho \cos \beta - \mathbf{q} \sin \beta, \quad \mathbf{j} = \rho \sin \beta + \mathbf{q} \cos \beta \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \frac{P}{\sqrt{2}} \cos \beta, & S_{xy} &= \frac{P}{\sqrt{2}} \sin \beta \\ \delta S_{xx} &= \frac{\delta\sigma}{\sqrt{2}} \sin(\alpha - \beta), & \delta S_{xy} &= \frac{\delta\sigma}{\sqrt{2}} \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

В новых обозначениях величины τ и $\delta\tau$ выразятся следующим образом:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} p \sin(\beta + 2\omega), \quad \delta\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta\sigma \cos(\alpha - \beta - 2\omega) \quad (3.12)$$

При простом нагружении угол β не меняется; для догрузки из произвольного состояния это имеет место всегда. Поэтому, вводя обозначение

$$\beta + 2\omega = \frac{1}{2} \pi + \lambda \quad (3.13)$$

и переходя в формулах (3.8) и (3.9) от ортов i и j к ортам p и q , получим

$$\mathfrak{E}^p = \frac{\sqrt{2}}{2} \int F(\tau) [p \cos \lambda - q \sin \lambda] d\lambda \quad (3.14)$$

$$\delta\mathfrak{E}^p = \frac{\delta\sigma}{2} \int F'(\tau) \sin(\alpha - \lambda) [p \cos \lambda - q \sin \lambda] d\lambda \quad (3.15)$$

Заметим, что первая из этих формул справедлива для простого нагружения, вторая — всегда. В этих формулах $\tau = (p / \sqrt{2}) \cos \lambda$. Обозначая, как и в предыдущем разделе [первая из формул (2.3)], $h = p \cos \lambda$ и, кроме того, полагая

$$F(\tau) = F\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \chi(h) \quad (3.16)$$

получим

$$\begin{aligned} F'(\tau) &= \frac{dF(\tau)}{d\tau} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{d\chi(h)}{d\tau} = 2 \frac{d\chi(h)}{dh} = 2 \Phi(h) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Пределы интегрирования в формулах (3.14) и (3.15) неизвестны. Определим эти пределы для случая простого нагружения и последующей догрузки.

Пусть происходит простое нагружение из недеформированного состояния. Первые пластические деформации возникнут тогда, когда максимальное значение $\tau = (p / \sqrt{2}) \cos \lambda$ достигнем некоторого предельного значения $\tau_s = p_s / \sqrt{2}$, т. е. когда

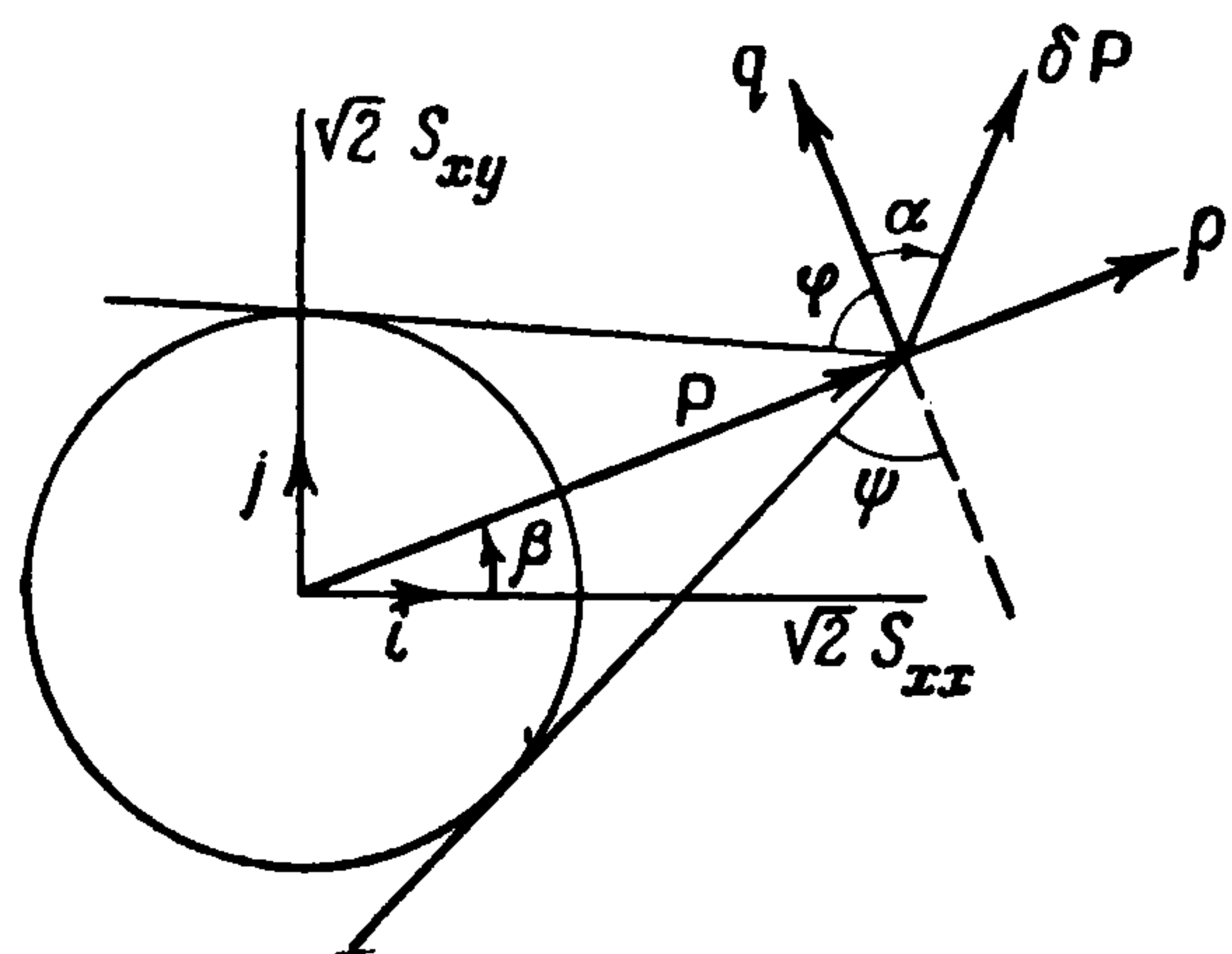
$$p = |\mathbf{P}| = p_s \quad (3.18)$$

Следовательно, начальная кривая пластичности в плоскости нагружения есть окружности радиуса p_s . При увеличении p пластические сдвиги распространяются на пучок направлений, крайние лучи которого определяются условием

$$\cos \lambda = \frac{p_s}{p} \quad (3.19)$$

Если через φ обозначить угол, который вектор q образует с ближайшей касательной из точки \mathbf{P} к начальной окружности пластичности (фиг. 3), то получим, что $p_s / p = \cos \varphi$ и, следовательно, условие (3.19) означает

$$\lambda = \pm \varphi \quad (3.20)$$



Фиг. 3

Таким образом, пределы интегрирования в формуле (3.14) определяются условием

$$-\varphi \leq \lambda \leq \varphi \quad (3.21)$$

При простом нагружении вектор пластической деформации должен быть направлен так же, как и неподвижный вектор ρ . Для того чтобы формула (3.14) давала такой результат, нужно потребовать, чтобы функция $F(\tau)$ была четной, так же как и $\chi(h)$. Нетрудно видеть, что на этом основании соотношение (3.14) с учетом (5.16) определяет кривую $\mathcal{E}^p \sim \rho$ для простого нагружения формулой

$$\mathcal{E}^p = 2 \int_0^{\varphi} \chi(h) \cos \lambda d\lambda \quad (3.22)$$

Если из конца простого нагружения производится как угодно малая догрузка, то дополнительные пластические сдвиги могут возникнуть только в тех направлениях, где они имели место в предыдущий момент, т. е. только в пучке (3.22), и только в тех направлениях этого пучка, где $\delta\tau \geq 0$, т. е. где $\alpha \geq \lambda$. Следовательно, если α меньше минимального возможного значения $\lambda = -\varphi$, то как направленная догрузка вызывает только упругое приращение деформаций. Это означает, что в конце простого нагружения кривая пластичности образует угол, стороны которого касаются начальной окружности пластичности (круг Мизеса). Далее, если α заключено в пределах $-\varphi \leq \alpha \leq \varphi$, то пучок, в котором происходят дополнительные сдвиги и, следовательно, пределы интегрирования в формуле (3.23), дается условием

$$-\varphi \leq \lambda \leq \alpha \quad (3.23)$$

Если $\alpha \geq \varphi$, то пластические деформации будут во всем пучке (3.21).

Таким образом, для связи между догрузкой, произведенной из конца простого нагружения, и вектором $\delta\mathcal{E}^p$ имеем те же соотношения, что и в теории Сандерса для этого случая (формулы (2.4) и (2.5), где надо положить $\varphi = \psi$). Здесь имеется лишь то отличие, что теперь входящие в соотношения векторы определяют напряженно-деформированное состояние двумерного материала. Если, как и прежде, характеризовать величину и положение угла пластичности в произвольном состоянии углами φ и ψ , то в общем случае догрузки из произвольного состояния имеют место формулы (2.4) и (2.5), а при условии (1.1) — формулы (1.2). Величины φ и ψ в этих формулах надо считать определенными, и то обстоятельство, что найденные в явной форме законы изменения φ и ψ для простого нагружения определяются методом внешних касательных, позволяет надеяться, что такой метод будет справедлив и для более широкого класса путей нагружения.

Сделаем теперь допущение (отмеченное во введении), состоящее в том, что полученные соотношения будем считать справедливыми для плоского нагружения трехмерного тела, т. е. будем рассматривать входящие в соотношения векторы в девятимерном векторном пространстве реального материала. Поскольку при этом получаются в точности те же результаты, что и приведенные в начале статьи (это будет сейчас показано), то есть основания считать, что определенные таким образом соотношения «напряжение — деформация» для рассматриваемого класса путей нагружения

либо являются точным следствием исходной системы предположений для трехмерного континуума, либо достаточно близки к ним. Таким образом, наиболее вероятно, что по крайней мере для догрузки из конца простого нагружения выводы теории скольжения совпадают с выводами теории Сандерса.

Покажем, как из соотношений (2.4) и (2.5) при $\varphi = \psi$, $\Phi = \chi'$ и из формулы (3.22) следуют результаты, указанные во введении. Если догрузка, следующая из конца простого нагружения, имеет компоненты $\delta\sigma_q = \delta\sigma \cos \alpha$ в направлении орта \mathbf{q} , то возникающее приращение пластической деформации тоже имеет компоненту $\delta\mathcal{E}_q^p$ в этом направлении, причем

$$\frac{\delta\mathcal{E}_q^p}{\delta\sigma_q} = -\frac{1}{\cos \alpha} \int_{-\varphi}^{\kappa} \chi'(h) \sin(\alpha - \lambda) \sin \lambda d\lambda \quad (3.24)$$

Поскольку

$$\chi'(h) = \frac{d\chi(h)}{dh} = -\frac{1}{p \sin \lambda} \frac{d\chi(h)}{d\lambda} \quad (3.25)$$

то интегрируя (3.24) по частям, получим

$$\frac{\delta\mathcal{E}_q^p}{\delta\sigma_q} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{p} \left[\chi \cos \lambda + \int \chi \sin \lambda d\lambda \right]_{-\varphi}^{\kappa} + \frac{1}{p} \left[\chi \sin \lambda + \int \chi \cos \lambda d\lambda \right]_{-\varphi}^{\kappa} \quad (3.26)$$

Если $\kappa = \varphi$ (догрузка направлена во внешний угол $\alpha \geq \varphi$), то первая скобка и первый член второй скобки будут равны нулю, так как $\chi(h) = \chi(p \cos \lambda) -$ функция четная и $\chi(p \cos \varphi) = \chi(p_s) = 0$.

Если $\kappa = 0$ (ортогональная догрузка $\alpha = 0$), то коэффициент при первой скобке обращается в нуль, так же как и первый член второй скобки, ибо при $\lambda = \varphi$ $\chi = 0$, а при $\lambda = 0$ $\sin \lambda = 0$.

На этом основании и формулы (3.22) имеем

$$\frac{\delta\mathcal{E}_q^p}{\delta\sigma_q} = \frac{\mathcal{E}^p}{p} \quad \text{при } \kappa = \varphi, \quad \frac{\delta\mathcal{E}_q^p}{\delta\sigma_q} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}^p}{p} \quad \text{при } \kappa = 0 \quad (3.27)$$

Пусть до догрузки имело место простое растяжение (сжатие), тогда

$$\mathcal{E}^p = \sqrt{\Sigma \mathcal{E}_{ij}^p} = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathcal{E}_{xx}^p = \sqrt{\frac{3}{2}} \varepsilon_x^p, \quad p = \sqrt{\Sigma S_{ij}^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_x$$

Следовательно

$$\frac{\mathcal{E}^p}{p} = \frac{3}{2} = \frac{\varepsilon_x^p}{\sigma_x} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) \quad (3.28)$$

Если затем дается догрузка растяжением (сжатием) и кручением, то в этом случае

$$\delta\mathcal{E}_q^p / \delta\sigma_q = (1/2) (\delta\gamma_{xy}^p / \delta\tau_{xy})$$

Так как $G_i = \delta\tau_{xy} / \delta\gamma_{xy}$, то

$$G_i = \frac{G}{1 + G (\delta\gamma_{xy}^p / \delta\tau_{xy})} \quad (3.29)$$

и полученные результаты полностью совпадают с теми, что даны во введении, причем легко видеть, что начальной кривой пластичности в плоскости $\sigma_x \sim \tau_{xy}$ будет действительно эллипс Мизеса, которого будут касаться стороны угла пластичности для точки догрузки σ_x .

4. Модель Работнова, иллюстрирующая свойства упрочняющегося материала. Качественную сторону явлений, происходящих в пластически упрочняющихся материалах, можно попытаться проследить на основе некоторых моделей и, в частности, на примере чистого изгиба тонкостенной трубы из упруго-идеально-пластического материала.

Если обозначить

$$\mathbf{M} = \frac{1}{R^2 t \sigma_s} [M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j}], \quad \mathbf{N} = \frac{ER}{\sigma_s} [\kappa_x \mathbf{i} + \kappa_y \mathbf{j}] \quad (4.1)$$

(R — диаметр, t — толщина стенки трубы, M_x , M_y , κ_x , κ_y — моменты и кривизны в перпендикулярных плоскостях, проходящих через ось трубы, \mathbf{i} , \mathbf{j} — некоторый ортонормированный базис), то результаты такого исследования, проведенного в работе [4], можно представить следующим образом.

Если считать вектор \mathbf{M} аналогом вектора напряжений \mathbf{P} , а вектор \mathbf{N} аналогом вектора деформаций $\mathbf{\Delta}$, то начальная кривая пластичности в этом случае есть круг радиуса π . При упругой работе материала

$$\mathbf{P} = \pi \mathbf{\Delta} \quad (4.2)$$

В процессе простого нагружения кривая пластичности изменяется так, что в конце вектора \mathbf{P} образует симметричный угол, величина которого дается формулой

$$\frac{p_s}{p} = \frac{\cos \varphi}{1 - (2\varphi - \sin 2\varphi)/\pi} \quad (4.3)$$

При догрузке из конца простого нагружения при $\alpha \geq \omega$, где ω определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\pi - 2\varphi - \sin 2\varphi}{\pi - 2\varphi + \sin 2\varphi} \operatorname{tg} \varphi \quad (4.4)$$

связь между \mathbf{P} и $\mathbf{\Delta}$ дается обычной теорией Генки—Надаи, где роль модуля упругости и секущего модуля выполняют величины

$$E = \pi, \quad E_s = \pi - 2\varphi + \sin 2\varphi \quad (4.5)$$

В работе получена связь $\delta \mathbf{P}$ и $\delta \mathbf{\Delta}$ для догрузки в направлениях

$$-\varphi \leq \alpha \leq \omega.$$

Интересно отметить следующее обстоятельство. Если считать вектор \mathbf{N} аналогом вектора напряжений \mathbf{P} , а вектор $\mathbf{N}\pi - \mathbf{M}$ аналогом вектора пластической деформации $\mathbf{\Delta}^p$, то нетрудно проверить, что при догрузке из конца простого нагружения имеет место соотношение (1.2), где $A = p_s = 1$ и φ строится методом внешних касательных. Нетрудно также показать, что и при догрузках из произвольного состояния справедливы формулы (1.2), где φ и ψ надо считать определенными. Как и в предыдущем разделе, исследование зависимости φ и ψ от пути при произвольном нагружении затруднительно. Надо думать, что и здесь будет выполняться метод внешних касательных.

На основании изложенного можно сделать следующие выводы.

а) При догрузке из конца простого нагружения теории Батдорфа—Будянского и Сандерса совпадают. Такого совпадения нужно ожидать и для более широкого класса путей нагружения.

б) Для плоских путей нагружения при выполнении условия (1.1) разрешающие соотношения обеих этих теорий являются частным случаем соотношений (1.2).

с) Если для модели Работнова считать вектор $N\pi - M$ аналогом вектора пластической деформации, а вектор N аналогом вектора напряжения, то разрешающие соотношения также являются частным случаем соотношений (1.2).

д) Поскольку показано [3], что второе из соотношений (1.2) при $\varphi = \psi$ и при справедливости метода внешних касательных совпадает с обычной деформационной теорией Генки—Надаи, то при догрузке из конца простого нагружения теории Батдорфа—Будянского, Сандерса и разрешающие соотношения в модели Работнова совпадают с теорией Генки—Надаи, если $\alpha \geq \varphi$. Если удастся показать справедливость метода внешних касательных для произвольных путей нагружения в теории Батдорфа—Будянского и для модели Работнова (что представляется наиболее вероятным), то для них можно будет утверждать то же, что и для теории Сандерса, а именно совпадение с теорией Генки—Надаи при догрузках $\alpha \geq \varphi$ из любого состояния, где $\varphi = \psi$.

Поучительным является тот факт, что старая деформационная теория, известные недостатки которой при использовании условия гладкости поверхности пластичности делали ее физически малодостоверной и оказали значительное влияние на развитие новых взглядов, именно с точки зрения новых представлений вновь находит свое место в системе общих соотношений пластичности.

Поступила 29 I 1959

Кафедра теории пластичности
МГУ

ЛИТЕРАТУРА

1. Batdorf I. B., Budiansky B. A. A Mathematical Theory of Plasticity Based on the Concept of slip. NACA T. N., № 1871, April 1949.
2. Sanders I. L. Plastic Stress-Strain Relations Based on Linear Loading Functions. Proc. of the Second US. Nat. Congr. of Appl. Mech., pp. 455—460, 1954. (русск. пер.: Сандерс. Соотношения между напряжениями и деформациями пластической области, основанные на линейных функциях нагружения. Сб. пер. «Механика», вып. 3, 1956).
3. Ключников В. Д. О построении теории пластичности. ПММ, т. XXIII, вып. 2, 1959.
4. Работнов Ю. Н. Модель, иллюстрирующая некоторые свойства упрочняющегося пластического тела. ПММ, т. XXIII, вып. 1, 1959.
5. Cicala P. Sulle de formazione plasteiche. Acad. Naz. dei Lincei, Roma. Rendiconti, v. 5, fasc. 6, 1950.