

О РАВНОВЕСНЫХ ТРЕЩИНАХ, ОБРАЗУЮЩИХСЯ  
ПРИ ХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ  
ТРЕЩИНЫ В ПЛОСКИХ ПЛАСТИНКАХ

Г. И. Баренблатт

(Москва)

В работе [1] были рассмотрены основные представления теории равновесных трещин, т. е. трещин, размеры которых не меняются при данной нагрузке. Чтобы избежать в настоящей работе многочисленных ссылок и повторений, кратко приведем основные исходные положения работы [1]. Трещина разбивается на две области: *внутреннюю* область, где расстояние между противоположными берегами трещины значительно и взаимодействие их пренебрежимо мало, и *концевую* область, где противоположные берега трещины близко примыкают один к другому и действуют весьма значительные по величине силы сцепления. В основе всей концепции лежат три гипотезы.

1. *Продольные размеры концевой области малы сравнительно с продольными размерами всей трещины.*

2. *Распределение смещений точек поверхности трещины в концевой области не зависит от действующих нагрузок и для данного материала при данных условиях всегда одинаково.* Силы сцепления, притягивающие друг к другу противоположные берега трещины, зависят только от распределения смещений в концевой области, поэтому из сформулированной гипотезы вытекает независимость этих сил от нагрузок.

3. *Противоположные берега трещины на ее кромках плавно смыкаются, или, что то же, напряжение на кромках трещины конечно.* Эта гипотеза была впервые выдвинута С. А. Христиановичем [2] при рассмотрении задач образования и развития трещин в горных породах. Для этих задач единственным сжимающим фактором является горное давление — давление, обусловливаемое весом вышележащих горных пород, и силы сцепления не рассматривались и не учитывались.

В работе [1] предложенная схема была применена к решению задачи об осесимметричных равновесных трещинах. В предлагаемой работе эти представления применяются к рассмотрению задачи о прямолинейных равновесных трещинах в плоских пластинках. Оказывается, что и в этом случае размеры трещины определяются приложенными нагрузками и введенной в работе [1] новой универсальной характеристикой материала — модулем сцепления  $K$ . Силы сцепления существенно влияют только на размеры трещин и на распределение смещений противоположных берегов трещины вблизи ее концов.

§ 1. **Условие плавного смыкания и конечности напряжений на концах изолированного разреза в бесконечной плоскости.** Для дальнейшего необходимо рассмотреть следующую задачу. В бесконечной плоскости имеется разрез вдоль оси  $x$  от точки  $x = a$  до точки  $x = b$  (фиг. 1). В точках противоположных краев разреза, имеющих одинаковые координаты  $x$ , приложены равные по величине и противоположные по направлению нормальные напряжения —  $g(x)$ . Выясним условия, при выполнении которых напряжения на краях разреза конечны, или, что то же самое, противоположные берега деформированной поверхности разреза плавно смыкаются на его краях.

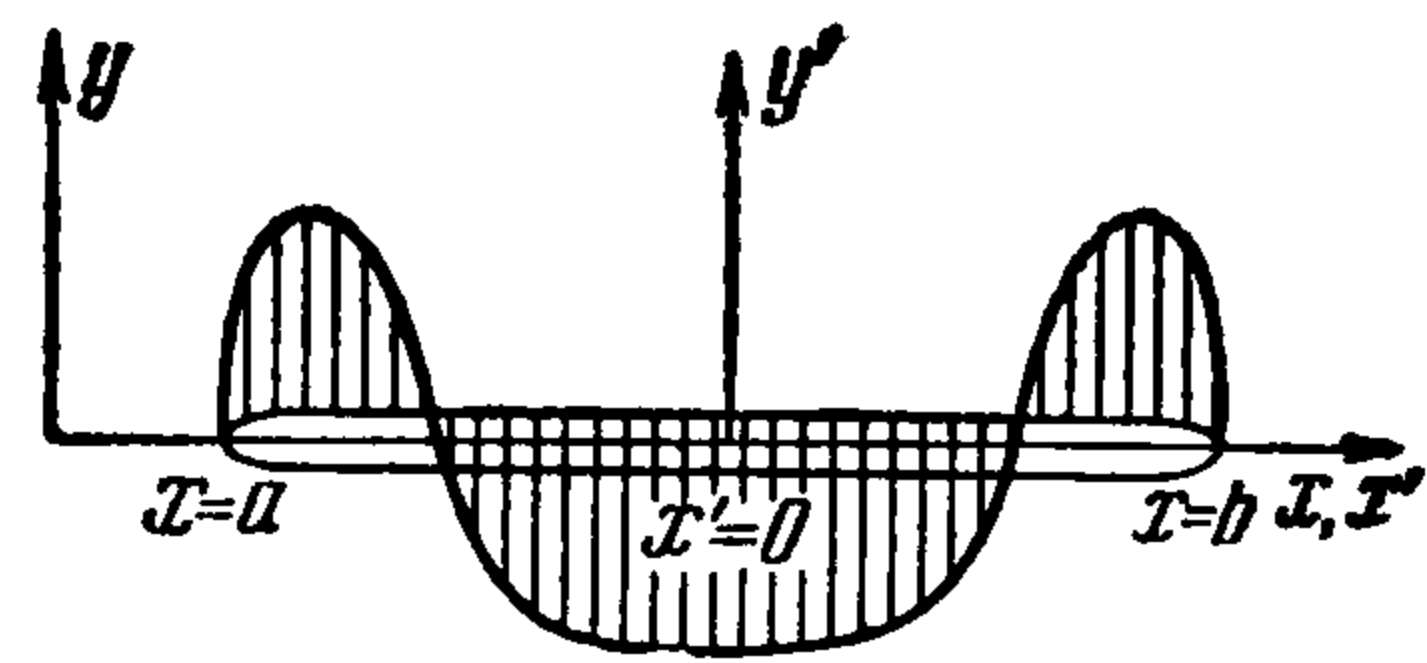
От системы координат  $xy$  перейдем к координатам

$$x' = x - 1/2(a + b), \quad y' = y$$

так что в новых координатах разрез симметричен относительно начала. Для решения рассматриваемой задачи воспользуемся методом Н. И. Мусхелишвили [4]. Напомним основные соотношения этого метода:

$$X_x + Y_y = 4 \operatorname{Re} \{ \Phi(\zeta) \} \quad (1.1)$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2 \left\{ \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \Psi'(\zeta) \right\} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

где  $X_x, Y_y, X_y$  — компоненты тензора напряжений, а функция

$$z' = x' + iy' = \omega(\zeta) = 1/2l(\zeta + \zeta^{-1}), \quad l = 1/2(b - a) \quad (1.3)$$

дает отображение внешности разреза на внешность единичного круга в параметрической плоскости  $\zeta$ . Функции  $\Phi(\zeta)$  и  $\Psi'(\zeta)$  определяются соотношениями

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad \Psi'(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \quad (1.4)$$

причем

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{fd\sigma}{\sigma - \zeta}, \quad \psi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\bar{f}d\sigma}{\sigma - \zeta} - \zeta \frac{1 + \zeta^2}{\zeta^2 - 1} \varphi'(\zeta) \quad (1.5)$$

интегралы берутся по единичной окружности, а

$$f = \bar{f} = - \int_{x_0'}^{x'(\sigma)} g(x') dx' \quad (1.6)$$

где  $x_0'$  — некоторая фиксированная точка, а  $x'(\sigma)$  — переменная точка. Из формул (1.3) — (1.5) в силу действительности  $f$  вытекает, что на всей оси  $x$ , т. е. на всем разрезе и его продолжении, выполняется условие

$$\frac{\overline{\omega}}{\omega'} \Phi' + \Psi' \equiv 0$$

так что в силу (1.2) имеем на самой щели и ее продолжении

$$X_x = Y_y, \quad X_y = 0 \quad (1.7)$$

и, следовательно,

$$X_x = Y_y = 2 \operatorname{Re} \{ \Phi(\zeta) \} \quad (1.8)$$

Таким образом, для конечности напряжений в концах разреза необходимо и достаточно конечности  $\Phi(+1)$  и  $\Phi(-1)$ , поскольку точки  $\zeta = +1$  и  $\zeta = -1$  соответствуют краям разреза.

Для определения  $\varphi(\zeta)$  проще всего поступить следующим образом. Если к противоположным берегам разреза в точке  $x' = x_0'$  поверхности разреза приложены равные по величине и противоположные по направлению разрывающие сосредоточенные силы —  $P$ , то в силу (1.5) можно получить

$$\varphi(\zeta) = \frac{P}{2\pi i} \ln \frac{\zeta - e^{i\lambda}}{\zeta - e^{-i\lambda}}, \quad \lambda = \arccos \frac{x_0'}{l} \quad (1.9)$$

Суммируя решения (1.9) (поскольку на самом разрезе  $x' = l \cos \lambda$ , на участке разреза  $dx'$  приложена сила  $-g(x') dx' = g(l \cos \lambda) l \sin \lambda d\lambda$ ), получим представление функции  $\varphi(\zeta)$  для рассматриваемой нами общей задачи в виде

$$\varphi(\zeta) = \frac{l}{2\pi i} \int_0^\pi g(l \cos \lambda) \sin \lambda \ln \left( \frac{\zeta - e^{i\lambda}}{\zeta - e^{-i\lambda}} \right) d\lambda \quad (1.10)$$

откуда получаем

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \frac{\zeta^2 N(\zeta)}{(\zeta^2 - 1)\pi}, \quad N(\zeta) = 2 \int_0^\pi \frac{g \sin^2 \lambda d\lambda}{\zeta^2 + 1 - 2\zeta \cos \lambda} \quad (1.11)$$

Для конечности напряжений на кромке щели  $x' = l$ , т. е. для конечности  $\Phi(1)$  необходимо, чтобы  $N(1) = 0$ , т. е.

$$\int_0^\pi \frac{g(l \cos \lambda) \sin^2 \lambda d\lambda}{1 - \cos \lambda} = 0 \quad (1.12)$$

Переходя к переменной  $x' = l \cos \lambda$  и к переменной  $x' = x + \frac{b+a}{2}$ , получаем

$$l \int_0^\pi \frac{g \sin^2 \lambda d\lambda}{1 - \cos \lambda} = \int_{-l}^l \frac{g \sqrt{l^2 - x'^2} dx'}{l - x'} = \int_{-l}^l g \sqrt{\frac{l+x'}{l-x'}} dx' = \int_a^b g(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx$$

поэтому условие (1.12) конечности напряжений на правом конце разреза  $x = b$  приводится к виду

$$\int_a^b g(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx = 0 \quad (1.13)$$

Условие конечности напряжений (1.13) можно также получить и непосредственно, используя известный метод, развитый Л. И. Седовым [5] в теории тонкого крыла.

Вполне аналогично предыдущему получаем условие конечности напряжений на левом конце разреза  $x = a$  в виде

$$\int_a^b g(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx = 0 \quad (1.14)$$

Нетрудно показать, что эти условия не только необходимы, но и достаточны для конечности напряжений на концах разреза. Покажем теперь, что условие (1.12) и, следовательно, условие (1.13) обеспечивают плавное смыкание противоположных берегов разреза на кромке  $x = b$ . В самом деле, согласно формуле Колосова — Мусхелишвили [4], имеем

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} \quad (1.15)$$

( $u, v$  — компоненты смещения по осям  $x$  и  $y$ ,  $\mu$  — модуль сдвига,  $\kappa = 4 - 3\nu$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона), откуда и из формул (1.3), (1.5) получаем для  $\zeta$  с модулем, равным единице (такие  $\zeta$  соответствуют контуре разреза):

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(\zeta) - \overline{\varphi(\zeta)}, \quad v = \frac{\kappa + 1}{2\mu} \operatorname{Im}[\varphi(\zeta)]. \quad (1.16)$$

Для  $x$ , близких к  $b$ , т. е. для  $\zeta$ , определяемых соотношением  $\zeta = e^{i\theta}$ , где  $\theta$  — малая величина, имеем

$$\varphi(\zeta) = \frac{l}{2\pi i} \int_0^\pi g(l \cos \lambda) \sin \lambda \ln \left( \frac{1 - e^{i\lambda}}{1 - e^{-i\lambda}} \right) d\lambda - \\ - \frac{l\theta}{2\pi i} \int_0^\pi \frac{g(l \cos \lambda) \sin^2 \lambda d\lambda}{1 - \cos \lambda} - \frac{2l\theta^2}{\pi} \int_0^\pi \frac{g(l \cos \lambda) \sin^2 \lambda d\lambda}{1 - \cos \lambda} + O(\theta^3)$$

Поскольку величина  $\ln [(1 - e^{i\lambda}) / (1 - e^{-i\lambda})]$  чисто мнимая, получаем

$$v = \frac{l\kappa(\kappa + 1)}{4\pi\mu} \int_0^\pi \frac{g(l \cos \lambda) \sin^2 \lambda d\lambda}{1 - \cos \lambda} + O(\theta^3) \quad (1.17)$$

В силу (1.3) при малых  $\theta$  имеем  $x' = l(1 - 1/2 \theta^2)$ , так что  $dx' | d\theta = dx | d\theta = -l\theta$ , и мы получаем вблизи правого края разреза

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = - \frac{\kappa + 1}{4\pi\mu\theta} \int_0^\pi \frac{g(l \cos \lambda) \sin^2 \lambda d\lambda}{1 - \cos \lambda} + O(\theta) \quad (1.18)$$

так что плавное смыкание противоположных берегов разреза на правой кромке, соответствующей  $\theta = 0$ , имеет место лишь при выполнении условия (1.12), или, что то же, условия (1.13), что и требовалось доказать. Вполне аналогично предыдущему доказываемся, что условие плавного смыкания противоположных берегов разреза на левом конце разреза  $x = a$  совпадает с условием (1.14).

**§ 2. Общее исследование прямолинейной равновесной трещины в бесконечной плоской пластинке.** Рассмотрим бесконечную плоскую пластинку, подвергаемую симметричной относительно некоторой прямой (прямой симметрии) растягивающей нагрузке (фиг. 2). Если пренебречь случайными обстоятельствами, то разрыв пластинки должен произойти по прямой симметрии. Предположим, что с каждой стороны трещины приложена конечная нагрузка, тогда в результате разрыва образуется прямолинейная трещина, которая достигает некоторого определенного размера с координатами концов  $x = a$  и  $x = b$  и затем остается неизменной при постоянной нагрузке.

Напряженное состояние в пластинке с трещиной удобно представить в виде суммы двух напряженных состояний, одно из которых соответствует бесконечной пластинке без трещины, растягиваемой данной нагрузкой, а другое соответствует пластинке с трещиной, на поверхности которой приложены разрывающие усилия и силы сцепления. Для суммарного напряженного состояния внутренняя часть трещины свободна от напряжений, а в концевой области действуют силы сцепления, поэтому интенсивность разрывающих пластину сжимающих усилий второго напряженного состояния равна по величине и обратна по знаку интенсивности растягивающих напряжений на прямой симметрии для первого напряженного состояния. Для первого напряженного состояния смещения точек прямой симметрии равны нулю, поэтому эти смещения полностью определяются вторым напряженным состоянием. Второе напряженное состояние соответствует условиям предыдущего параграфа, при-

чем распределение напряжений  $g(x)$  определяется соотношением

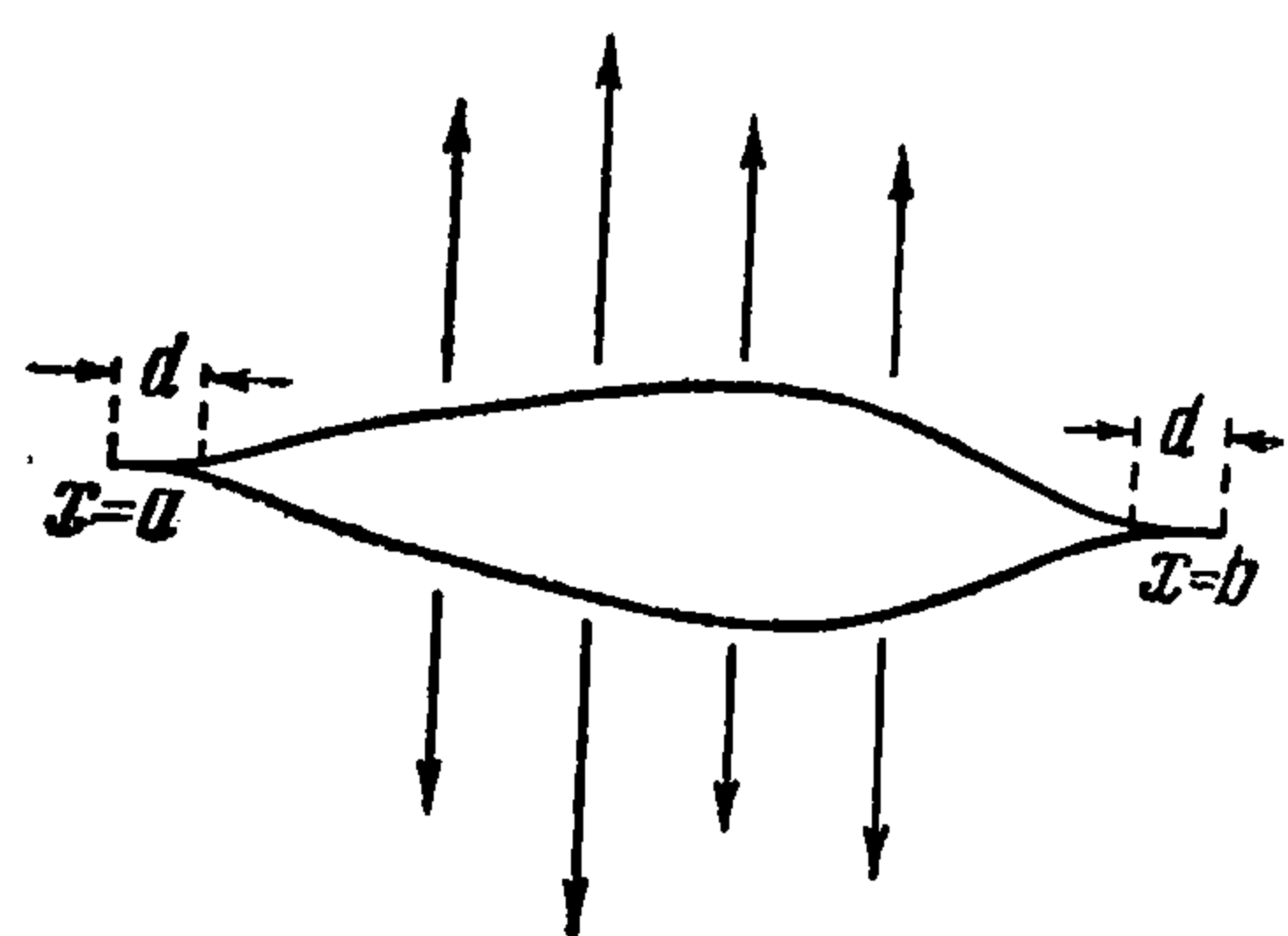
$$g(x) = \begin{cases} p(x) - G(x) & (a \leq x \leq a+d) \\ p(x) & (a+d \leq x \leq b-d) \\ p(x) - G(x) & (b-d \leq x \leq b) \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $p(x)$  — интенсивность растягивающих нормальных напряжений на прямой симметрии для первого напряженного состояния,  $G(x)$  — интенсивность сил сцепления,  $d$  — ширина концевой области<sup>1</sup>.

В силу принятой нами гипотезы плавного смыкания противоположных берегов трещины на ее концах (третья гипотеза нашего перечня — гипотеза С. А. Христиановича) должны выполняться условия

$$\int_a^b g(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx = 0, \quad \int_a^b g(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx = 0 \quad (2.2)$$

Возьмем, например, первое условие (2.2) — условие конечности напряжений и плавности смыкания на кромке трещины  $x=b$ , — подставим в это условие выражение (2.1) для распределения напряжений  $g(x)$ . Имеем



Фиг. 2

Имеем

$$\int_a^b g(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx = \int_a^b p(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx - \int_{b-d}^b G(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx - \int_a^{a+d} G(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx \quad (2.3)$$

Рассмотрим второй и третий интегралы. В силу первой гипотезы  $d \ll b$ , так что можно считать

$$I_2 = \int_{b-d}^b G(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx \approx \sqrt{2l} \int_{b-d}^b \frac{G(x) dx}{\sqrt{b-x}}, \quad l = \frac{b-a}{2}$$

Переходя к переменной  $s = b - x$ , отсчитываемой от кромки трещины  $x = b$ , и обозначая  $G(x)$  через  $F(s)$ , получаем

$$I_2 = \sqrt{2l} \int_0^d \frac{F(s) ds}{\sqrt{s}} \quad (2.4)$$

Но интеграл в правой части (2.4) представляет собой в силу второй гипотезы о независимости распределения напряжений и смещений в концевой области введенную в работе [1] универсальную характеристику материала — модуль сцепления  $K$ . Имеем, таким образом,

$$I_2 = \sqrt{2l} K \quad (2.5)$$

Аналогично получаем, что

$$I_3 = \int_a^{a+d} G(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx \approx \frac{1}{\sqrt{2l}} \int_0^d F(s) \sqrt{s} ds \quad (2.6)$$

<sup>1</sup> Функция  $p(x)$  элементарно вычисляется при заданных нагрузках, поэтому ее можно считать заданной.

Но имеем

$$\int_0^d F(s) \sqrt{s} ds = \int_0^d \frac{F(s)}{\sqrt{s}} s ds < d \int_0^d \frac{F(s) ds}{\sqrt{s}} = Kd$$

Так что мы получаем

$$I_3 < \frac{Kd}{\sqrt{2l}}, \quad \frac{I_3}{I_2} = O\left(\frac{d}{l}\right)$$

Здесь  $O(d/l)$  означает величину порядка  $d/l$  и силу первой гипотезы интегралом  $I_3$  можно пренебречь сравнительно с интегралом  $I_2$ . Итак, первое соотношение (2.2) дает

$$\int_a^b p(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx = K \sqrt{2l} = K \sqrt{b-a} \quad (2.7)$$

Вполне аналогично второе соотношение (2.2) дает нам

$$\int_a^b p(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} dx = K \sqrt{2l} = K \sqrt{b-a} \quad (2.8)$$

Уравнения (2.7) и (2.8) определяют неизвестные координаты концов трещины. В частности, если приложенная нагрузка симметрична относительно  $x=0$ , так что и трещина симметрична относительно  $x=0$ , т. е.  $b=-a=l$ , то условия (2.7) и (2.8) становятся равносильными и принимают форму соотношения

$$\int_{-l}^l p(x) \sqrt{\frac{l-x}{l+x}} dx = K \sqrt{2l}, \quad \text{или} \quad \int_0^l \frac{p(x) dx}{\sqrt{l^2-x^2}} = \frac{K}{\sqrt{2l}} \quad (2.9)$$

### § 3. Примеры. Распределение смещений на поверхности трещины.

1°. Пусть трещина образуется под действием приложенного на разрезе длины  $2l_0$  постоянного давления  $p_0$ . Соотношение (2.9) дает при этом

$$p_0 \int_{-l_0}^{l_0} \sqrt{\frac{l-x}{l+x}} dx = 2p_0 l \arcsin \frac{l_0}{l} = K \sqrt{2l} \quad (3.1)$$

Отсюда

$$\frac{p_0 \sqrt{l_0}}{K} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{l_0}{l}} \frac{1}{\arcsin(l_0/l)} \quad (3.2)$$

График зависимости (3.2) приведен на фиг. 3, откуда видно, что при

$$p_0 < \frac{K \sqrt{2}}{\sqrt{l_0} \pi} = p_0^*$$

уравнение (3.2) не имеет решения; это означает, что при столь малых  $p_0$  раскрытия трещин не происходит. Каждому  $p_0 > p_0^*$  соответствует однозначно определяемый размер трещины; размеры трещины, естественно, увеличиваются с ростом  $p_0$ .

2°. Пусть трещина образуется сосредоточенными силами; этот случай соответствует стремлению  $p_0$  в предыдущем примере к бесконечности и уменьшению  $l_0$ , так что произведение  $2p_0 l_0$  остается постоянным и

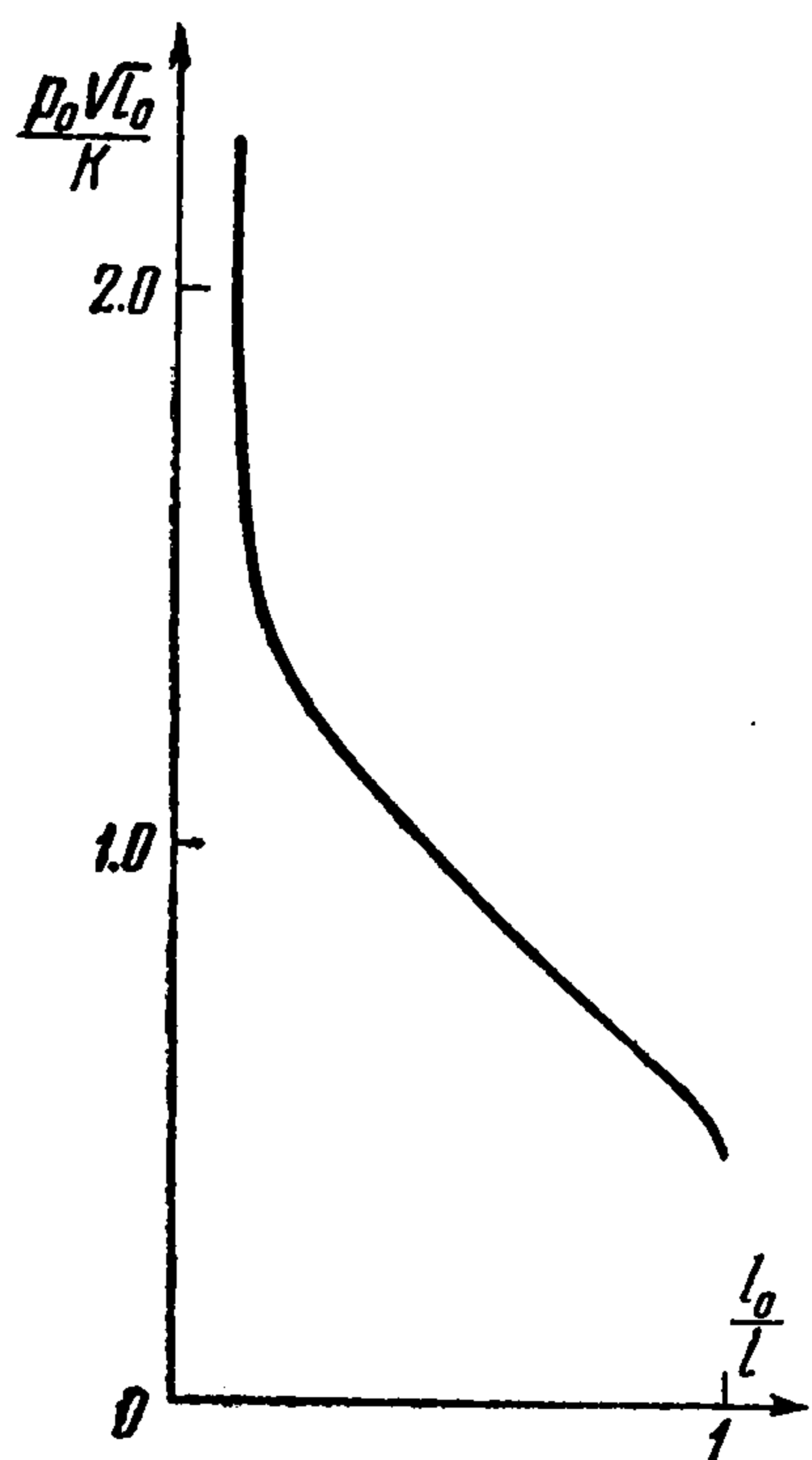
равным  $P$  ( $P$  — величина сосредоточенной силы). В этом случае имеем

$$\frac{p_0 \sqrt{l_0}}{K} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{l}{l_0}}, \quad \frac{2p_0 l_0}{K} = \sqrt{2l}, \quad \frac{P}{K} = \sqrt{2l}, \quad l = \frac{P^2}{2K^2} \quad (3.3)$$

С точностью до постоянного множителя этот результат нетрудно получить из соображений размерности, используя так называемую П-теорему [6].

3°. Предположим теперь, что трещина образуется двумя равными и противоположными сосредоточенными силами  $P$ , точки приложения которых отстоят друг от друга на расстояние  $2L$  вдоль общей линии действия сил. По симметрии трещину предполагаем перпендикулярной прямой, соединяющей точки приложения сил и симметричной относительно этой прямой. Суммируя известные фундаментальные решения уравнений теории упругости [7], получаем

$$p(x) = -\frac{P}{2\pi} \frac{L}{x^2 + L^2} \left[ -(3 + \nu) + 2(1 + \nu) \frac{x^2}{x^2 + L^2} \right] = \\ = \frac{P}{2\pi} \frac{L}{x^2 + L^2} \left[ 1 - \nu + 2(1 + \nu) \frac{L^2}{x^2 + L^2} \right]$$



Фиг. 3

где  $x$  — координата, отсчитываемая от точки пересечения трещины с прямой действия сил вдоль трещины. Подставляя это выражение в соотношение (2.9), получаем

$$\int_{-l}^l p(x) \sqrt{\frac{l-x}{l+x}} dx = \frac{PL(1-\nu)}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{dx}{x^2 + L^2} \sqrt{\frac{l-x}{l+x}} + \\ + \frac{PL^3(1+\nu)}{\pi} \int_{-l}^l \frac{dx}{(x^2 + L^2)^2} \sqrt{\frac{l-x}{l+x}} = K \sqrt{2l}$$

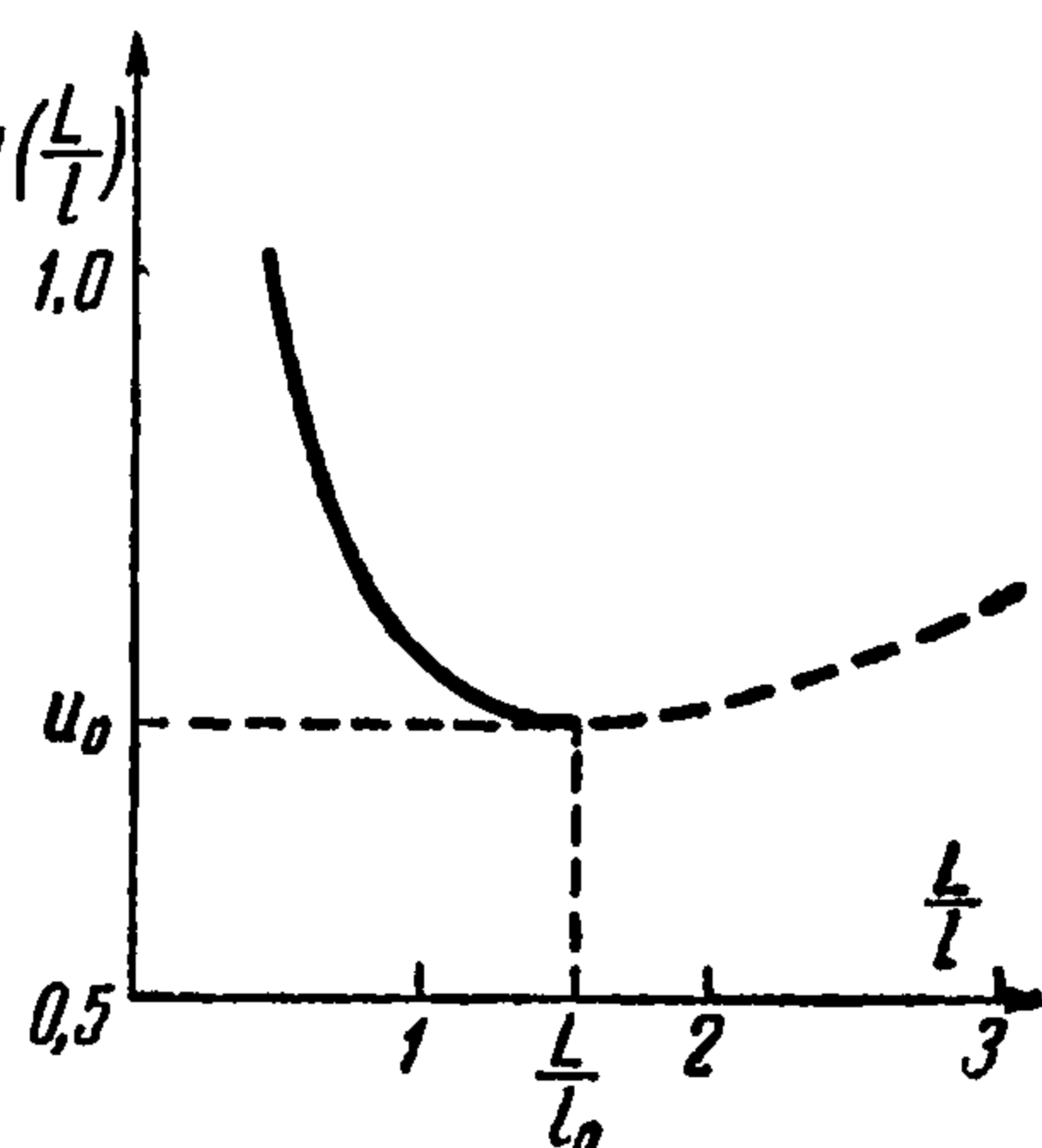
Вычисляя интегралы, находим

$$\frac{P}{2} \left[ 2 + \frac{L^2}{l^2} (3 + \nu) \right] \left( \frac{L^2}{l^2} + 1 \right)^{-1/2} = K \sqrt{2l} \quad (3.5)$$

Удобно привести это соотношение к виду

$$\frac{P}{K \sqrt{L}} = \left( \frac{L^2}{l^2} + 1 \right)^{1/2} \frac{\sqrt{2}}{[2 + (3 + \nu) L^2/l^2] \sqrt{L/l}} = u \left( \frac{L}{l} \right) \quad (3.6)$$

На фиг. 4 построен график зависимости (3.6) для  $\nu = 0.5$ . Мы видим, что каждому значению силы  $P$  соответствуют два корня уравнения (3.6), т. е. два значения длины трещины  $l$ . Ясно, однако, что значения, соответствующие правой ветви кривой, начиная от точки минимума, не имеют физического смысла, поскольку на этой ветви кривой имеет место увеличение размеров трещины с уменьшением силы, так что соответствующие этой ветви состояния равновесия неустойчивы. При



Фиг. 4

$$\frac{P}{K \sqrt{L}} < u_0 = \frac{P_0}{K \sqrt{L}}$$

уравнение (3.6) не имеет решения. Это означает, что для всякого  $L$  существует свое критическое значение приложенной силы, так что при значениях приложенной силы, меньших критического, равновесной трещины не существует.

Полученные результаты качественно совпадают с результатами для аналогичных случаев осесимметричных равновесных трещин, полученными в работе [1].

4°. Как было показано выше, выражение для функции  $\varphi(\zeta)$ , через которую представляются смещения, имеет вид (для простоты ограничиваемся симметричным случаем):

$$\varphi(\zeta) = \frac{l}{2\pi i} \int_0^\pi g(l \cos \lambda) \sin \lambda \ln \left( \frac{e^{i\theta} - e^{i\lambda}}{e^{i\theta} - e^{-i\lambda}} \right) d\lambda = I_1 - I_2 - I_3 \quad (3.7)$$

$$I_1 = \frac{l}{2\pi i} \int_0^\pi p(l \cos \lambda) \sin \lambda \ln \left( \frac{e^{i\theta} - e^{i\lambda}}{e^{i\theta} - e^{-i\lambda}} \right) d\lambda$$

$$I_2 = \frac{l}{2\pi i} \int_0^{\lambda_0} G(l \cos \lambda) \sin \lambda \ln \left( \frac{e^{i\theta} - e^{i\lambda}}{e^{i\theta} - e^{-i\lambda}} \right) d\lambda \quad \left( \lambda_0 = \sqrt{\frac{2d}{l}} \right)$$

$$I_3 = \frac{l}{2\pi i} \int_{\pi-\lambda_0}^\pi G(l \cos \lambda) \sin \lambda \ln \left( \frac{e^{i\theta} - e^{i\lambda}}{e^{i\theta} - e^{-i\lambda}} \right) d\lambda \quad (3.8)$$

Пусть рассматриваемая точка поверхности трещины отстоит от кромок трещины на расстояние, большее сравнительно с размером концевой области  $d$ ; при этом  $\theta \gg \sqrt{d/l}$  и  $\pi - \theta \gg \sqrt{d/l}$ . Имеем для таких  $\theta$  и  $\lambda$  в интервалах  $0 < \lambda < \sqrt{2d/l}$ ,  $\pi - \sqrt{2d/l} < \lambda < \pi$

$$\ln \left( \frac{e^{i\theta} - e^{i\lambda}}{e^{i\theta} - e^{-i\lambda}} \right) = \ln \left( \frac{e^{i\theta} - 1 - i\lambda}{e^{i\theta} - 1 + i\lambda} \right) = \ln \left( \frac{1 - i\lambda / (e^{i\theta} - 1)}{1 + i\lambda / (e^{i\theta} - 1)} \right) = - \frac{2i\lambda}{e^{i\theta} - 1} \quad (3.9)$$

Подставляя это, например, в выражение для  $I_2$ , получаем

$$\begin{aligned} I_2 &= - \frac{l}{\pi} \int_0^{\lambda_0} \frac{G(l \cos \lambda) \lambda^2 d\lambda}{e^{i\theta} - 1} = \frac{1}{\pi \sqrt{l} (e^{i\theta} - 1)} \int_{l-d}^l G(x) \sqrt{l-x} dx = \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{l} (e^{i\theta} - 1)} \int_0^d \frac{F(s)}{\sqrt{s}} s ds \end{aligned} \quad (3.10)$$

откуда видно, что  $I_2$  имеет по модулю порядок не выше  $Kd / \sqrt{l}$ . То же относится и к интегралу  $I_3$ . В силу (2.9) интеграл  $I_1$  имеет по модулю порядок  $K \sqrt{l}$ . Таким образом,  $|I_2|$  и  $|I_3|$  малы сравнительно с  $|I_1|$ . Но  $I_1$  определяет собой смещения поверхности трещины, соответствующие ее размеру, определяемому соотношением (2.9), но найденные без учета сил сцепления. Величины же  $I_2$  и  $I_3$  определяют собой часть смещений, обуславливаемую силами сцепления.

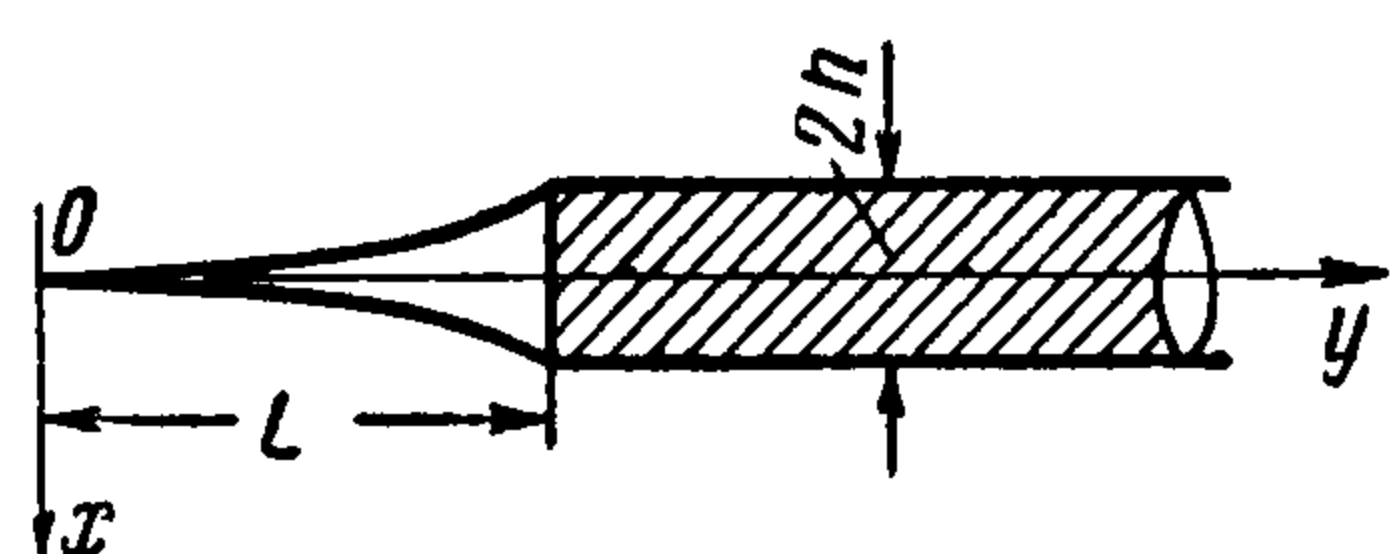
Итак, аналогично осесимметричному случаю, для точек, достаточно удаленных от кромок трещины, смещения, обуславливаемые силами сцепления, малы сравнительно со смещениями, обусловленными основной приложенной нагрузкой. Только вблизи кромок трещины смещения в

существенной мере определяются силами сцепления, благодаря чему и имеет место плавное смыкание противоположных берегов трещины на ее кромках.

§ 4. Задача о расклинивании пластинки. 1°. Задача о расклинивании пластинки ставится следующим образом<sup>1</sup> (фиг. 5). В плоскую пластинку, сделанную из хрупкого материала с модулем упругости  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$  и модулем сцепления  $K$ , вбивается жесткий клин постоянной толщины  $2h$ . Пластинку считаем бесконечной, т. е. пренебрегаем влиянием краев; в соответствии с этим забиваемый клин считаем полубесконечным. Впереди клина образуется щель длиной  $L$ ; задача заключается главным образом в определении этой длины, а также напряжений и деформаций пластинки.

Из предыдущего следует, что размер концевой области всякой трещины имеет порядок величины  $K^2/E^2$ ; предположим, что  $h$  велико сравнительно с размерами концевой области, поэтому длина получающейся трещины  $L$  будет велика сравнительно с  $h$  и можно линеаризовать рассматриваемую задачу, снося граничные условия с поверхности трещины на ось  $Oy$  (начало координат выберем для удобства в точке смыкания трещины). Близкая по идее постановка задачи возникает при исследовании прогиба кровли в угольных шахтах при ее плавном опускании. Решение этой задачи было дано в работе [3], причем в этой работе силы сцепления материала не учитывались — единственным сжимающим фактором было горное давление. Для задачи, рассматриваемой в предлагаемой работе, учет сил сцепления имеет основное значение, поскольку других сжимающих факторов типа горного давления в этой задаче не существует. Как будет видно из дальнейшего, учет сил сцепления вносит ряд специфических особенностей в рассматриваемую задачу.

Итак, граничные условия на разрезе  $0 \leq y < \infty$  для рассматриваемой задачи в пренебрежении силами трения на поверхности клина



Фиг. 5

имеют вид:

$$0 \leq y \leq d, \quad X_y = 0, \quad X_x = G(x) \quad (4.1)$$

$$d < y \leq L, \quad X_y = 0, \quad X_x = 0 \quad (4.2)$$

$$L < y < \infty, \quad X_y = 0,$$

$$u(x+0, y) = h, \quad u(x-0, y) = -h \quad (4.3)$$

где  $d$  — размер концевой области,  $X_x$ ,  $Y_y$ ,  $X_y$  — компоненты тензора напряжений,  $G(x)$  — распределение сил сцепления в концевой области,  $u$ ,  $v$  — компоненты смещения соответственно по осям  $x$  и  $y$ .

Задача с граничными условиями (4.1) — (4.3) является, очевидно, смешанной задачей. Введем сжимающие усилия, действующие на щеках забиваемого клина,  $X_x = -f(y)$ , тогда условие (4.3) заменяется условием первого рода

$$L < y < \infty, \quad X_y = 0, \quad X_x = -f(y) \quad (4.4)$$

<sup>1</sup> Картину, схематизируемую рассматриваемой задачей, может наблюдать каждый, забив топор в полено и не расколов полена до конца.

и задача с граничными условиями (4.1), (4.2), (4.4) уже является задачей первого рода. Однако функция  $f(y)$  заранее неизвестна; для ее определения будет составлено и решено сингулярное интегральное уравнение.

2°. Для решения задачи теории упругости с граничными условиями (4.1), (4.2), (4.4) воспользуемся методом Н. И. Muskhelishvili [4]. Имеют место соотношения

$$X_x + Y_y = 4 \operatorname{Re} \{ \Phi(\zeta) \} \quad (4.5)$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2 \left\{ \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta) \right\} \quad (4.6)$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}, \quad \kappa = 3 - 4\nu \quad (4.7)$$

причем

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i \zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F d\sigma}{\sigma - \zeta}, \quad \Psi(\zeta) = \frac{\zeta}{2} \Phi'(\zeta), \quad F(\sigma) = X_x(\sigma) \sigma \\ \varphi(\zeta) &= \int_0^{\zeta} \omega'(\zeta) \Phi(\zeta) d\zeta, \quad \psi(\zeta) = \int_0^{\zeta} \omega'(\zeta) \Psi(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (4.8)$$

где  $\mu$  — модуль сдвига среды,  $\nu$  — коэффициент Пуассона; функция

$$z = i\zeta^2 = \omega(\zeta) \quad (4.9)$$

определяет отображение физической плоскости  $z = x + iy$  с разрезом вдоль положительной мнимой полуоси на нижнюю полуплоскость параметрической переменной  $\zeta$ .

Используя (4.6) и (4.8), находим

$$Y_y - X_x + 2iX_y = \frac{\Phi'(\zeta)}{\zeta} (\zeta^2 - \bar{\zeta}^2) \quad (4.10)$$

так что при действительных и чисто мнимых  $\zeta$ , соответствующих трещине и ее продолжению, снова получаем соотношения (1.7) и (1.8).

Далее, используя соотношения (4.7) и (4.8), имеем при действительных и чисто мнимых  $\zeta$ , т. е. на самой трещине и ее продолжении:

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(\zeta) + \overline{\varphi(\zeta)} \quad (4.11)$$

Таким образом, для определения напряжений и смещений на самой трещине и ее продолжении нам достаточно знать функцию  $\varphi(\zeta)$  и, следовательно, весьма просто с ней связанную функцию  $\Phi(\zeta)$ .

Согласно граничным условиям (4.1), (4.2), (4.4) и соотношению (4.8) имеем

$$\begin{aligned} \varphi'(\zeta) &= 2i\zeta\Phi(\zeta) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\sqrt{L}} \frac{f(\sigma^2) \sigma d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{1}{\pi} \int_{\sqrt{L}}^{\infty} \frac{f(\sigma^2) \sigma d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{d}}^{\sqrt{d}} \frac{G(\sigma^2) \sigma d\sigma}{\sigma - \zeta}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Согласно третьей гипотезе — гипотезе Христиановича — напряжение в конце трещины, т. е. при  $\zeta = 0$ , должно быть конечным. Из этого

следует, что должно быть конечным  $\Phi(0)$ , так что  $\varphi'(0)$  должно равняться нулю. Отсюда и из соотношения (4.12) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\sqrt{L}} f(\sigma^2) d\sigma + \frac{1}{\pi} \int_{\sqrt{L}}^{\infty} f(\sigma^2) d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{d}}^{\sqrt{d}} G(\sigma^2) d\sigma = \\ = \frac{2}{\pi} \int_{\sqrt{L}}^{\infty} f(\sigma^2) d\sigma - \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{d}} G(\sigma^2) d\sigma = 0 \end{aligned}$$

Но, очевидно,

$$\int_0^{\sqrt{d}} G(\sigma^2) d\sigma = \int_0^d \frac{G(s) ds}{2\sqrt{s}} = \frac{1}{2} K$$

где  $K$  — модуль сцепления материала, и мы получаем условие конечности напряжений в конце трещины в виде

$$\int_{\sqrt{L}}^{\infty} f(\sigma^2) d\sigma = \frac{1}{2} K \quad (4.13)$$

или окончательно в виде

$$\int_L^{\infty} \frac{f(y) dy}{\sqrt{y}} = K \quad (4.14)$$

Можно показать, что это же условие (4.11) является условием плавного смыкания противоположных берегов трещины в ее конце.

3°. Формула (4.11) дает

$$u = \frac{\kappa + 1}{2\mu} \operatorname{Re} \{ \varphi(\zeta) \} = \frac{4(1 - \nu^2)}{E} \operatorname{Re} \{ \varphi(\zeta) \} \quad (4.15)$$

Интегрируя (4.12), получаем

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{\sqrt{L}}^{\infty} f(\sigma^2) \sigma \ln \left| \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \right| d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_0^{\sqrt{d}} G(\sigma^2) \sigma \ln \left| \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \right| d\sigma. \quad (4.16)$$

Покажем, что и в рассматриваемом случае распределение смещений вне непосредственной близости конца трещины, т. е. в точках поверхности трещины, расстояние которых от конца трещины велико сравнительно с размерами концевой области, не зависит от сил сцепления. Если точка поверхности трещины лежит не в непосредственной близости от конца трещины, то  $y \gg d$ , так что соответствующее этой точке значение  $\zeta$  по абсолютной величине велико сравнительно с  $\sqrt{d}$ . При этих условиях имеем

$$\int_0^{\sqrt{d}} G(\sigma^2) \sigma \ln \left| \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \right| d\sigma \approx \frac{2}{\zeta} \int_0^{\sqrt{d}} G(\sigma^2) \sigma^2 d\sigma < \frac{Kd}{\zeta} \ll K\sqrt{d}$$

Значение функции  $\varphi(\zeta)$  не в непосредственной близости от конца трещины имеет порядок  $Eh$ . Но, очевидно,  $Eh \gg K\sqrt{d}$ , поскольку согласно

предыдущему  $E/K$  имеет порядок  $\sqrt{d}$  и  $h \gg d$ . Стало быть, второй интеграл правой части (4.16), определяющий зависимость смещений от сил сцепления, для точек, не лежащих в непосредственной близости от конца трещины, т. е. на расстояниях порядка нескольких  $d$  от конца трещины, мал и может быть отброшен. В частности, это справедливо для всех точек соприкосновения жесткого клина и расклиниваемой пластинки. Для этих точек имеем

$$u = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{\sqrt{L}}^{\infty} f(\sigma^2) \sigma \ln \left| \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \right| d\sigma = \pm h \quad (4.17)$$

где знак плюс или минус имеет место в зависимости от того, положительно или отрицательно  $\zeta$ , т. е. соответствует ли  $\zeta$  нижнему или верхнему берегу разреза.

Вполне аналогично работе [3] можно показать, что для того чтобы при  $y \rightarrow \infty$  смещение по модулю равнялось  $h$ , необходимо выполнение следующего асимптотического равенства при  $y \rightarrow \infty$

$$f(y) = \frac{Eh}{2\pi(1-\nu^2)y} + O(y^{-2}) \quad (4.18)$$

Далее, дифференцируя (4.17) по  $\zeta$ , получаем сингулярное интегральное уравнение для функции  $f(y)$ :

$$\int_{\sqrt{L}}^{\infty} f(\sigma^2) \sigma \left\{ \frac{1}{\sigma + \zeta} + \frac{1}{\sigma - \zeta} \right\} d\sigma = 0. \quad (4.19)$$

которое можно также записать в виде

$$\int_{|\sigma| > \sqrt{L}} \frac{f(\sigma^2) \sigma d\sigma}{\sigma - \zeta} = 0 \quad (4.20)$$

Интегральное уравнение (4.20) и условие (4.18) в совокупности равносильны интегральному уравнению (4.17). Положим в уравнении (4.20)

$$\sigma = \frac{1}{\tau}, \quad \zeta = \frac{1}{\xi}, \quad p(\tau) = \frac{1}{\tau^2} f\left(\frac{1}{\tau^2}\right)$$

тогда оно примет вид:

$$\int_{-\Lambda}^{+\Lambda} \frac{p(\tau) d\tau}{\tau - \xi} = 0 \quad \left( \Lambda = \frac{1}{\sqrt{L}} \right) \quad (4.21)$$

Как показано С. Г. Михлиным в связи с другой задачей [8], решение этого уравнения имеет вид:

$$p(\xi) = A \left[ \frac{1}{L} - \xi^2 \right]^{-1/2} \quad (4.22)$$

где  $A$  — произвольная константа, откуда получаем

$$f(y) = \frac{AV\bar{L}}{V\bar{y}\sqrt{y-L}} \quad (4.23)$$

При  $y \rightarrow \infty$  соотношение (4.23) дает нам

$$f(y) = \frac{AV\bar{L}}{y} + O(y^{-2}) \quad (4.24)$$

Сравнивая это асимптотическое представление с асимптотическим представлением (4.18), являющимся условием для того, что смещение на бесконечности равно по модулю  $h$ , получаем

$$A \sqrt{L} = \frac{Eh}{2\pi(1-\nu^2)} \quad (4.25)$$

Далее распределение напряжений (4.25) должно удовлетворять условию конечности напряжений в конце трещины (4.14), откуда имеем

$$\int_L^\infty \frac{f(y) dy}{\sqrt{y}} = A \sqrt{L} \int_L^\infty \frac{dy}{y \sqrt{y-L}} = A \int_1^\infty \frac{dz}{z \sqrt{z-1}} = \pi A = K \quad (4.26)$$

так что

$$A = \frac{K}{\pi} \quad (4.27)$$

Из соотношений (4.25) и (4.27) находим выражение для длины щели  $L$ :

$$L = \frac{E^2 h^2}{4(1-\nu^2)^2 K^2} \quad (4.28)$$

Зная, таким образом, функцию  $f(y)$ , мы можем по формулам (4.12) и (4.16) определить функции  $\varphi(\zeta)$  и  $\Phi(\zeta)$  и затем согласно соотношениям (4.5) — (4.7) определить все компоненты напряжений и смещений.

Нам представляется, что использование формулы (4.28) является одним из удобных способов определения модуля сцепления  $K$ . Для этого достаточно забить в пластинку из исследуемого материала клин постоянной ширины  $2h$ , сделанный из существенно более жесткого материала, нежели испытуемый (например, при определении модуля сцепления плексигласа можно использовать стальной клин). Клину нужно забивать до тех пор, пока расстояние  $L$  от конца клина до конца трещины, образующейся перед клином, не станет постоянным, что будет свидетельствовать о несущественном влиянии краев пластинки. Далее нужно измерить это расстояние  $L$ . Зная модуль Юнга и коэффициент Пуассона исследуемого материала, можно определить при помощи формулы (4.28) его модуль сцепления  $K$ .

Оценочный опыт такого рода был проделан для плексигласа В. С. Мараевым в лаборатории М. А. Геймана<sup>1</sup>. В плексигласовую пластинку был забит клин, сделанный из стальной плоской пружины толщиной  $2h = 0.034$  см. При этом образовалась близкая к прямолинейной трещина длиной  $L = 2$  см. Принимая для модуля Юнга плексигласа значение  $E = 25\,000$  кг/см<sup>2</sup>, а для коэффициента Пуассона значение  $\nu = 0,25$ , получаем значение модуля сцепления  $K$ :

$$K = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)\sqrt{L}} \approx 160 \text{ кг/см}^{3/2}$$

Для другого образца плексигласа модуль сцепления получился примерно равным 100 кг/см<sup>3/2</sup>. Модуль сцепления  $K$  имеет порядок  $E\sqrt{d}$ , где  $d$  — размер концевой области; отсюда следует, что  $d$  имеет порядок 1 мк

<sup>1</sup> Автор пользуется случаем выразить свою благодарность М. А. Гейману и В. С. Мараеву.

( $10^{-4}$  см), т. е. размер концевой области мал сравнительно с длиной всей трещины, но велик сравнительно с межатомными расстояниями ( $10^{-8}$  см).

Следует еще раз подчеркнуть оценочный характер упомянутого опыта. Тщательная экспериментальная проверка концепции, развитой в работе [1] и в предлагаемой работе, была бы крайне желательна.

§ 5. Замечание о способах учета сил сцепления и влиянии границ тела на развитие трещин. 1°. Выше было показано, что силы сцепления существенно влияют только на размеры трещин и на распределение напряжений и смещений в непосредственной близости концов трещин. Таким образом, определив размеры трещин, можно решать задачу теории упругости для тела с трещинами, не учитывая сил сцепления. При этом напряжения и смещения, в частности смещения точек поверхности трещины, будут близки к соответствующим величинам, найденным с учетом сил сцепления, везде, кроме окрестности концов трещин.

Рассмотрим, например, изолированную прямолинейную трещину в бесконечном теле. Если не учитывать сил сцепления, то согласно предыдущему напряжения  $X_x$  и  $Y_y$  стремятся вблизи кромки  $x = b$  к бесконечности по закону

$$X_x = Y_y = \frac{1}{\pi \sqrt{2(x-b)l}} \int_a^b p(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx + \dots, \quad l = \frac{1}{2}(b-a) \quad (5.1)$$

где точками обозначены величины высшего порядка малости. В силу соотношения (2.8) это выражение принимает вид:

$$X_x = Y_y = \frac{1}{\pi \sqrt{s}} K, \quad s = x - b \quad (5.2)$$

Аналогичное соотношение имеет место и вблизи кромки  $x = a$ . Этот факт имеет вполне общее значение в следующем смысле. Теория упругости дает возможность при данной нагрузке — без учета сил сцепления — найти напряженное состояние для любого положения концов трещин. При этом напряжения вблизи концов стремятся к бесконечности по закону  $A/\sqrt{s}$ , где  $s$  — расстояние от конца трещины, а  $A$  — константа, различная, вообще говоря, для разных концов и зависящая от положения концов трещин. Можно сформулировать общее правило: *концы трещин определяются из условия, что напряжения вблизи них, вычисленные без учета сил сцепления, обращаются в бесконечность по закону*

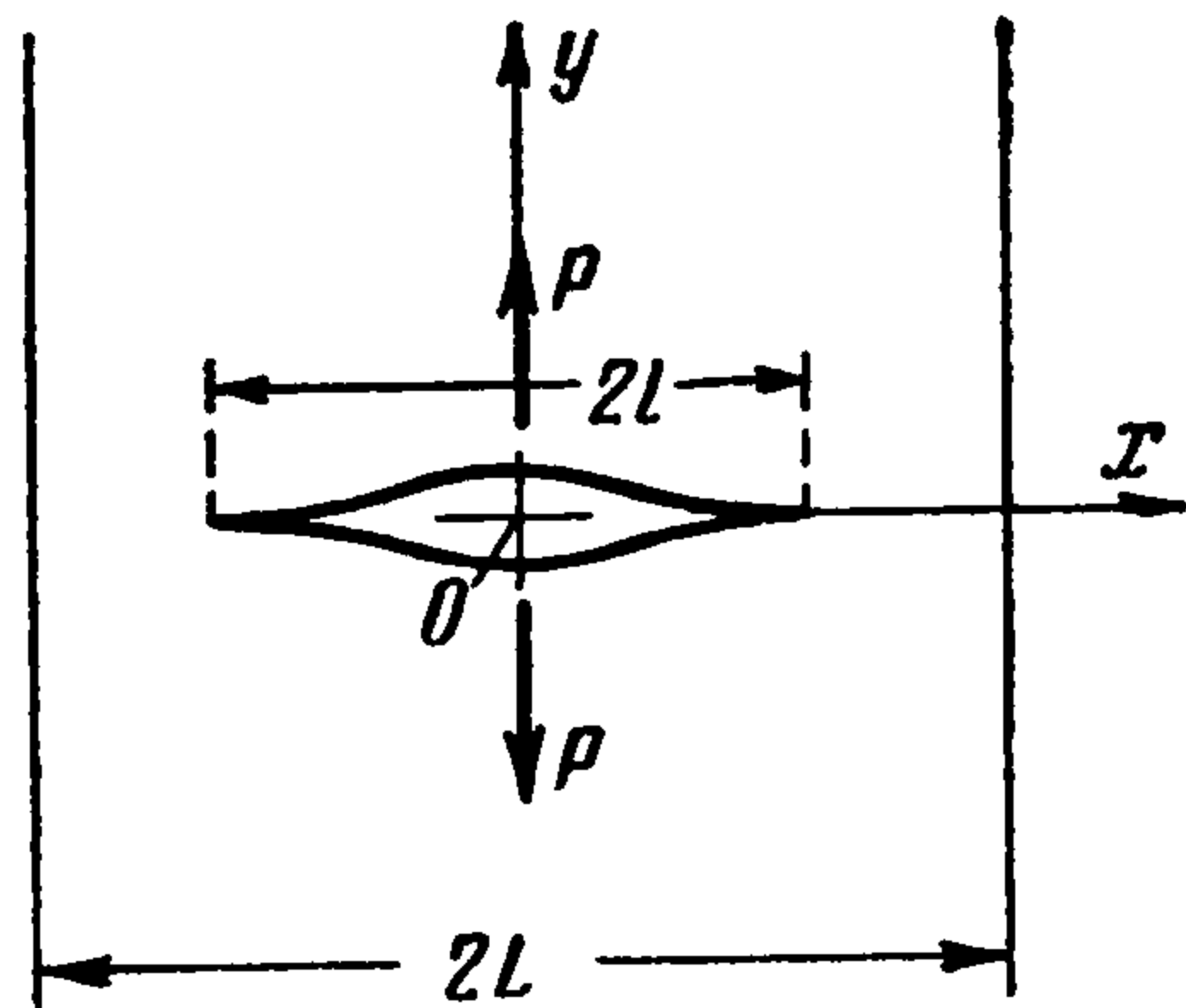
$$K / \pi \sqrt{s} \quad (5.3)$$

Это правило позволяет вообще исключить из рассмотрения силы сцепления как таковые.

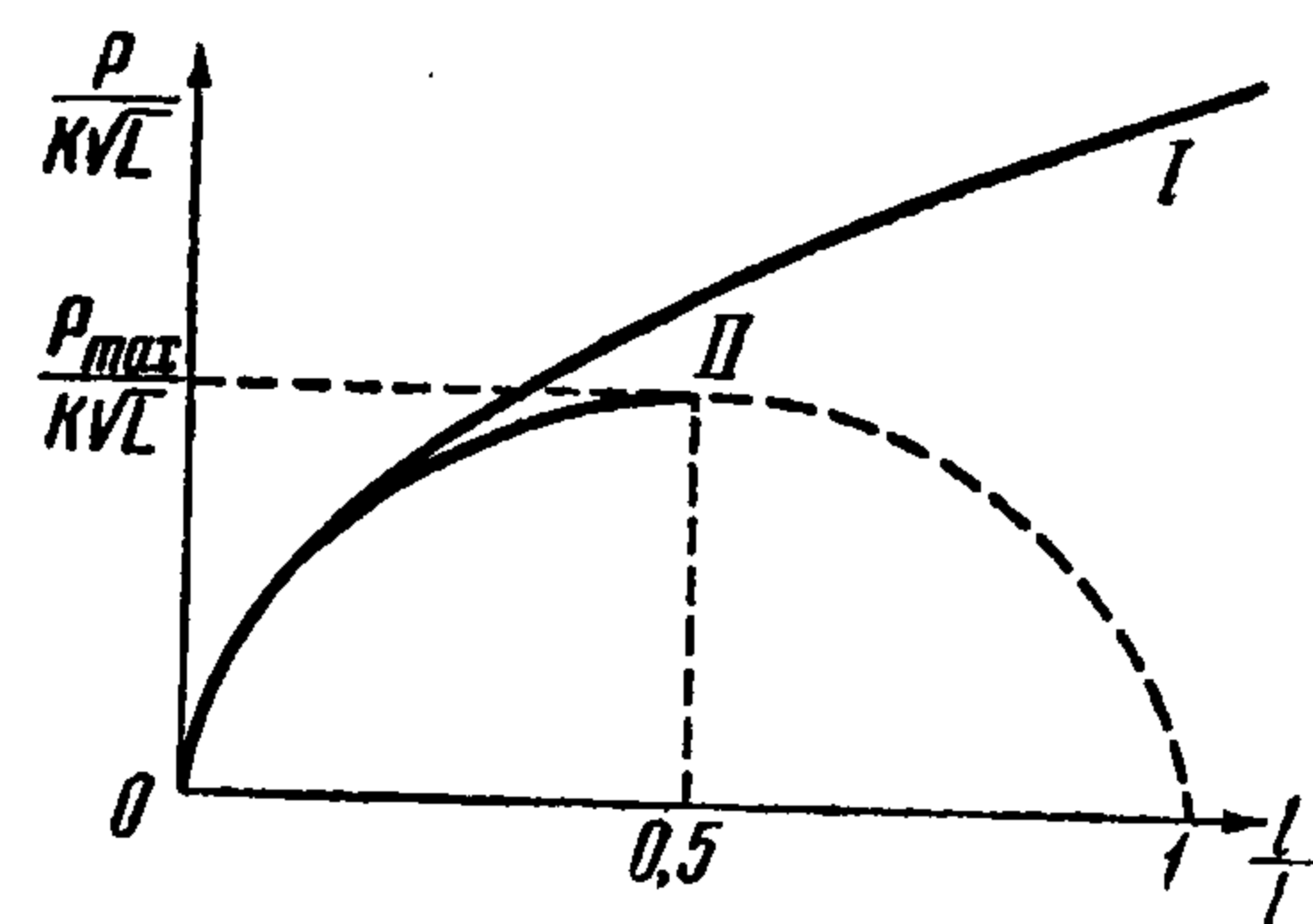
2°. Проиллюстрируем указанный выше способ учета сил сцепления на одной задаче, представляющей также самостоятельный интерес с точки зрения выяснения влияния границ тела на развитие трещин.

Предположим, что трещина образуется в бесконечной полосе под действием приложенных к поверхности трещины равных по величине и противоположных по направлению сил  $P$ . Ширина полосы  $2L$ , силы действуют вдоль средней линии полосы (фиг. 6).

Рассматриваемая задача решается при помощи метода последовательных приближений, развитого С. Г. Михлиным [9] и Д. И. Шерманом [10]. В качестве первого приближения удобно взять поле напряжений в полосе ( $-L \leq x \leq L$ ,  $-\infty < y < \infty$ ) бесконечного тела, представляющего собой внешность периодической системы трещин, расположенных вдоль оси  $x$  с центрами в точках  $x = \pm 2nL$ ,  $n$  — целое. Нагрузки, создающие трещины, такие же, что и для рассматриваемой полосы. На линиях



Фиг. 6



Фиг. 7

$x = \pm L$  равны нулю только касательные напряжения, а нормальные отличны от нуля. Для вычисления второго приближения нужно рассмотреть задачу о сжатии сплошной полосы напряжениями на границах, равными по величине и противоположными по знаку полученным для первого приближения нормальным напряжениям на границе полосы. При этом на оси  $x$  возникнут некоторые нормальные напряжения, для снятия которых и получения третьего приближения нужно снова решать некоторую периодическую задачу и т. д. Однако, как было отмечено Ирвином [11], нормальные напряжения на границах полосы  $x = \pm L$  оказывают сравнительно незначительное влияние на распространение трещин, перпендикулярных границам, поэтому мы ограничимся первым приближением.

Используя результаты Ирвина [11], можно показать, что для напряжений вдоль оси  $x$  без учета сил сцепления в первом приближении получается соотношение

$$X_x = Y_y = \frac{1}{2L \sin(\pi x / 2L)} P \sin \frac{\pi l}{2L} \left[ \sin^2 \left( \frac{\pi x}{2L} \right) - \sin^2 \left( \frac{\pi l}{2L} \right) \right]^{-1/2}, \quad X_y = 0 \quad (5.4)$$

Вблизи точек  $x = \pm l$ , т. е. при  $x = \pm (l + s)$ , где  $s$  — малая величина, имеем, очевидно,

$$X_x = Y_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi L \sin(\pi l / L)}} \frac{P}{V s} \quad (5.5)$$

Сравнивая (5.3) и (5.5), находим

$$\frac{P}{\sqrt{2\pi L \sin(\pi l / L)}} = \frac{K}{\pi} \quad \text{или} \quad \frac{L}{\pi} \sin \frac{\pi l}{L} = \frac{P^2}{2K^2} \quad (5.6)$$

При  $l \ll L$  снова получается формула (3.4) для длины трещины в бесконечной пластинке. Зависимость (5.6) представлена на графике фиг. 7 [кривая II, кривая I соответствует преобразованной формуле (3.3)]. Как видно, в отличие от кривой I кривая II имеет неустойчивый

участок (показанный пунктиром), на котором с ростом длины трещины сила, необходимая для поддержания трещины в равновесном состоянии, уменьшается. Это означает, что после достижения максимального значения нагрузки, равного

$$P_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K \sqrt{L} \quad (5.7)$$

сколь угодно малое увеличение нагрузки приводит к мгновенному расширению трещины до размера ширины полосы и разрыву полосы.

Заметим, что, когда силы приложены не в точках поверхности трещины, а на некотором расстоянии друг от друга вдоль средней линии полосы, картина усложняется. Именно, если расстояние точек приложения сил меньше некоторого критического, то до достижения определенной величины силы трещина вообще не образуется. По достижении этой величины силы образуется трещина определенного конечного размера; при дальнейшем увеличении силы трещина постепенно увеличивается, пока не достигается некоторая максимально возможная нагрузка. Сколь угодно малое превышение этой нагрузки приводит к мгновенному разрыву полосы.

Если же расстояние точек приложения сил больше критического, то вплоть до достижения некоторой определенной величины силы трещина вообще не образуется. По достижении же силой этой предельной величины происходит мгновенный разрыв полосы, — в рассматриваемом случае устойчивых равновесных трещин не образуется.

Поступила 18 III 1959

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины. ПММ, т. XXIII, вып. 3, 1959.
2. Желтов Ю. П. и Христианович С. А. О механизме гидравлического разрыва нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1955.
3. Баренблатт Г. И. и Христианович С. А. Об обрушении кровли при горных выработках. Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 1955.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1954.
5. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. ГИТТЛ, М.— Л., 1950.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. ГИТТЛ, М.— Л., 1957.
7. Ляв-А. Математическая теория упругости. ОНТИ, М.— Л., 1935.
8. Михлин С. Г. О напряжениях в породе над угольным пластом. Изв. АН СССР, ОТН, № 7—8, 1942.
9. Михлин С. Г. Метод последовательных приближений в бигармонической проблеме. Труды Сейсмологического ин-та АН СССР, № 39, 1934.
10. Шерман Д. И. Об одном методе решения статической плоской задачи теории упругости для многосвязных областей. Труды Сейсмологического ин-та АН СССР, № 54, 1935.
11. Irwin G. R. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. J. Appl. Mech. vol. 24, No 3, 1957.