

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ОСТРОМ РЕБРЕ

А. Ф. Филиппов

(Москва)

Получено точное решение задачи о дифракции неустановившейся плоской упругой волны, распространяющейся в трехмерном пространстве и наталкивающейся на разрез в виде полуплоскости. Задача решена методом функционально-инвариантных решений В. И. Смирнова и С. Л. Соболева.

1. Рассматривается дифракционная картина, возникающая при движении плоской упругой волны в пространстве (x, y, z) , заполненном однородным изотропным упругим веществом, в котором сделан разрез в виде полуплоскости $y = 0, x \geq 0$; края разреза закреплены, т. е. на этой полуплоскости упругие смещения равны нулю. Аналогичная задача о дифракции акустических волн в жидкости решена С. Л. Соболевым в [1] (стр. 614).

Как известно ([1], стр. 471—473), при отсутствии внешних сил вектор смещения (u, v, w) можно представить в виде

$$(u, v, w) = \text{grad } \varphi + \text{rot } \psi \quad (1.1)$$

где скалярный потенциал φ и векторный потенциал $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ удовлетворяют уравнениям

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad b^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

где $1/a$ и $1/b$ — скорости продольной и поперечной волн. На закрепленной границе (в нашем случае на обеих сторонах полуплоскости $y = 0, x \geq 0$, по которой сделан разрез) имеем граничные условия

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \quad (1.3)$$

Требуется изучить дифракционную картину, возникающую при движении плоской продольной волны:

$$\varphi(t, x, y, z) = f(t - cz - c_1x + c_2y), \quad \psi(t, x, y, z) = 0 \quad (1.4)$$

где $f(s) = 0$ при $s \leq 0$. Задача о дифракции плоской поперечной волны распадается на три задачи о дифракции волн вида:

- 1) $\varphi = \psi_2 = \psi_3 = 0, \quad \psi_1 = f_1(t - cz - c_1x + c_2y)$
- 2) $\varphi = \psi_1 = \psi_3 = 0, \quad \psi_2 = f_2(t - cz - c_1x + c_2y)$
- 3) $\varphi = \psi_1 = \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = f_3(t - cz - c_1x + c_2y)$

Каждая из этих трех задач решается тем же методом, что и задача о дифракции волны (1.4). Поэтому ограничимся изложением решения

задачи о дифракции волны вида (1.4). В (1.4) будем считать, что $c > 0$, так как случай $c < 0$ сводится к случаю $c > 0$ заменой z на $-z$, а при $c = 0$ задача сводится к плоской задаче¹, рассмотренной ранее в [2].

В каждый момент времени фронт падающей волны — плоскость, пересекающая ось Oz в точке $z = t/c$. Эта точка является вершиной конуса $t - cz > \sqrt{(a^2 - c^2)(x^2 + y^2)}$, заполненного дифрагированными волнами (аналогично [1], стр. 615). Вне этого конуса будут иметься лишь плоские волны: падающая волна (1.4) и две волны (продольная и поперечная), отраженные от закрепленной границы. В любой момент времени $t = t_0$ фронты волны в сечении плоскостью $z = z_0$ дают такую картину, как на фигуре (см. стр. 696), если $t_0 > cz_0$ (если $t_0 < cz_0$, то в рассматриваемом сечении фронт волны еще не дошел до разреза).

Достаточно решить задачу для случая, когда в (1.4)

$$f(s) = 0 \text{ при } s \leq 0, \quad f(s) = s \text{ при } s \geq 0 \quad (1.5)$$

так как путем наложения таких волн можно получить любую плоскую волну вида (1.4).

2. Введем обозначения

$$\begin{aligned} a_1^2 &= a^2 - c^2, & b_1^2 &= b^2 - c^2 \\ u_0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & v_0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & w_0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ u_1 &= \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z}, & v_1 &= \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x}, & w_1 &= \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.1)$$

В силу (1.1) имеем $(u_0, v_0, w_0) + (u_1, v_1, w_1) = (u, v, w)$. Аналогично [1] (стр. 615), будем искать решение, зависящее только от трех переменных $x, y, t_1 = t - cz$. Из (1.2) следует, что каждая из функций u_0, v_0, w_0 удовлетворяет одному и тому же уравнению

$$a_1^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t_1^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \quad (2.2)$$

а каждая из функций u_1, v_1, w_1 — уравнению

$$b_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad (2.3)$$

Из (2.1) получим

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad -c \frac{\partial u_0}{\partial t_1} = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad -c \frac{\partial v_0}{\partial t_1} = \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = c \frac{\partial w_1}{\partial t_1} \quad (2.4)$$

Граничные условия (1.3) запишутся так:

$$u_0 + u_1 = 0, \quad v_0 + v_1 = 0, \quad w_0 + w_1 = 0 \quad \text{при } y = 0, x \geq 0 \quad (2.5)$$

Заметив, что из (1.2) и (1.4) следует равенство $c^2 + c_1^2 + c_2^2 = a^2$ и обозначив $c_1 = k$, получим $c_2^2 = a_1^2 - k^2$. Теперь из (1.1), (1.4) и (1.5)

¹ Можно убедиться, что если в найденном в этой статье решении положить $c = 0$ и затем от решения взять производную по t (чтобы перейти от рассматриваемых здесь начальных условий вида (1.4), где $f(s) = s$ при $s > 0$, к начальным условиям статьи [2], где $f(s) = 1$ при $s > 0$), то получим решение, найденное в [2].

следует, что при $t_1 < 0$

$$u_0 = v_0 = w_0 = u_1 = w_1 = v_1 = 0 \quad \text{при } t_1 - kx + \sqrt{a_1^2 - k^2}y < 0 \quad (2.6)$$

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0, \quad u_0 = -k, \quad v_0 = \sqrt{a_1^2 - k^2}, \quad w_0 = -c \quad (2.7)$$

при $t_1 - kx + \sqrt{a_1^2 - k^2}y > 0$

При $t_1 > 0$ имеем картину, изображенную на фигуре (стр. 696). Очевидно, в областях MKx и M_1C_1AKx (перед фронтом волны) имеют место равенства (2.6), а в области левее линии $MKCA_1C_1M_1$ (т. е. в тех местах за фронтом падающей волны, куда еще не дошли отраженные и дифрагированные волны) — равенства (2.7). В областях ACK и $AEDK$ имеются волны, отраженные от плоской границы Ox при граничном условии (2.5).

Обычным путем (как в [2], стр. 689) получим

$$u_0 = p, \quad v_0 = q, \quad w_0 = r \quad \text{в области } ACK$$

$$u_1 = -p, \quad v_1 = -q, \quad w_1 = -r \quad \text{в области } AEDK$$

$$p = -\frac{2k\sqrt{a_1^2 - k^2}\sqrt{b_1^2 - k^2}}{F(k)}, \quad q = \frac{2(k^2 + c^2)\sqrt{a_1^2 - k^2}}{F(k)} \quad (2.8)$$

$$r = -\frac{2c\sqrt{a_1^2 - k^2}\sqrt{b_1^2 - k^2}}{F(k)}, \quad F(k) = k^2 + c^2 + \sqrt{a_1^2 - k^2}\sqrt{b_1^2 - k^2}$$

Любую функцию $\Phi(y)$ можно представить в виде полусуммы четной функции $\Phi^+(y) = \Phi(y) + \Phi(-y)$ и нечетной функции $\Phi^-(y) = \Phi(y) - \Phi(-y)$. Обозначим через $u_0^\circ, v_0^*, w_0^\circ, u_1^\circ, v_1^*, w_1^\circ$ четные по y функции

$$u_0^\circ(t_1, x, y) = u_0(t_1, x, y) + u_0(t_1, x, -y)$$

$$v_0^*(t_1, x, y) = v_0(t_1, x, y) + v_0(t_1, x, -y)$$

и т. д., а через $u_0^*, v_0^\circ, w_0^*, u_1^*, v_1^\circ, w_1^*$ — нечетные по y функции

$$u_0^*(t_1, x, y) = u_0(t_1, x, y) - u_0(t_1, x, -y)$$

и т. д., где u_0, \dots, w_1 — решение рассматриваемой задачи (2.1) — (2.7). Очевидно, что $u_0 = 1/2(u_0^\circ + u_0^*)$ и т. д. и что каждая из систем функций $u_0^\circ, v_0^\circ, w_0^\circ, u_1^\circ, v_1^\circ, w_1^\circ$ и $u_0^*, v_0^*, w_0^*, u_1^*, v_1^*, w_1^*$ удовлетворяет уравнениям (2.2), (2.3), соотношениям (2.4) и граничным условиям (2.5).

Найдем сначала функции $u_0^\circ, v_0^\circ, w_0^\circ, u_1^\circ, v_1^\circ, w_1^\circ$. Из (2.6) и (2.7) следует, что при $t_1 < 0$ эти функции — однородные нулевого измерения относительно t_1, x, y . Поэтому решение будет однородным также и при $t_1 > 0$. Согласно [1] (стр. 514) такое решение можно искать в виде

$$u_0^\circ = \operatorname{Re} U_0(\theta_0), \quad v_0^\circ = \operatorname{Re} V_0(\theta_0), \quad w_0^\circ = \operatorname{Re} W_0(\theta_0) \quad (2.9)$$

$$u_1^\circ = \operatorname{Re} U_1(\theta_1), \quad v_1^\circ = \operatorname{Re} V_1(\theta_1), \quad w_1^\circ = \operatorname{Re} W_1(\theta_1)$$

где U_0, V_0, \dots, W_1 — аналитические функции комплексного переменного

$$\theta_0 = \sigma + i\tau_0, \quad \theta_1 = \sigma + i\tau_1$$

$$\sigma = \frac{t_1 x}{x^2 + y^2}, \quad \tau_0 = \frac{y\sqrt{t_1^2 - a_1^2(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2}, \quad \tau_1 = \frac{y\sqrt{t_1^2 - b_1^2(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2} \quad (2.10)$$

Из равенств (2.4) получим

$$\sqrt{a_1^2 - \theta^2} U_0'(\theta) = \theta V_0'(\theta), \quad c U_0'(\theta) = \theta W_0'(\theta)$$

$$c V_0'(\theta) = \sqrt{a_1^2 - \theta^2} W_0'(\theta) \quad (2.11)$$

$$\theta U_1'(\theta) + \sqrt{b_1^2 - \theta^2} V_1'(\theta) + c W_1'(\theta) = 0$$

Радикалы считаются непрерывными при $\text{Im } \theta \geq 0$ и положительными при $-a_1 < \theta < a_1$.

Вследствие четности функций $u_0^\circ, w_0^\circ, u_1^\circ, w_1^\circ$ и нечетности функций v_0°, v_1° относительно y достаточно рассмотреть функции $U_0(\theta), \dots, W_1(\theta)$ только в верхней полуплоскости. Тем же способом, что в § 2 работы [2], получим следующие условия, которым должны удовлетворять функции $U_0(\theta), \dots, W_1(\theta)$ на вещественной оси:

$$\text{Im } U_0'(\theta) = 0, \quad \text{Re } V_0(\theta) = 0, \quad \text{Im } W_0'(\theta) = 0 \quad \text{при } -\infty < \theta < -a_1 \quad (2.12)$$

$$\text{Im } U_1'(\theta) = 0, \quad \text{Re } V_1(\theta) = 0, \quad \text{Im } W_1'(\theta) = 0 \quad \text{при } -\infty < \theta < -b_1 \quad (2.13)$$

$$\text{Re } U_0(\theta) = -2k, \quad \text{Re } V_0(\theta) = 0, \quad \text{Re } W_0(\theta) = -2c \quad \text{при } -a_1 < \theta < k \quad (2.14)$$

$$\text{Re } U_1(\theta) = 0, \quad \text{Re } V_1(\theta) = 0, \quad \text{Re } W_1(\theta) = 0 \quad \text{при } -b_1 < \theta < k \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \text{Re } U_0(\theta) = p, \quad \text{Re } V_0(\theta) = q, \quad \text{Re } W_0(\theta) = r \\ \text{Re } U_1(\theta) = -p, \quad \text{Re } V_1(\theta) = -q, \quad \text{Re } W_1(\theta) = -r \quad \text{при } k < \theta < a_1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \text{Re}(U_0(\theta) + U_1(\theta)) = 0, \quad \text{Re}(V_0(\theta) + V_1(\theta)) = 0 \\ \text{Re}(W_0(\theta) + W_1(\theta)) = 0 \quad \text{при } a_1 < \theta < +\infty \end{aligned} \quad (2.17)$$

3. Найдем функции $U_0(\theta), \dots, W_1(\theta)$, которые в верхней полуплоскости регулярны и удовлетворяют соотношениям (2.11), а на вещественной оси — граничным условиям (2.12) — (2.17). Из условий (2.12) — (2.17) следует, что на всей вещественной оси $\text{Re}(V_0(\theta) + V_1(\theta)) = 0$. Поэтому напомним¹

$$V_0(\theta) + V_1(\theta) \equiv 0 \quad (3.1)$$

При помощи равенств (2.11) и (3.1) выразим функции U_0', V_0', U_1', V_1' через W_0' и W_1' . Пользуясь также равенствами (2.17), получим

$$\text{Re } F(\theta) W_0'(\theta) = 0 \quad \text{при } a_1 < \theta < +\infty \quad (F(\theta) = \theta^2 + c^2 + \sqrt{a_1^2 - \theta^2} \sqrt{b_1^2 - \theta^2}) \quad (3.2)$$

Из (2.12), (2.14) и (2.16) получим, что

$$\text{Im } W_0'(\theta) = 0 \quad \text{при } -\infty < \theta < -a_1 \quad (3.3)$$

$$\text{Re } W_0'(\theta) = 0 \quad \text{при } -a_1 < \theta < k \text{ и } k < \theta < a_1$$

а при $\theta = k$ функция $W_0'(\theta)$ имеет полюс с главной частью

$$W_0'(\theta) \sim \frac{i(r+2c)}{\pi(\theta-k)} = \frac{i}{\pi(\theta-k)} \frac{2c(k^2+c^2)}{F(k)} \quad (3.4)$$

Из формул (3.2) — (3.3) мы знаем $\arg W_0'(\theta)$ на всей вещественной оси. Чтобы найти $W_0'(\theta)$, построим такую функцию $F_1(\theta)$, что

$$\ln F_1(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\arg F(t)}{\theta-t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \arctg \frac{\sqrt{b_1^2-t^2} \sqrt{t^2-a_1^2}}{t^2+c^2} \frac{dt}{t-\theta} \quad (3.5)$$

Тогда $F_1(\infty) = 1$; на вещественной оси $\arg F_1(\theta) = 0$, кроме интервала (a_1, b_1) , где $\arg F_1(\theta) = -\arg F(\theta)$. Теперь из (3.2) — (3.3) следует,

¹ В силу соображений, изложенных в начале § 3 работы [2], будем искать простейшее частное решение задачи (2.11) — (2.17), т. е. решение с минимальными особенностями на вещественной оси и в бесконечности.

что на всей вещественной оси

$$\operatorname{Re} \frac{W_0'(\theta) \sqrt{\theta + a_1}}{F_1(\theta)} = 0$$

кроме точки $\theta = k$, где имеется полюс. Поэтому напомним

$$\frac{W_0'(\theta) \sqrt{\theta + a_1}}{F_1(\theta)} = iA + \frac{iB}{\theta - k} \quad (3.6)$$

Из условия (3.4) получим

$$B = \frac{2c(k^2 + c^2) \sqrt{k + a_1}}{\pi F'(k) F_1(k)}$$

постоянную A определим позднее. Из (2.17) и (2.11) следует, что

$$\operatorname{Re} cU_1' = \operatorname{Re} \theta W_1' \quad \text{при } \theta > a_1$$

Отсюда и из (2.13), (2.15), (2.16) следует, что

$$\operatorname{Re} [(cU_1'(\theta) - \theta W_1'(\theta)) \sqrt{b_1 + \theta}] = 0 \quad \text{при } -\infty < \theta < +\infty \quad (3.7)$$

Из (2.15), (2.16), (2.11) и (2.8) следует, что функция $\operatorname{Re}(cU_1 - \theta W_1)$ непрерывна при $\theta = k$, поэтому функция $cU_1' - \theta W_1'$ там не имеет полюса. Пользуясь (3.7), напомним

$$cU_1'(\theta) - \theta W_1'(\theta) = \frac{iD}{\sqrt{b_1 + \theta}} \quad (3.8)$$

Из равенств (2.1), (3.1), (3.6), (3.8) находим все шесть искомым функций:

$$U_0'(\theta) = \frac{\theta}{c} W_0'(\theta) = \frac{i\theta F_1(\theta)}{c \sqrt{a_1 + \theta}} \left(A + \frac{B}{\theta - k} \right), \quad U_1'(\theta) = \frac{\theta}{c} W_1'(\theta) + \frac{iD}{c \sqrt{b_1 + \theta}}$$

$$V_0'(\theta) = -V_1'(\theta) = \frac{i \sqrt{a_1 - \theta} F_1(\theta)}{c} \left(A + \frac{B}{\theta - k} \right) \quad (3.9)$$

$$W_1'(\theta) = \frac{i}{\theta^2 + c^2} \left[F_1(\theta) \sqrt{a_1 - \theta} \sqrt{b_1^2 - \theta^2} \left(A + \frac{B}{\theta - k} \right) - \frac{\theta D}{\sqrt{b_1 + \theta}} \right]$$

Вещественные постоянные A и D найдем из условия регулярности функций U_1' и W_1' в точке $\theta = ic$. Для этого надо, чтобы квадратная скобка обращалась в нуль при $\theta = ic$, т. е.

$$F_1(ic) \sqrt{a_1 - ic} \sqrt{b_1 + ic} \sqrt{b_1^2 + c^2} \left(A + \frac{B}{ic - k} \right) - icD = 0$$

Приравняв нулю вещественную часть этого выражения, найдем

$$A = \frac{B}{c^2 + k^2} \left(k - c \frac{\operatorname{Im}(F_1(ic) \sqrt{a_1 - ic} \sqrt{b_1 + ic})}{\operatorname{Re}(F_1(ic) \sqrt{a_1 - ic} \sqrt{b_1 + ic})} \right) \quad (3.10)$$

а приравняв нулю мнимую часть, найдем D . Покажем, что в (3.10) знаменатель не равен нулю. В самом деле, из $0 < a_1 < b_1$ и $c > 0$ следует, что

$$-\frac{1}{4} \pi < \arg(\sqrt{a_1 - ic} \sqrt{b_1 + ic}) < 0$$

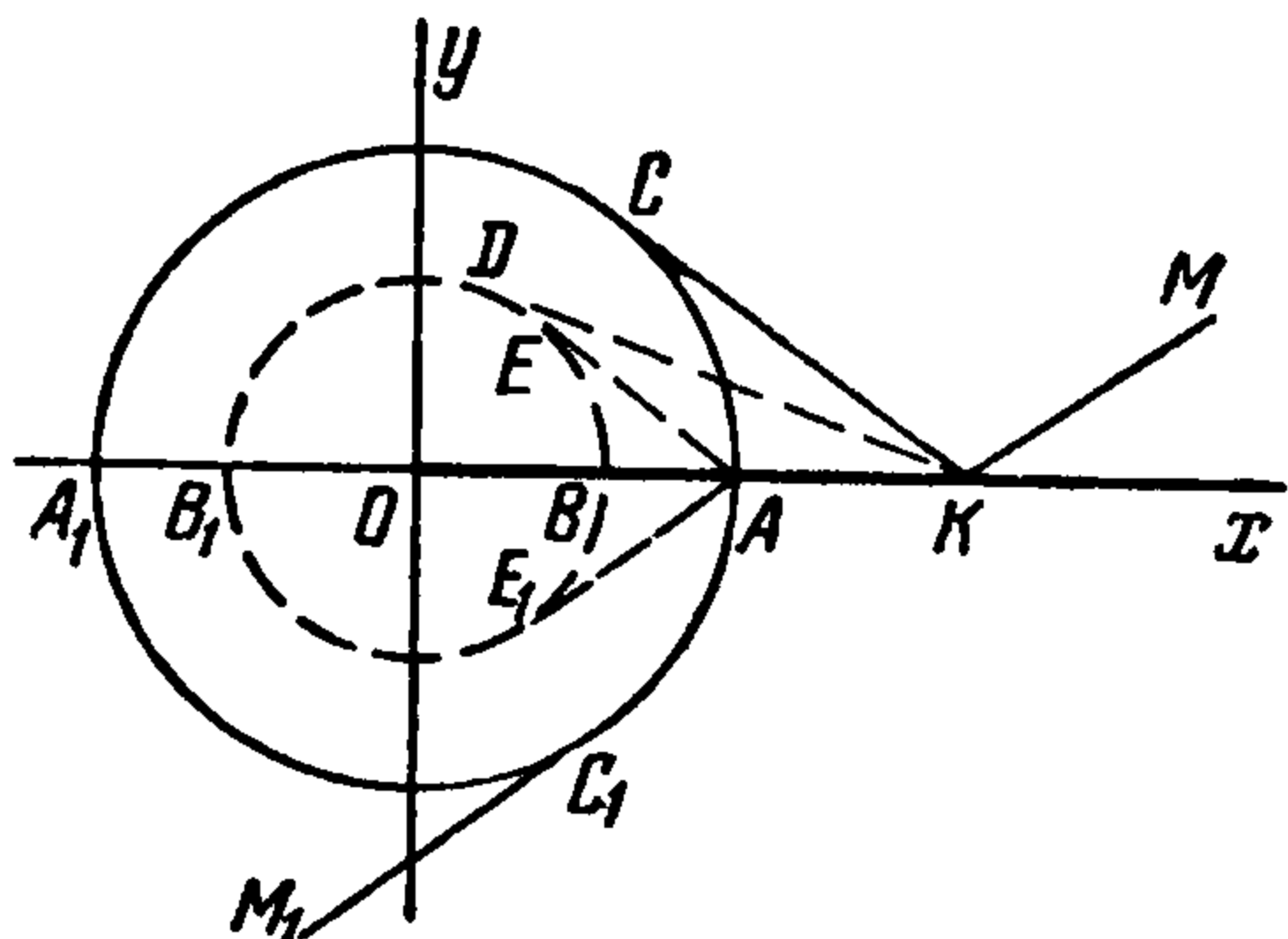
а из (3.5) следует, что

$$\arg F_1(ic) = \operatorname{Im} \ln F_1(ic) < \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\pi}{2} \operatorname{Im} \frac{1}{t - ic} dt < \frac{\pi}{4}$$

Значит,

$$|\arg(F_1(ic) \sqrt{a_1 - ic} \sqrt{b_1 + ic})| < \frac{1}{4} \pi$$

и знаменатель в (3.10) не равен нулю. Итак, функции U_0', \dots, W_1' найдены. Принимая во внимание (2.14) и (2.15), найдем U_0, \dots, W_1 , а затем из (2.9) найдем $u_0^\circ, \dots, w_1^\circ$. В области BEA (фигура), где τ_1 в (2.10) мнимое, функции $u_1^\circ, v_1^\circ, w_1^\circ$ определяются тем же путем, как функция ψ в п. 3 § 2 работы [2].



4. Чтобы найти функции u_0^*, \dots, w_1^* , подобно (2.9) пишем

$$u_0^* = \operatorname{Re} U_0^*(\theta_0), \dots, w_1^* = \operatorname{Re} W_1^*(\theta_1)$$

где θ_0 и θ_1 — те же, что в (2.10). Функции U_0^*, \dots, W_1^* будут удовлетворять тем же самым соотношениям (2.11) и вместо условий (2.12) — (2.14) следующим граничным условиям:

$$\operatorname{Re} U_0^*(\theta) = 0, \quad \operatorname{Im} V_0^{**}(\theta) = 0, \quad \operatorname{Re} W_0^*(\theta) = 0 \quad \text{при } -\infty < \theta < a_1 \quad (4.1)$$

$$\operatorname{Re} U_1^*(\theta) = 0, \quad \operatorname{Im} V_1^{**}(\theta) = 0, \quad \operatorname{Re} W_1^*(\theta) = 0 \quad \text{при } -\infty < \theta < -b_1 \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} U_0^*(\theta) = 0, \quad \operatorname{Re} V_0^*(\theta) &= 2\sqrt{a_1^2 - k^2} \\ \operatorname{Re} W_0^*(\theta) = 0 \quad \text{при } -a_1 < \theta < k \end{aligned} \quad (4.3)$$

Условия (2.15) — (2.17) остаются в силе и для функций U_0^*, \dots, W_1^* . Из этих условий следует, что

$$\operatorname{Re}(U_0^* + U_1^*) = 0, \quad \operatorname{Re}(W_0^* + W_1^*) = 0$$

при $-\infty < \theta < +\infty$.

Поэтому вместо одного равенства (3.1) получим два:

$$U_0^* + U_1^* = 0, \quad W_0^* + W_1^* = 0$$

Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как в п. 3, и мы получим

$$\begin{aligned} W_0^{**}(\theta) = -W_1^{**}(\theta) &= \frac{c}{\theta} U_0^{**}(\theta) = -\frac{c}{\theta} U_1^{**}(\theta) = \frac{iE \sqrt{b_1 - \theta} F_1(\theta)}{\theta - k} \quad (4.4) \\ V_0^{**}(\theta) &= \frac{iE \sqrt{b_1 - \theta} \sqrt{a_1^2 - \theta^2} F_1(\theta)}{c(\theta - k)}, \quad V_1^{**}(\theta) = \frac{iE(\theta^2 + c^2) F_1(\theta)}{c(\theta - k) \sqrt{b_1 + \theta}} \end{aligned}$$

где функция $F_1(\theta)$ та же, что в (3.5),

$$E = -\frac{2c \sqrt{a_1^2 - k^2} \sqrt{b_1 + k}}{\pi F(k) F_1(k)} = -\frac{4c \sqrt{a_1^2 - k^2} \sqrt{b_1 + k} F_1(-k)}{\pi (a_1^2 + b_1^2 + 2c^2)} \quad (4.5)$$

Поступила
29 XII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2. ОНТИ, 1937.
2. Филиппов А. Ф. Некоторые задачи дифракции плоских упругих волн. ПММ, т. XX, № 6, стр. 688—703, 1956.